Vorwort.

Die vorliegende Abtheilung der *Statik der Baukonstruktionen* beschäftigt sich mit einer der wichtigsten Anwendungen der Elasticitätslehre; sie stellt sich die Aufgabe, die Formänderungen ebener Fachwerke und die Theorie des statisch unbestimmten ebenen Fachwerks möglichst vollständig darzustellen.

Den Ausgangspunkt bildet hierbei das Gesetz der virtuellen Verrückungen und der aus diesem gefolgerte Maxwell'sche Satz von der Gegenseitigkeit der elastischen Formänderungen, eine *analytische* Grundlage, die auf den ersten Blick für ein Lehrbuch der *graphischen* Statik nicht recht geeignet erscheint. — Wer sich aber auf das Gebiet der Elasticitätslehre begiebt, ist immer gezwungen, gewisse Vorarbeiten durch Rechnung zu erledigen, und angesichts dieser Sachlage liesse es sich kaum rechtfertigen, ein so vortreffliches Rüstzeug wie die neuere analytische Theorie beiseite zu legen und durch umständlichere Hülfsmittel zu ersetzen. Dem zeichnerischen Verfahren bleibt immer noch ein weites Feld: die Auftragung der Verschiebungspläne und die Benutzung dieser Liniengebilde zur Herleitung der Einflusslinien und Einflusszahlen, welche auf alle bei der Untersuchung eines gegebenen Fachwerks zu stellenden Fragen die bündigste Antwort geben.

Unser Buch ist folgendermassen gegliedert.

In der Einleitung werden die Grundgesetze der neueren analytischen Theorie unter der Voraussetzung hergeleitet, dass für den Baustoff eine Proportionalitätsgrenze besteht und die Beanspruchung innerhalb dieser Grenze liegt, eine Annahme, welche bei den hier ausschliesslich in Betracht kommenden Trägern aus Schweisseisen, Flusseisen und Stahl zulässig ist.*) Der Verfasser hat sich hierbei

---

*) Hinsichtlich der Eigenschaften flusseiserner Träger verweisen wir auf das kürzlich erschienene III. Heft der Zeitschrift des österreich. Architekten- und Ingenieur-Vereins (1891), enthaltend den Bericht des Brückenmaterial-Comités über die Verwendung des Flusseisens zu Brückenbaukonstruktionen und die fachwissenschaftlichen Erörterungen zu diesem Berichte seitens des Herrn Prof. Brik. Auch machen wir an dieser Stelle auf das ausgezeichnete Werk von *Bach*, „Lehre von der Elasticität und Festigkeit, Berlin 1889" aufmerksam, welches zur Zeit der (bereits 1888 erfolgten) Drucklegung der ersten Hälfte unseres Buches noch nicht erschienen war. Zu den wichtigsten Ergebnissen der Versuche *Bachs* gehört die Feststellung, dass für Gusseisen eine Proportionalitätsgrenze *nicht* besteht. — Mit der Behandlung von Fällen, in denen die Voraussetzung von den Spannungen proportionalen Formänderungen nicht statthaft ist, werden wir uns in der zweiten Abtheilung dieses Bandes beschäftigen.

möglichster Kürze befleissigt, hofft aber, die Schwierigkeiten, welche diese allgemeinen Lehren dem Anfänger zu bieten pflegen, durch Einflechtung von leicht zu überschauenden Sonderfällen gehoben zu haben.

Der I. Abschnitt lehrt in den §§ 1—4 die verschiedenen Darstellungsweisen der Knotenpunktsverschiebungen ebener Fachwerke und zwar in erster Linie die zeichnerischen Verfahren, nebenbei aber auch den in vielen Fällen einfacheren rechnerischen Weg. Dieser wichtigste Theil des Buches ist besonders ausführlich behandelt worden; es wurden nicht nur die landläufigen Fälle untersucht, sondern auch schwierigere Aufgaben mit Zuhilfenahme der Kinematik gelöst. § 5 enthält sodann als Fortsetzung der Einleitung eine Reihe von Aufgaben über das statisch unbestimmte Fachwerk, und zeigt, dass sich die Ermittelung der statisch nicht bestimmbaren Grössen stets mit Hilfe von einfachen Verschiebungsplänen durchführen lässt und dass der vorgetragene Lehrstoff selbst bei Behandlung schwierigerer Fälle nicht im Stiche lässt. Den Schluss des I. Abschnitts bildet ein Nachtrag zur Lehre vom statisch bestimmten Fachwerk; es wird das Gesetz der virtuellen Verrückungen in Verbindung mit der Darstellung der Formänderungen zur Ermittelung der Stabkräfte und Auflagerwiderstände benutzt.

Damit ist die Theorie des ebenen Fachwerks abgeschlossen. Der II. Abschnitt enthält lediglich Anwendungen; es werden die wichtigsten statisch unbestimmten Träger ausführlicher betrachtet, zuerst der Zweigelenkbogen, sodann die versteiften Stabbögen, der beiderseits eingespannte Bogen und der durchgehende Balken. Alle diese Untersuchungen erfolgen im Anschluss an die allgemeine Theorie, ein Verfahren, welches der Verfasser in seinen Vorträgen an der hiesigen technischen Hochschule als vortheilhaft erkannt hat und welches die Bewältigung dieses wichtigen Lehrstoffs ohne grossen Zeitaufwand gestattet. Der Lernende hat in der That nur nöthig, ein einziges Beispiel sorgfältig durchzuarbeiten, um sich volle Sicherheit auf dem ganzen Gebiete zu erwerben. Dass diese auf die Beherrschung der allgemeinen Gesetze hinzielende Vortragsweise seitens des Studirenden anfangs etwas mehr geistige Anstrengung verlangt als die Beschränkung auf die einfachsten Sonderfälle, von denen jeder von Grund aus entwickelt wird, ist selbstverständlich. Dafür bietet sie aber auch mehr als eine Gebrauchsanweisung für die Behandlung leichter Aufgaben.

Berlin, im September 1891.

H. Müller-Breslau.

Inhalt.

Einleitung.

Grundgesetze der Theorie der elastischen Träger.

I. Abschnitt.

Bestimmung der Formänderungen ebener Fachwerke, mit Anwendungen auf die Untersuchung statisch unbestimmter und statisch bestimmter Träger.

II. Abschnitt.

Formeln, Regeln und Beispiele für die Berechnung der wichtigsten statisch unbestimmten Fachwerke.

Berichtigungen.

Seite 62 In Fig. 38b ist versehentlich Stab 11 als Zugstab statt als Druckstab behandelt worden.

„ 109 Fig. 91c lies $-\mu_6$ statt μ_6.

„ 147 Fig. 139 u. 140 lies S_a und S_b statt S' und S''.

„ 204 Fig. 200. An der Geraden $L_1 L_2$ fehlt die Bezeichnung II.

Einleitung.

Grundgesetze der Theorie der elastischen Träger.

A. Das Fachwerk.

a. Voraussetzungen und Erklärungen. Elasticitätsbedingungen. Gesetz von der Zusammenzählung der einzelnen Wirkungen.

1. — Wird ein aus elastischen Stäben gebildetes und auf elastischen Stützen ruhendes Fachwerk der Einwirkung von äusseren Kräften und Temperaturänderungen ausgesetzt, so erfährt dasselbe vor Eintritt des Gleichgewichts, dessen schliessliches Zustandekommen vorausgesetzt werden möge, im Allgemeinen eine Formveränderung. Die Verschiebungen, welche die Knotenpunkte dabei erfahren, bezeichnet man als *elastische,* sobald dieselben nur eine Folge der Dehnbarkeit der Stäbe und der Elasticität der Widerlager sind. Sie werden dann meistens so klein sein, dass es zulässig ist, sie als verschwindende Grössen zu behandeln und bei Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen sämmtliche Kräfte in denjenigen Lagen zu denken, welche sie im Falle starrer Stäbe und Stützen einnehmen würden.

Die folgenden Untersuchungen sind an die Annahme ganz allmählich wachsender Kräfte gebunden, setzen also voraus, dass der Gleichgewichtszustand eintritt, ohne dass Schwingungen entstehen. Sie beschäftigen sich mit ebenen und räumlichen Fachwerken, beschränken sich aber auf den Fall sehr kleiner und nur elastischer Formänderungen. Ihr erstes Ziel ist die Herleitung von allgemeinen Beziehungen zwischen den Aenderungen der Stablängen und den durch dieselben hervorgerufenen Verschiebungen der Knotenpunkte — Beziehungen, die nicht allein die Bestimmung der Gestalt des verschobenen Fachwerks möglich machen, sondern auch die Grundlage für die Ermittelung der Spannkräfte und Stützenwiderstände derjenigen statisch unbestimmten Fachwerke bilden werden, welche sich durch Beseitigung von Stäben oder Auflagerbedingungen in statisch bestimmte und ausschliesslich elastischen Formänderungen unterworfene Stabgebilde verwandeln lassen.

2. — Es wird zunächst angenommen, dass die äusseren Kräfte nur in den Knotenpunkten angreifen, mithin sämmtliche Stäbe ausschliesslich auf Zug oder auf Druck beansprucht werden. Die Gewichte der Stäbe sind hierbei auf die Knotenpunkte vertheilt zu denken (vergl. Band I, § 28). Alle gegebenen äusseren Kräfte werden *Lasten* genannt, zur Unterscheidung derselben von den an den Auflagern hervorgerufenen *Widerständen*. Eine Last werden wir allgemein mit P bezeichnen, hingegen den Buchstaben Q anwenden, wenn es dahingestellt sein soll, ob die damit gemeinte äussere Kraft eine Last oder ein Stützenwiderstand ist. Vor Einwirkung der äusseren Kräfte und der Temperaturänderungen seien sämmtliche Stäbe spannungslos. Es bedeute

S die Spannkraft in irgend einem Stabe,
s die anfängliche Länge dieses Stabes,
Δs die Strecke, um welche s zunimmt (sie ist negativ, sobald sich der Stab verkürzt),
$\frac{\Delta s}{s}$ das Verlängerungsverhältniss des Stabes,
F den Querschnitt des prismatisch vorausgesetzten Stabes,
E die für alle Punkte des Stabes gleich gross angenommene Elasticitätsziffer (auch Elasticitätskoëfficient oder Elasticitätsmodul genannt),
t die für alle Punkte des Stabes gleiche Temperaturerhöhung,
ε das einer Temperaturerhöhung um 1° Cels. entsprechende Verlängerungsverhältniss,
$\sigma = \frac{S}{F}$ die im Stabe hervorgerufene *Spannung* — positiv, sobald der Stab gezogen wird.

Das Verlängerungsverhältniss ist erfahrungsgemäss:

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon t = \frac{S}{EF} + \varepsilon t. \tag{1}$$

Schreibt man: $\frac{\Delta s}{s} = \frac{\sigma + \varepsilon E t}{E}$, so erkennt man, dass die Temperaturerhöhung denselben Einfluss auf Δs besitzt, wie eine Zunahme der Spannung um $\varepsilon E t$, ein Gesetz, von dem wir später öfter Gebrauch machen wollen. Man darf im Mittel annehmen

für *Stabeisen:* $\varepsilon = 0{,}000012$ und
$E = 2\,000\,000$ klgr für das qcm $= 20\,000\,000$ Tonnen f. d. qm,
für *Stahl:* $\varepsilon = 0{,}000011$ und
$E = 2\,150\,000^k$ f. d. qcm $= 21\,500\,000^t$ f. d. qm,
mithin für beide Stoffe rund:
$\varepsilon E = 24^k$ f. d. qcm $= 240^t$ f. d. qm.

für *Gusseisen:* $E = 1\,000\,000^k$ f. d. qcm $= 10\,000\,000^t$ f. d. qm
$\varepsilon = 0{,}000\,011$; $\varepsilon E = 11^k$ f. d. qcm $= 110^t$ f. d. qm.

3. — Ein räumliches Fachwerk sei auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y, z bezogen. i und k seien irgend zwei durch einen Stab von der Länge s_{ik} verbundene Knotenpunkte. Die Koordinaten $(x_i\ y_i\ z_i)$, $(x_k\ y_k\ z_k)$ derselben mögen in Folge der Formänderung des Fachwerks um $(\Delta x_i\ \Delta y_i\ \Delta z_i)$, $(\Delta x_k\ \Delta y_k\ \Delta z_k)$ zunehmen. Dann bestehen die Gleichungen:

$$s_{ik}^2 = (x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2 \quad \text{und} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}(s_{ik} + \Delta s_{ik})^2 &= [(x_k + \Delta x_k) - (x_i + \Delta x_i)]^2 + [(y_k + \Delta y_k) - (y_i + \Delta y_i)]^2 \\ &\quad + [(z_k + \Delta z_k) - (z_i + \Delta z_i)]^2 \\ &= [(x_k - x_i) + (\Delta x_k - \Delta x_i)]^2 + [(y_k - y_i) + (\Delta y_k - \Delta y_i)]^2 \\ &\quad + [(z_k - z_i) + (\Delta z_k - \Delta z_i)]^2\end{aligned} \tag{3}$$

und man erhält, wenn man (2) von (3) abzieht:

$$\begin{aligned}2 s_{ik} \Delta s_{ik} + \Delta s^2_{ik} &= 2 (x_k - x_i)(\Delta x_k - \Delta x_i) + (\Delta x_k - \Delta x_i)^2 \\ &\quad + 2 (y_k - y_i)(\Delta y_k - \Delta y_i) + (\Delta y_k - \Delta y_i)^2 \\ &\quad + 2 (z_k - z_i)(\Delta z_k - \Delta z_i) + (\Delta z_k - \Delta z_i)^2.\end{aligned} \tag{4}$$

Werden nun die Werthe Δx, Δy, Δz, Δs so klein vorausgesetzt, dass es zulässig ist, die kleinen Grössen zweiter Ordnung gegen diejenigen der ersten Ordnung zu vernachlässigen, so geht (4) über in

$$\begin{aligned}2 s_{ik} \Delta s_{ik} &= 2 (x_k - x_i)(\Delta x_k - \Delta x_i) + 2 (y_k - y_i)(\Delta y_k - \Delta y_i) \\ &\quad + 2 (z_k - z_i)(\Delta z_k - \Delta z_i),\end{aligned} \tag{5}$$

d. i. in eine Gleichung, welche man auch erhalten kann, indem man die Gleichung (2) differentiirt und das Differentialzeichen d durch das Zeichen Δ ersetzt; sie ist nur dann streng richtig, wenn die Δx, Δy, Δz, Δs unendlich klein sind.

Bedeuten α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik} die Winkel, welche die Richtung des Stabes s_{ik} mit den Richtungen der Achsen x, y, z einschliesst, so ist:

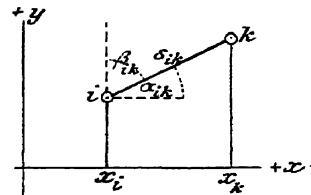
$$x_k - x_i = s_{ik} \cos \alpha_{ik}; \quad y_k - y_i = s_{ik} \cos \beta_{ik};$$
$$z_k - z_i = s_{ik} \cos \gamma_{ik}$$

(vergl. Fig. 1, welche sich auf ein ebenes Fachwerk bezieht) und es kann deshalb (5) umgeformt werden in

Fig. 1.

$$\begin{aligned}\Delta s_{ik} &= (\Delta x_k - \Delta x_i) \cos \alpha_{ik} + (\Delta y_k - \Delta y_i) \cos \beta_{ik} \\ &\quad + (\Delta z_k - \Delta z_i) \cos \gamma_{ik},\end{aligned} \tag{6}$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (1) in:

$$\begin{aligned}\frac{S_{ik}\, s_{ik}}{E_{ik}\, F_{ik}} + \varepsilon_{ik}\, t_{ik}\, s_{ik} &= (\Delta x_k - \Delta x_i) \cos \alpha_{ik} + (\Delta y_k - \Delta y_i) \cos \beta_{ik} \\ &\quad + (\Delta z_k - \Delta z_i) \cos \gamma_{ik}.\end{aligned} \tag{7}$$

Wir nennen die Gleichung (7) eine *Elasticitätsbedingung*. Ist die Anzahl der Fachwerkstäbe $= r$, so lassen sich r Elasticitätsbedingungen aufstellen.

4. — Die Aufgabe der Theorie des Fachwerks besteht in der Ermittelung der Stützenwiderstände und Spannkräfte, sowie in der Aufsuchung der Gestalt des verschobenen Fachwerks. Der letztere Theil dieser Aufgabe ist als gelöst zu betrachten, sobald die Seitenverschiebungen Δx, Δy, Δz sämmtlicher Knotenpunkte bekannt sind.

Als gegeben wollen wir ausser den auf das Fachwerk wirkenden Lasten P und den Temperaturänderungen t vorläufig auch die Verschiebungen der Stützpunkte annehmen, denn diese können meistens nur geschätzt oder durch Beobachtung bestimmt werden; sie lassen sich in den seltensten Fällen durch die auf die Widerlager wirkenden Kräfte und die Temperaturänderungen der Stützen ausdrücken, da wichtige Ursachen jener Verschiebungen, wie das Nachgeben des Baugrundes und die Formänderung der Mauerwerkkörper, bislang noch sehr wenig erforscht sind.

Wir setzen zunächst voraus, dass an den Auflagerstellen keine Reibungswiderstände auftreten und unterscheiden dann drei Arten von Stützung:

a) Der Stützpunkt w wird auf einer Fläche geführt. Der Stützenwiderstand wirkt rechtwinklig zu der in w an jene Fläche gelegten Berührungsebene; seine Richtung ist gegeben, seine Grösse wird gesucht. Bei ruhendem Widerlager ist die Verschiebung von w in der Richtung des Auflagerdruckes $= 0$; im Gegenfalle möge dieselbe einen durch die Beobachtung gefundenen, gegebenen Werth annehmen.

b) Der Stützpunkt w wird auf einer Linie geführt; er kann sich in der Richtung der in w an jene Linie gelegten Tangente frei bewegen. Der in w angreifende Auflagerdruck liegt in der zur Tangente rechtwinkligen Ebene und muss durch Angabe zweier Seitenkräfte bestimmt werden. Bei ruhendem Widerlager sind die in die Richtungen dieser Seitenkräfte fallenden Seitenverschiebungen des Punktes w gleich Null. Giebt das Widerlager nach, so mögen jene Verschiebungen gegebene, durch Beobachtung gefundene Werthe besitzen.

c) Kann sich ein Stützpunkt w nach keiner Richtung hin frei bewegen, so ist zur Bestimmung des an demselben angreifenden Widerstandes die Angabe von drei Seitenkräften erforderlich, und diesen Kräften stehen bei nachgebendem Widerlager drei beobachtete Seitenverschiebungen gegenüber.

Wie also die Stützung eines Punktes w immer beschaffen sein mag — stets ist die Anzahl der an dem Auflager auftretenden unbekannten

äusseren Kräfte ebenso gross wie die Anzahl der gegebenen Seitenverschiebungen, welche letztere die *Auflagerbedingungen* genannt werden sollen.

Die Anzahl der Knotenpunkte sei $= k$, diejenige der Stäbe $= r$. Für jeden Knotenpunkt lassen sich drei *Gleichgewichtsbedingungen* aufstellen. Bedeuten nämlich Q_{xm}, Q_{ym}, Q_{zm} die den Achsen x, y, z parallelen Seitenkräfte der in irgend einem Knotenpunkte m angreifenden äusseren Kraft Q_m, ferner $S_1, S_2, \ldots S_p$ die Spannkräfte in den von m ausgehenden Stäben und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$, $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_p$, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_p$ die Neigungswinkel der Stabachsen gegen die Achsen x, y, z, so muss sein:

$$(8) \qquad \begin{cases} Q_{xm} + \sum_1^p S \cos\alpha = 0 \\ Q_{ym} + \sum_1^p S \cos\beta = 0 \\ Q_{zm} + \sum_1^p S \cos\gamma = 0. \end{cases}$$

Im Ganzen stehen beim räumlichen Fachwerk zur Verfügung:

$3k$ Gleichgewichtsbedingungen,
r Elasticitätsbedingungen von der Art der Gleichung (7),
a Auflagerbedingungen,

und diese Gleichungen enthalten als Unbekannte:

r Spannkräfte S,
a nach bestimmten Richtungen wirkende Stützenwiderstände,
$3k$ Seitenverschiebungen Δx, Δy, Δz von k Knotenpunkten.

(Beim ebenen Fachwerk tritt $2k$ an die Stelle von $3k$.)

Die Anzahl der Unbekannten ist also ebenso gross wie die Anzahl der Gleichungen. Letztere sind durchweg vom ersten Grade; sie lassen sich eindeutig auflösen, sobald ihre Nennerdeterminante einen von Null verschiedenen Werth besitzt — was hier vorausgesetzt werden soll. Eine nähere Untersuchung dieser Nennerdeterminante ist überflüssig, weil später ein anderer, viel einfacherer Weg zur Lösung der gestellten Aufgabe eingeschlagen und aus der vorstehenden Untersuchung nur gefolgert werden soll,

dass sich die Spannkräfte S, ferner die nach bestimmten Richtungen wirkenden Stützenwiderstände C und die Seitenverschiebungen Δx, Δy, Δz darstellen lassen als lineare Funktionen der den Koordinatenachsen parallelen Seitenkräfte P_1, P_2, $P_3 \ldots$ der Lasten, der Aenderungen t_1, t_2, $t_3 \ldots$ der anfänglichen Stabtemperaturen und der nach bestimmten Richtungen erfolgenden Verschiebungen δ_{w1}, δ_{w2}, $\delta_{w3}, \ldots$ der Stützpunkte w.

Für jede der zu suchenden Unbekannten, die wir allgemein mit Z bezeichnen wollen, ergiebt sich hiernach ein Ausdruck von der Form:

$$(9) \qquad \begin{aligned} Z = {} & \varkappa_1 P_1 + \varkappa_2 P_2 + \varkappa_3 P_3 + \dots \\ & + \mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \mu_3 t_3 + \dots \\ & + \nu_1 \delta_{w1} + \nu_2 \delta_{w2} + \nu_3 \delta_{w3} + \dots, \end{aligned}$$

wobei $\varkappa$, μ, ν Werthe sind, welche von den Abmessungen und Richtungen der Stäbe, den Werthen E und ε, den Koordinaten x, y, z der Knotenpunkte und von der Art der Stützung des Fachwerks abhängen, nicht aber von den Grössen P, t, δ_w.

Ist insbesondere die Anzahl der Stäbe und der Auflagerkräfte zusammen $= 3k$ für das räumliche und $= 2k$ für das ebene Fachwerk, und besitzt die Nennerdeterminante der Gleichgewichtsbedingungen einen von Null verschiedenen Werth, so ist es möglich, sämmtliche S und C mit Hilfe dieser Gleichungen (oder mittels anderer bequemerer Verfahren, die für das ebene Fachwerk im ersten Bande mitgetheilt worden sind und für das räumliche im dritten Bande folgen werden) als lineare Funktionen der Lasten P darzustellen; sie sind dann unabhängig von den t und δ_w, und das Fachwerk ist ein statisch bestimmtes.

5. — Wird ein Fachwerk durch bestimmte Lasten P beansprucht, bestimmten Temperaturänderungen unterworfen, und erleiden die Stützpunkte bestimmte Verschiebungen, so sagen wir: *das Fachwerk wird von bestimmten Ursachen P, t, δ_w angegriffen*, und sprechen dann kurz von einer *bestimmten Angriffsweise des Fachwerks.*

Erfolgt die Stützung stets in denselben Punkten und in jedem dieser Punkte immer auf dieselbe Art, so nennen wir das Fachwerk ein solches von *unveränderlicher Stützungsart.*

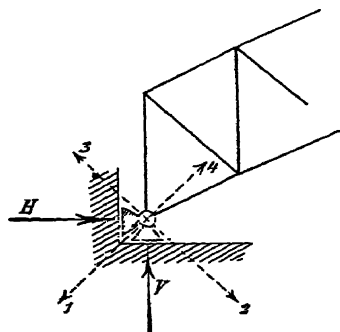



Fig. 2.

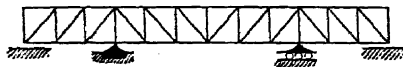



Fig. 3.

Beispiele für *veränderliche Stützungsart* bieten die Figuren 2 bis 4. An dem in Fig. 2 abgebildeten Auflager eines ebenen Fachwerks wirken einer Verschiebung des Stützpunktes in der Richtung des Pfeiles 1 zwei Widerstände V und H entgegen, einer Verschiebung in der Richtung 2 nur ein Widerstand V, einer solchen in der Richtung 3 nur ein Widerstand H, während sich der Punkt w in der Richtung 4 frei bewegen kann.

Der Fachwerkbalken in Fig. 3 wird bei geringer Belastung der Aussenfelder nur in zwei Punkten gestützt und ist dann statisch bestimmt. In Folge kleiner Senkungen der Enden kann er in einen auf vier Stützen ruhenden, mithin zweifach statisch unbestimmten Balken übergehen.

Eine mit der Angriffsweise veränderliche Art der Stützung kann auch durch grössere Reibungswiderstände verursacht werden. Erhält z. B. der in Fig. 4 dargestellte ebene Träger links ein festes und rechts ein bewegliches Auflager, und ist der an dem letzteren auftretende Reibungswiderstand gross genug, um eine Bewegung des Stützpunktes zu hindern, so ist der Träger statisch unbestimmt (Bogen mit zwei Gelenken). Sonst ist er statisch bestimmt, und es darf dann der in der Auflagerbahn wirkende Widerstand $C = fB$ angenommen werden, wo f die Reibungsziffer und B den zur Auflagerbahn rechtwinkligen Widerstand bedeutet. Der Sinn von C ist entgegengesetzt dem Sinne der Verschiebung des Stützpunktes w.

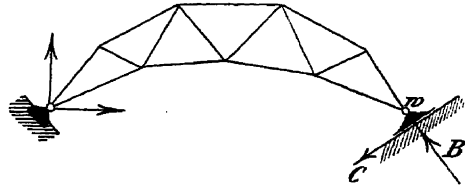



Fig. 4.

Lässt sich ein Fachwerk in Theile zerlegen, welche im Falle unelastischer Stäbe starr wären, und ist die gegenseitige Stützung dieser Theile von unveränderlicher Art, sind ferner sämmtliche Stäbe widerstandsfähig gegen Zug und Druck, so bezeichnen wir das Fachwerk als ein solches von *unveränderlicher Gliederung.*

Ein Beispiel von veränderlicher Gliederung in Folge wechselnder Art der gegenseitigen Stützung einzelner Theile zeigt Fig. 5. Dieselbe stellt zwei durch ein Gelenk G verbundene gegliederte Scheiben eines ebenen Fachwerks dar. Die Scheiben sind so geformt, dass sie sich in Folge einer sehr kleinen, im Sinne der beigefügten Pfeile erfolgenden Drehung in den Punkten m berühren, während sie bei Eintritt einer entgegengesetzten Drehung nur in G aufeinander wirken. Im zweiten Falle sind die beiden Punkte m als zwei verschiedene Knoten zu behandeln, und es ergeben sich für dieselben vier Gleichgewichtsbedingungen. Anderenfalls bilden sie einen einzigen Knotenpunkt, für den sich nur zwei Gleichgewichtsbedingungen aufstellen lassen.

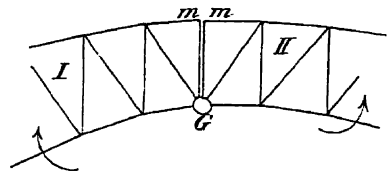



Fig. 5.

Eine veränderliche Gliederung liegt auch vor, wenn das Fachwerk Stäbe besitzt, die nur nach einer Richtung widerstandsfähig sind, die also aus Seilen oder Ketten bestehen und deshalb nur Zugkräfte aufnehmen können, oder die sich mit halbcylindrischen Endflächen gegen die in den Knoten angeordneten Gelenkbolzen stützen und in Folge dessen nur Widerstand gegen Druck leisten.

Das wichtigste Beispiel hierfür ist der im ersten Bande (§ 38) dieses Buches untersuchte Fachwerkbalken mit Gegendiagonalen. Die früher für diesen Träger aufgestellte Theorie ist durch die Bemerkung zu vervollständigen, dass zuweilen in allen oder einzelnen Feldern beide Diagonalen gleichzeitig gespannt werden, und der Träger in Folge dessen statisch unbestimmt wird, dass aber die genaueren Werthe der Spannkräfte von den früher angegebenen stets sehr wenig abweichen und die schärfere Berechnung deshalb unterbleiben darf.

Ein anderes Beispiel führt die Fig. 6 vor. Das hier abgebildete ebene Fachwerk ist im Allgemeinen fünffach statisch unbestimmt, weil es 36 Knotenpunkte und 74 Stäbe besitzt, mithin die Anzahl der Stäbe um 5 grösser ist als die Zahl $2 \cdot 36 - 3 = 69$, wo 3 = Anzahl der an den Widerlagern auftretenden Unbekannten*). Sind die Stäbe 1 bis 9 nur im Stande, Zugkräfte zu übertragen, und wird das Fachwerk so beansprucht, dass die Stäbe 2 und 3 spannungslos werden, so ist es für die fragliche Angriffsweise nur dreifach statisch unbestimmt. Werden auch noch 5, 7, 8 spannungslos, so treten 1, 4, 6, 9 ebenfalls ausser Thätigkeit (weil sonst Gleichgewicht an den Knoten e und f nicht möglich ist) und das Fachwerk geht in ein statisch bestimmtes über.

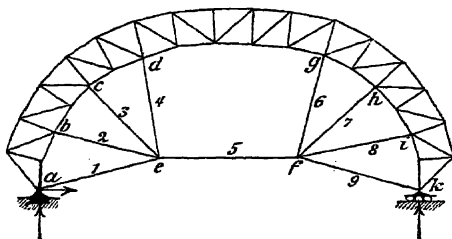



Fig. 6.

Die Untersuchung von Fachwerken mit veränderlicher Gliederung und Stützungsart kann grossen Schwierigkeiten begegnen, da es häufig nicht möglich ist, von vornherein die bei einer bestimmten Angriffsweise in Thätigkeit tretenden einseitig widerstehenden Stäbe zu bezeichnen und die augenblickliche Art der gegenseitigen Stützung einzelner Theile des Fachwerks, sowie die Art der Stützung durch die Widerlager anzugeben, so dass man vielfach auf den Weg des Versuchs angewiesen ist.

6. — Bei einem Fachwerke von unveränderlicher Gliederung und Stützungsart sind die Zahlen k, r, a (vergl. Seite 5), ferner die in der Gleichung (9) auftretenden Werthe $\varkappa$, μ, ν unabhängig von der Angriffsweise. Wirken auf das Fachwerk einmal die Ursachen P', t', δ'_w, hierauf die Ursachen P'', t'', δ''_w, und entspricht den ersteren der Werth Z' der gesuchten Unbekannten, den letzteren der Werth Z'', so ist

$$Z' = \varkappa_1 P'_1 + \varkappa_2 P'_2 + \ldots + \mu_1 t'_1 + \mu_2 t'_2 + \ldots + \nu_1 \delta'_{w1} + \nu_2 \delta'_{w2} + \ldots$$

$$Z'' = \varkappa_1 P''_1 + \varkappa_2 P''_2 + \ldots + \mu_1 t''_1 + \mu_2 t''_2 + \ldots + \nu_1 \delta''_{w1} + \nu_2 \delta''_{w2} + \ldots.$$

Der durch die Ursachen $P = P' + P''$, $t = t' + t''$, $\delta_w = \delta'_w + \delta''_w$ hervorgerufene Werth ist

$$Z = \varkappa_1 (P'_1 + P''_1) + \varkappa_2 (P'_2 + P''_2) + \ldots + \mu_1 (t'_1 + t''_1) + \mu_2 (t'_2 + t''_2) + \ldots + \nu_1 (\delta'_{w1} + \delta''_{w1}) + \nu_2 (\delta'_{w2} + \delta''_{w2}) + \ldots,$$

*) Man darf den Träger auch als ein Gebilde betrachten, welches aus einer statisch bestimmten gegliederten Scheibe und 9 Stäben (1 bis 9) besteht. Dann erhält man nach Seite 230, Band I: $2(g' + 2g'' + 3g''' + \ldots) + r + a = 2 \cdot 0 + 9 + 3 = 12$, ferner $3s + 2k = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$. Wegen $12 - 7 = 5$ ist der Träger fünffach statisch unbestimmt.

und es ergiebt sich somit

$$Z = Z' + Z''.$$

Hieraus folgt, dass es bei der Bestimmung der Spannkräfte S, sowie der nach bestimmten Richtungen wirkenden Auflagerkräfte und der nach bestimmten Richtungen gebildeten Seitenverschiebungen der Knotenpunkte zulässig ist, die Einflüsse der einzelnen auf das Fachwerk wirkenden Ursachen getrennt zu ermitteln und schliesslich zusammen zu zählen — ein sehr wichtiges Gesetz, welches in der Folge *das Gesetz von der Zusammenzählung der einzelnen Wirkungen* genannt werden soll. Dasselbe gilt nur für Fachwerke von unveränderlicher Gliederung und Stützungsart.

Hat man aber bei Untersuchung eines *in bestimmter Weise angegriffenen* Fachwerks mit einseitig widerstehenden Stäben die wirkungslosen Stäbe ausgeschieden, so darf man auf das übrig bleibende Stabgebilde das eben bewiesene Gesetz anwenden. Hierbei dürfen die Einflüsse der einzelnen Ursachen auf die Spannkraft S eines nur gegen $\left\{\begin{matrix}\text{Zug}\\ \text{Druck}\end{matrix}\right\}$ widerstandsfähigen Stabes $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$ ausfallen. Bedingung ist nur, dass sich für die Summe S sämmtlicher Beiträge ein $\left\{\begin{matrix}\text{positiver}\\ \text{negativer}\end{matrix}\right\}$ Werth ergiebt. Auch wenn die Stützungsart veränderlich ist, darf jenes Gesetz — falls eine bestimmte Angriffsweise vorliegt — angewendet werden. Es ist dann zunächst die Art der augenblicklichen Stützung zu ermitteln, und diese Stützungsart muss der Berechnung sämmtlicher einzelnen Wirkungen zu Grunde gelegt werden. Dies gilt sowohl für die Stützung durch die Widerlager, als auch für die gegenseitige Stützung einzelner Theile des Fachwerks.

b. Gesetz der virtuellen Verschiebungen. Arbeitsgleichungen. Clapeyron'sches Gesetz.

7. — Um zu einer sehr einfachen und fruchtbaren Beziehung zwischen den Aenderungen Δs der Stablängen und den von denselben Ursachen herrührenden Verschiebungen der Fachwerksknoten zu gelangen, multipliciren wir die auf Seite 3 abgeleitete Gleichung

$$\Delta s_{ik} = (\Delta x_k - \Delta x_i) \cos \alpha_{ik} + (\Delta y_k - \Delta y_i) \cos \beta_{ik} + (\Delta z_k - \Delta z_i) \cos \gamma_{ik}$$

mit einer Spannkraft, welche im Stabe $i - k$ durch irgend einen *nur gedachten* Belastungszustand des Fachwerks erzeugt sein möge, und die zur Unterscheidung von der *wirklichen* Spannkraft S_{ik} mit $\overline{S}_{ik}$ bezeichnet werden soll. Hierauf stellen wir eine ähnliche Gleichung für jeden Stab auf, addiren alle diese Gleichungen und erhalten:

$$\Sigma \overline{S_{ik}} \Delta s_{ik} = \Sigma \left[\overline{S_{ik}} (\Delta x_k - \Delta x_i) \cos \alpha_{ik} + \overline{S_{ik}} (\Delta y_k - \Delta y_i) \cos \beta_{ik} + \overline{S_{ik}} (\Delta z_k - \Delta z_i) \cos \gamma_{ik} \right],$$

worfür auch geschrieben werden darf:

$$(10) \quad \Sigma \overline{S_{ik}} \Delta s_{ik} = - \Sigma \left[(\overline{S_{ik}} \cos \alpha_{ik} \Delta x_i + \overline{S_{ik}} \cos \beta_{ik} \Delta y_i + \overline{S_{ik}} \cos \gamma_{ik} \Delta z_i) + \overline{S_{ki}} \cos \alpha_{ki} \Delta x_k + \overline{S_{ki}} \cos \beta_{ki} \Delta y_k + \overline{S_{ki}} \cos \gamma_{ki} \Delta z_k) \right],$$

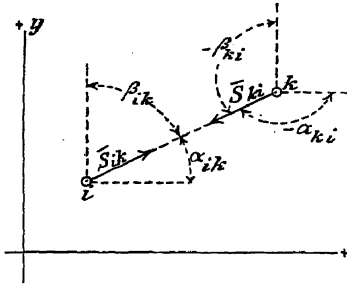



Fig. 7.

denn es ist $\cos \alpha_{ki} = - \cos \alpha_{ik}$, $\cos \beta_{ki} = - \cos \beta_{ik}$, $\cos \gamma_{ki} = - \cos \gamma_{ik}$, hingegen $\overline{S_{ki}} = \overline{S_{ik}}$. Man vergleiche die auf ein ebenes Fachwerk sich beziehende Figur 7, in welcher die $\overline{S}$ als Kräfte aufgefasst worden sind, welche an den Knotenpunkten angreifen, also den weggenommenen Stab ik ersetzen.

Das Bildungsgesetz der rechten Seite der Gleichung (10) lässt sich wie folgt aussprechen: Man zerlege die in i wirkende Kraft $\overline{S_{ik}}$ in die den Achsen x, y, z parallelen Seitenkräfte $\overline{S_{ik}} \cos \alpha_{ik}$, $\overline{S_{ik}} \cos \beta_{ik}$, $\overline{S_{ik}} \cos \gamma_{ik}$, multiplicire diese Kräfte der Reihe nach mit den Seitenverschiebungen Δx_i, Δy_i, Δz_i ihres Angriffspunktes i, verfahre in gleicher Weise mit sämmtlichen Kräften $\overline{S}$ und addire alle diese Produkte. Ordnet man nun die so erhaltene Summe nach den Knotenpunkten und bezeichnet die Ordnungsziffer eines beliebigen Knotens mit m, so gelangt man (wenn man auf der linken Seite den jetzt entbehrlichen Zeiger ik fortlässt) zu der Gleichung

$$(11) \quad \Sigma \overline{S} \Delta s = - \Sigma (\Delta x_m \Sigma_m \overline{S} \cos \alpha + \Delta y_m \Sigma_m \overline{S} \cos \beta + \Delta z_m \Sigma_m \overline{S} \cos \gamma),$$

in welcher sich die Summen $\Sigma_m \overline{S} \cos \alpha$, $\Sigma_m \overline{S} \cos \beta$, $\Sigma_m \overline{S} \cos \gamma$ über alle in m angreifenden Spannkräfte $\overline{S}$ erstrecken.

Die äusseren Kräfte des *gedachten* Belastungszustandes sollen (damit sie von den in Wirklichkeit auftretenden äusseren Kräften Q_m unterschieden werden) mit $\overline{Q_m}$ bezeichnet werden; sie mögen mit den Achsen x, y, z die Winkel $\overline{\xi_m}$, $\overline{\eta_m}$, $\overline{\zeta_m}$ einschliessen. *Hinsichtlich der Kräfte $\overline{Q}$ und $\overline{S}$ wird nur vorausgesetzt, dass sie miteinander im Gleichgewichte sind.* Für den Knotenpunkt m erhält man die Bedingungen:

$$(12) \quad \begin{cases} \overline{Q_m} \cos \overline{\xi_m} + \Sigma_m \overline{S} \cos \alpha = 0 \\ \overline{Q_m} \cos \overline{\eta_m} + \Sigma_m \overline{S} \cos \beta = 0 \\ \overline{Q_m} \cos \overline{\zeta_m} + \Sigma_m \overline{S} \cos \gamma = 0, \end{cases}$$

und es lässt sich nun (11) umformen in:

$$\Sigma \overline{Q_m} (\Delta x_m \cos \overline{\xi_m} + \Delta y_m \cos \overline{\eta_m} + \Delta z_m \cos \overline{\zeta_m}) = \Sigma \overline{S} \Delta s.$$

Diese Gleichung kann man aber noch kürzer fassen, wenn man beachtet, dass die Projektion δ_m der wirklichen Verschiebung mm' des Knotens m auf die Richtung der gedachten Kraft $\overline{Q_m}$ durch die Formel

$$\delta_m = \Delta x_m \cos \overline{\xi_m} + \Delta y_m \cos \overline{\eta_m} + \Delta z_m \cos \overline{\zeta_m}$$

bestimmt ist. Es ergiebt sich dann die Gleichung:

$$\Sigma \overline{Q_m} \delta_m = \Sigma \overline{S} \Delta s, \tag{13}$$

in welche die Verschiebung δ_m als positive oder negative Grösse einzuführen ist, je nachdem sie denselben oder den entgegengesetzten Sinn hat wie die Kraft $\overline{Q_m}$.

Fig. 8.

Das Produkt $\overline{Q_m}\,\delta_m$ lässt sich als diejenige mechanische Arbeit deuten, welche die Kraft $\overline{Q_m}$ verrichtet, wenn ihr Angriffspunkt m im Sinne von $\overline{Q_m}$ um die Strecke δ_m verschoben wird. Um nun auszudrücken, dass diese Verschiebung durch Ursachen erzeugt wird, welche von den Kräften $\overline{Q}$ ganz unabhängig sind, bezeichnet man δ_m als eine *virtuelle Verschiebung des Angriffspunktes m der Kraft* $\overline{Q_m}$ und nennt das Produkt $\overline{Q_m}\delta_m$ die *virtuelle Arbeit der Kraft* $\overline{Q_m}$. Ebenso bezeichnet man den Ausdruck $(-\overline{S_{ik}}\Delta s_{ik})$ als die virtuelle Arbeit der beiden in den Knotenpunkten i und k angreifenden, gegen einander gerichteten Kräfte $\overline{S_{ik}}$ (Fig. 7) und Δs_{ik} als die gegenseitige virtuelle Verschiebung ihrer Angriffspunkte.

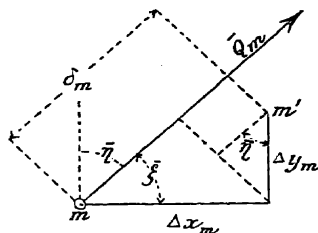
Die Gleichung

$$\Sigma \overline{Q_m} \delta_m - \Sigma \overline{S} \Delta s = 0$$

drückt demnach den unter dem Namen *Princip der virtuellen Geschwindigkeiten* (oder besser: *Gesetz der virtuellen Verschiebungen*) bekannten Satz aus:

> *Die Summe der virtuellen Arbeiten sämmtlicher in den Knotenpunkten angreifenden äusseren und inneren Kräfte $\overline{Q}$ und $\overline{S}$ ist im Falle einer verschwindend kleinen Formveränderung des Fachwerks gleich Null.*

Dieser Satz ist zuerst von *Mohr* zur Berechnung des Fachwerks benutzt worden.

Man nennt auch das Produkt $(+\overline{S_{ik}}\Delta s_{ik})$ die *virtuelle Formänderungsarbeit* des durch die beiden Kräfte $\overline{S_{ik}}$ beanspruchten Stabes s_{ik} und den Ausdruck $\Sigma \overline{S} \Delta s$ die virtuelle Formänderungsarbeit des Fachwerks. Die Gleichung (13) sagt also aus: *dass die virtuelle Arbeit der äusseren Kräfte ebenso gross ist wie die virtuelle Formänderungsarbeit des Fachwerks.*

Die Anwendung dieses Gesetzes auf den wirklichen Belastungszustand und den wirklichen Formänderungszustand liefert die Gleichung:

$$(14) \qquad \Sigma Q_m \delta_m = \Sigma S \Delta s,$$

in welcher jetzt δ_m die Projektion des wirklichen Weges des Knotens m auf die Richtung von Q_m bedeutet.

Wir werden die Gleichungen (13) und (14) auch als *Arbeitsbedingungen* oder *Arbeitsgleichungen* bezeichnen und z. B. die am häufigsten benutzte Gleichung (13) kurz die *Arbeitsgleichung für den Belastungszustand* $(\overline{Q})$ nennen, wobei wir dann stillschweigend voraussetzen, dass es sich um den wirklichen Verschiebungszustand handelt.

8. — Für die Folge ist es wichtig, die von den äusseren Kräften Q verrichtete mechanische Arbeit A zu bestimmen, und zwar für den Fall, dass das anfangs spannungslose Fachwerk keinen Temperaturänderungen unterworfen wird.

Die äusseren und inneren Kräfte wachsen allmählich von Null bis zu ihren Endwerthen Q und S an. Sind Q_x, S_x gleichzeitige Zwischenwerthe dieser Kräfte, und nehmen in dem Augenblicke, in welchem die Q_x und S_x wirken, die Verschiebungen δ und Δs um $d\delta$ und $d(\Delta s)$ zu, so ist nach (13):

$$\Sigma Q_x d\delta = \Sigma S_x d\Delta s,$$

und diese Gleichung gilt für jedes der unendlich kleinen Zeittheilchen, in welche sich die ganze Bewegungsdauer zerlegen lässt. Hieraus folgt aber $\left(\text{mit } \Delta s = \frac{Ss}{EF}\right)$:

$$(15) \quad \Sigma \int_0^Q Q_x d\delta = \Sigma \int_0^S S_x d\Delta s = \Sigma \int_0^S S_x \frac{dS_x s}{EF} = \Sigma \frac{S^2 s}{2\,EF} = \frac{1}{2} \Sigma S \Delta s.$$

Da nun nach (14)

$$\tfrac{1}{2} \Sigma S \Delta s = \tfrac{1}{2} \Sigma Q_m \delta_m$$

ist, so erhält man für die gesuchte Arbeit $A = \Sigma \int_0^Q Q_x d\delta$ den Ausdruck:

$$(16) \qquad A = \tfrac{1}{2} \Sigma Q_m \delta_m$$

und gelangt zu dem zuerst von *Clapeyron* bewiesenen Gesetze:

> *Wird ein anfänglich spannungsloses Fachwerk, dessen Temperatur sich in keinem Punkte ändert, von äusseren Kräften ergriffen, welche allmählich von Null aus anwachsen, so ist die mechanische Arbeit der äusseren Kräfte unabhängig von dem Gesetze, nach welchem diese Kräfte zunehmen und auch unabhängig von der Reihenfolge, in der die äusseren Kräfte am Fachwerke*

angebracht werden; sie ist stets halb so gross, als wenn sämmtliche Kräfte Q während der ganzen Formänderung ihre Endwerthe hätten.

c. Anwendung der Gleichung $\Sigma \overline{Q}\delta = \Sigma \overline{S}\Delta s$ auf statisch bestimmte Fachwerke.

9. — Die Aenderungen Δs der Stablängen s eines statisch bestimmten Fachwerks seien bekannt; auch seien die durch Nachgeben der elastischen Widerlager entstandenen Verschiebungen der Stützpunkte gegeben. Zu lösen seien folgende Aufgaben:

1. Aufgabe. Gesucht ist die Strecke δ_m, um welche sich die Entfernung zweier Knotenpunkte m und m_1 ändert.

Man nehme in m und m_1 zwei entgegengesetzt gleiche, zusammenfallende Kräfte von der Grösse *Eins* an (Fig. 9) und wähle den Sinn derselben so, dass sie in Folge der Vergrösserung der Entfernung mm_1 um δ_m die positive virtuelle Arbeit $1 \cdot \delta_m$ verrichten. Hierauf bestimme man mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen die von jenen Kräften erzeugten Stützenwiderstände $\overline{C}$ und Spannkräfte $\overline{S}$ und schreibe für diesen *gedachten* Belastungszustand die

Fig. 9.

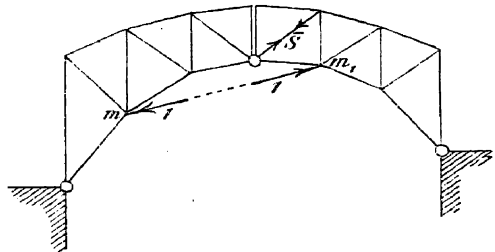
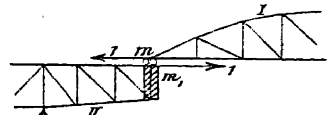
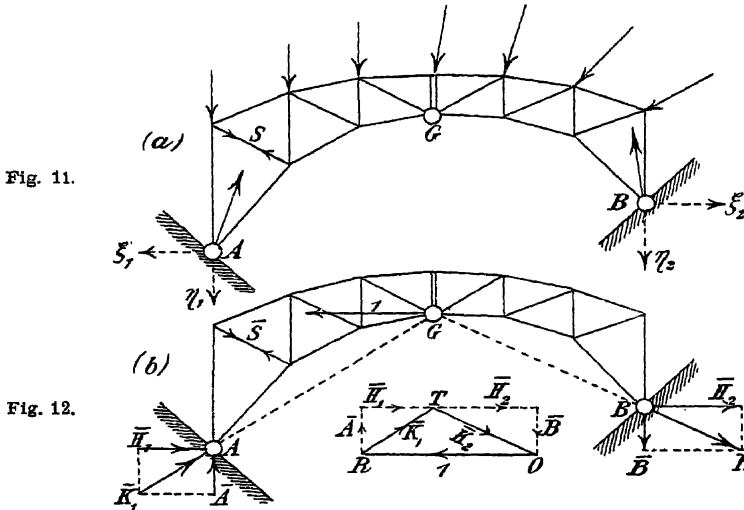
Arbeitsgleichung $\Sigma \overline{Q}\delta = \Sigma \overline{S}\Delta s$ an. Bezeichnet man die virtuelle Arbeit der Kräfte $\overline{C}$ mit $\overline{L}$, so erhält man die Gleichung

$$(17) \qquad 1 \cdot \delta_m + \overline{L} = \Sigma \overline{S}\Delta s,$$

aus welcher sich δ_m unmittelbar berechnen lässt.

Die beiden in m und m_1 angreifenden Kräfte *Eins* mögen (nach *Mohr*) die *Belastungseinheit des Punktpaares m, m_1* genannt werden und δ_m die *gegenseitige Verschiebung des Punktpaares m, m_1*. Ist m_1 ein ausserhalb des Fachwerks liegender fester Punkt, so giebt die Gleichung (17)

Fig. 10.

die Verschiebung δ_m des Knotens m im Sinne $m_1 m$ an d. i. die Projektion des Weges des Knotens m auf die Richtung $m_1 m$. (Fig. 10 veranschaulicht den Fall zweier anfänglich senkrecht übereinander liegender Punkte m, m_1; sie stellt einen Theil eines *Gerber'*schen Balkens vor, dessen schwebender Theil (I) bei m ein bewegliches Auflager erhält.)

Es sei beispielsweise die Aufgabe gestellt, für den in der Figur 11 angegebenen Belastungszustand eines Bogenträgers mit drei Gelenken die wagerechte Verschiebung δ_h des Scheitelgelenkes G zu berechnen. In Folge der Elasticität der Widerlager mögen sich die Kämpfergelenke A und B in wagerechter Richtung um ξ_1 beziehungsweise ξ_2 verschieben und in senkrechter Richtung um η_1 bezw. η_2. Die Richtungen dieser Verschiebungen sind in Fig. 11 durch gestrichelte Pfeile angedeutet worden. Es sollen Temperaturveränderungen berücksichtigt werden. Dann ist $\Delta s = \frac{Ss}{EF} + \varepsilon ts$, welcher Werth nach Ermittelung der *wirklichen* Spannkräfte S für jeden Stab des Fachwerks berechnet wird. Fig. 12 giebt den *gedachten* Belastungszustand an.

Die Verschiebung δ_h soll nach links positiv gezählt werden, und es wurde daher in G eine nach links gerichtete Last *Eins* angenommen; diese ruft Kämpferdrücke $\overline{K}_1$ und $\overline{K}_2$ hervor, welche beziehungsweise die Richtungen AG und GB haben und durch das Kräftedreieck ORT bestimmt sind. Ihre wagerechten und senkrechten Seitenkräfte seien $= \overline{H}_1$, $\overline{H}_2$, $\overline{A}$, $\overline{B}$. Die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte ist dann:

$$\overline{L} = -\overline{A}\eta_1 - \overline{H}_1\xi_1 + \overline{B}\eta_2 + \overline{H}_2\xi_2;$$

denn die Kräfte $\overline{A}$, $\overline{H}_1$ haben den entgegengesetzten Sinn wie die Verschiebungen η_1, ξ_1, während $\overline{B}$, $\overline{H}_2$ von gleichem Sinne sind wie die Verschiebungen η_2, ξ_2. Die Bedingung:

$$1 \cdot \delta_h + \overline{L} = \Sigma \overline{S} \Delta s \text{ liefert}$$

$$\delta_h = \Sigma \overline{S}\left(\frac{Ss}{EF} + \varepsilon ts\right) + \overline{A}\eta_1 + \overline{H}_1\xi_1 - \overline{B}\eta_2 - \overline{H}_2\xi_2.$$

In gleicher Weise kann man die senkrechte Verschiebung δ_v des Scheitelgelenkes G bestimmen und hierauf δ_h und δ_v zur Gesammtverschiebung des Punktes G zusammensetzen.

2. *Aufgabe.* Es wird die Aenderung δ_m des Winkels φ gesucht, welchen die beiden durch die Knotenpunkte i, k bezw. i_1, k_1 bestimmten Geraden (m) und (m_1) eines ebenen Fachwerks miteinander bilden. Fig. 13.

Um δ_m zu erhalten, wird die Gleichung $\Sigma \overline{Q} \delta = \Sigma \overline{S} \Delta s$ auf den in der Figur 13 dargestellten *gedachten Belastungszustand* und den

Fig. 13.

wirklichen Verschiebungszustand angewendet. In i und k sind zwei zur Geraden (m) rechtwinklige, entgegengesetzt gleiche Kräfte von der Grösse $\frac{1}{e}$ *) angenommen worden, und in i_1 und k_1 zwei zur Geraden (m_1) rechtwinklige, entgegengesetzt gleiche Kräfte $\frac{1}{e_1}$. Der Sinn dieser Kräfte wurde so gewählt, dass die beiden Kräftepaare (deren Momente gleich $\frac{1}{e} e = 1$ und gleich $\frac{1}{e_1} e_1 = 1$ sind) in Folge Vergrösserung des Winkels φ um δ_m die positive Arbeit $1 \cdot \delta_m$ verrichten. Der Werth dieser Arbeit ergiebt sich aus der folgenden Betrachtung.

Fig. 14.

Dreht sich eine unbegrenzte Gerade (m), welche die Angriffspunkte i und k eines zur (m) rechtwinkligen Kräftepaares enthält (Fig. 14)

*) $\frac{1}{e} = 1 \frac{1}{e} = \text{Krafteinheit} \times \frac{\text{Längeneinheit}}{e}$.

um den verschwindend kleinen Winkel τ in die Lage (m'), und sind i', k' die schliesslichen Lagen von i, k, so nehme man, behufs Bestimmung der Arbeit des Kräftepaares, zunächst an, dass i und k die Kreisbogentheilchen ii'' und kk'' beschreiben, deren gemeinsamer Mittelpunkt der Schnittpunkt von (m) und (m') ist. Hierauf verschiebe man i'' und k'' in die Lagen i' und k'. Während des ersten Theiles dieser verschwindend kleinen Bewegung verrichtet das Kräftepaar, dessen Moment $M = Qe$ sein möge, die Arbeit $Q\overline{ii''} - Q\overline{kk''} = Qe\tau = M\tau$, und während des zweiten Theiles ist die geleistete Arbeit $= 0$, weil die Verschiebungen $i''i'$ und $k''k'$ rechtwinklig zu Q sind. Mithin giebt $M\tau$ die Gesammtarbeit des Kräftepaares an. Drehen sich also die Geraden (m) und (m_1) der Figur 13 im Sinne der in i und k beziehungsweise in i_1 und k_1 angreifenden Kräftepaare (deren Momente $= 1$ sind) um die Winkel τ und τ_1, so ist, wegen $\tau + \tau_1 = \delta_m$, die von beiden Paaren verrichtete Arbeit $= 1 \cdot \tau + 1 \cdot \tau_1 = 1\,\delta_m$, wobei δ_m als Bogenlänge für den Halbmesser 1 aufzufassen ist.

Bezeichnet man nun die virtuelle Arbeit der von den beiden Kräftepaaren etwa erzeugten Stützenwiderstände mit $\overline{L}$ und die Spannkräfte des gedachten Belastungszustandes mit $\overline{S}$, so ergiebt sich zur Bestimmung von δ_m die mit (17) der Form nach übereinstimmende Gleichung:

$$\delta_m + \overline{L} = \Sigma \overline{S} \Delta s .$$

Sind i_1 und k_1 zwei ausserhalb des Fachwerks gelegene feste Punkte, so liefert die vorstehende Gleichung den Drehungswinkel δ_m der Geraden m.

Die Aenderung δ_m des Winkels φ in Figur 13 nennen wir die *gegenseitige Drehung des Geradenpaares* (m) (m_1) und die vier in i, k, i_1, k_1 angreifenden Kräfte $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e_1}\right)$ fassen wir unter dem Namen *Belastungseinheit des Geradenpaares* (m) (m_1) zusammen. Es entsprechen diese Begriffe den auf Seite 13 erklärten, auf das Punktpaar m, m_1 sich beziehenden.

10. — Bei Lösung der beiden in No. 9 vorgeführten Aufgaben ist nach folgender Regel verfahren worden. Um die Verschiebung bezw. Drehung δ_m zu bestimmen, wurde das Fachwerk so belastet gedacht, dass die angenommenen Lasten zusammen die virtuelle Arbeit $1 \cdot \delta_m$ verrichten. Auf diesen gedachten Belastungszustand und auf den wirklichen Verschiebungszustand wurde die Bedingung $\Sigma \overline{Q} \delta_m = \Sigma \overline{S} \Delta s$ angewendet und eine Gleichung erhalten, aus welcher sich δ_m unmittelbar berechnen liess.

Nach dieser Regel lassen sich nun die verschiedenartigsten Aufgaben lösen.

Soll beispielsweise für ein ebenes Fachwerk die Aenderung δ_m der in bestimmter Richtung gemessenen Entfernung mf eines Knotens m von einer durch zwei Knoten i und k gehenden Geraden (m_1) ermittelt werden, so denke man das Fachwerk auf die in Fig. 15 an-

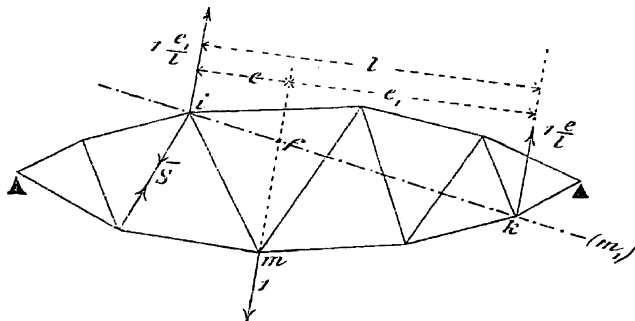



Fig. 15.

gegebene Weise belastet. Die in m angenommene Last *Eins* hat die Richtung fm; die ihr parallelen, in i und k wirksamen Kräfte $1\,\frac{e_1}{l}$ und $1\,\frac{e}{l}$ besitzen eine mit der Geraden mf zusammenfallende, von m nach f gerichtete Mittelkraft von der Grösse *Eins*. Die gesammte virtuelle Arbeit dieser drei Lasten ist $= 1 \cdot \delta_m$, und es ergiebt sich daher nach Berechnung der von diesen Lasten hervorgerufenen Spannkräfte $\overline{S}$ und Stützenwiderstände (welche letztere die Arbeit $\overline{L}$ verrichten mögen) die Arbeitsbedingung:

$$1 \cdot \delta_m + \overline{L} = \Sigma \overline{S} \Delta s,$$

welche dieselbe Form hat wie die Gleichung (17).

Noch verschiedenartiger sind die bei räumlichen Fachwerken zu stellenden und mit Hilfe der oben angegebenen Regel lösbaren Aufgaben. Wir begnügen uns damit, eine derselben anzuführen. Es sei die Aenderung der Länge des Lothes gesucht, welches von einem Knotenpunkte m auf die durch irgend drei Knotenpunkte h, i, k bestimmte Ebene $[m_1]$ gefällt ist und dessen Fusspunkt f sein möge. Man nehme in m eine von f nach m gerichtete Last *Eins* an, ferner drei in h, i, k angreifende, zur Ebene $[m_1]$ rechtwinklige Lasten, deren Mittelkraft in die Gerade mf fällt, von m nach f gerichtet ist und die Grösse *Eins* besitzt. Die Gesammtarbeit der vier Lasten ist dann $= 1 \cdot \delta_m$, und das oben angegebene Verfahren ermöglicht wieder die unmittelbare Berechnung von δ_m.

d. Anwendung der Gleichung $\Sigma \overline{Q} \delta = \Sigma \overline{S} \Delta s$ auf statisch unbestimmte Fachwerke.

11. — Wir leiten die Berechnung der statisch unbestimmten Fachwerke durch Lösung einer einfachen Aufgabe ein, wenden aber hierbei ein ganz allgemeines, stets zum Ziele führendes Verfahren an.

Es soll der in Fig. 16 dargestellte, über drei Oeffnungen gespannte, ebene Bogenträger untersucht werden. Bei A und D sind feste, bei B und C bewegliche Auflagergelenke angeordnet. In den

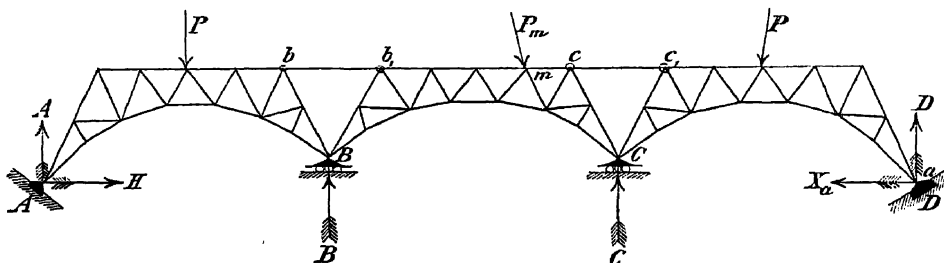



Fig. 16.

auf wagerechten Geraden geführten Stützpunkten B und C greifen senkrechte Widerstände B und C an. Die senkrechten und wagerechten Seitenkräfte der in A und D wirksamen Auflagerkräfte seien A und H, beziehungsweise D und X_a.

Die Anzahl der an den Auflagern auftretenden unbekannten Kräfte ist $= 6$, die Anzahl der Stäbe $= 83$, diejenige der Knotenpunkte $= 43$. Da $6 + 83 > 2 \cdot 43$ ist, so ist das Fachwerk nach Seite 230, Band I statisch unbestimmt, und zwar ist es dreifach statisch unbestimmt, weil $6 + 83 - 2 \cdot 43 = 3$ ist*). Werden drei der zu berechnenden Unbekannten zunächst als gegeben angenommen, z. B. die Auflagerkraft X_a (deren Angriffspunkt die Ordnungsziffer a erhalten möge) und die Spannkräfte X_b und X_c der beiden Stäbe bb_1 und cc_1, so lassen sich die übrigen Spannkräfte und Auflagerkräfte mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen eindeutig berechnen. Zu diesem Zwecke wird das Fachwerk durch Beseitigung der beiden Stäbe bb_1 und cc_1 und durch Umwandlung des festen Auflagergelenkes D in ein auf wagerechter Bahn verschiebbares statisch bestimmt gemacht, und hierauf werden, damit der Spannungszustand des Fachwerks ungeändert bleibt, die Spannkräfte X_b, X_c der beseitigten Stäbe als äussere Kräfte wieder hinzugefügt. Auch wird

*) Man kann den Träger auch in drei gegliederte Scheiben und 2 Stäbe (bb_1 und cc_1) zerlegen und Gleichung III Seite 230, Band I anwenden.

in a die wagerechte Kraft X_a angebracht. Fig. 17. *Die Kräfte X_a, X_b, X_c in Fig. 17 werden vorübergehend zu den Lasten gerechnet.*

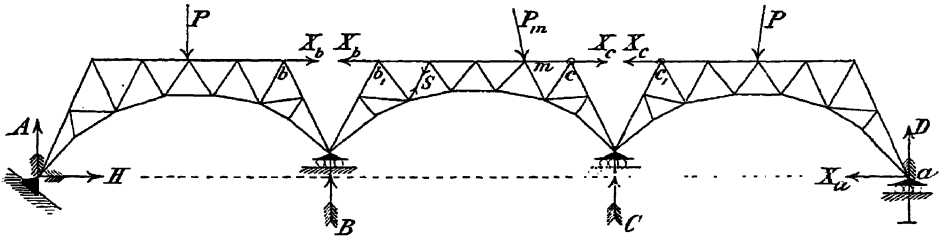



Fig. 17.

Das in Fig. 17 dargestellte statisch bestimmte Fachwerk nennen wir das *Hauptnetz* des fraglichen Trägers; seine Stäbe heissen die *Hauptstäbe* oder auch die *nothwendigen Stäbe*, während bb_1 und cc_1 in Fig. 16 *überzählige Stäbe* genannt werden. In gleicher Weise unterscheidet man *nothwendige und überzählige Auflagerkräfte.* Eine überzählige Auflagerkraft ist X_a in Fig. 16.

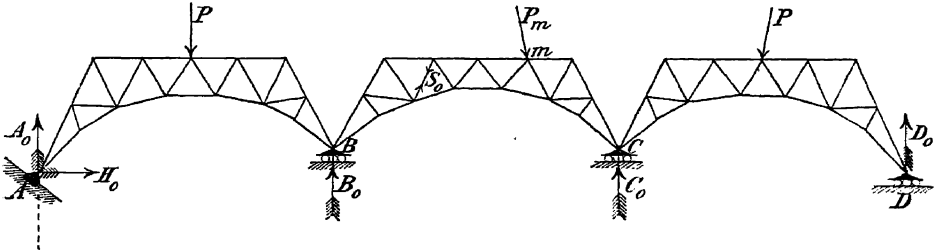



Fig 18.

Die Spannkraft S in irgend einem Hauptstabe ist, da sämmtliche Gleichgewichtsbedingungen vom ersten Grade sind, eine lineare Funktion der Kräfte P, X_a, X_b, X_c; sie lässt sich in der Form darstellen:

$$S = S_0 - S_a X_a - S_b X_b - S_c X_c, \tag{18}$$

worin S_a, S_b, S_c sowohl von den Lasten P als auch von den Kräften X unabhängig sind, während S_0 eine Funktion ersten Grades der gegebenen Lasten P ist. Die Werthe S_0, S_a, S_b, S_c können wie folgt gedeutet werden.

Das Glied S_0 stellt diejenige Spannkraft vor, welche in dem fraglichen Stabe entsteht, sobald X_a, X_b, X_c gleich Null angenommen werden, sobald also nur die Lasten P auf das Hauptnetz wirken, ein Belastungszustand, welcher in Fig. 18 dargestellt worden ist und in der Folge kurz der „*Zustand* $X = 0$“ heissen möge.

S_a darf als diejenige Spannkraft aufgefasst werden, welche in dem fraglichen Stabe erzeugt wird, sobald sämmtliche Lasten P und ebenso die Grössen X_b, X_c gleich Null angenommen werden, während $X_a = -1$ gesetzt wird. Dieser Belastungszustand möge der „*Zustand* $X_a = -1$" heissen; er ist in der Fig. 19 angegeben worden. Die im Punkte a

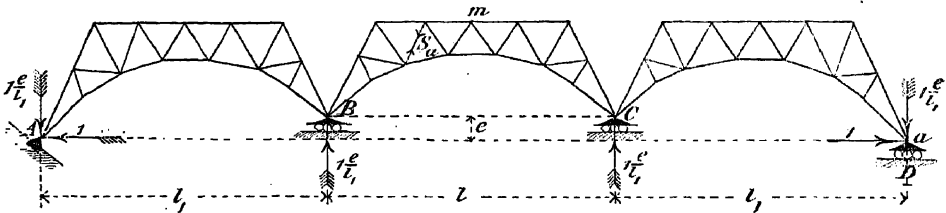



Fig. 19

angreifende wagerechte *Last* $X_a = -1$ ruft an den Auflagern des Hauptnetzes Widerstände hervor, über deren Grösse die Fig. 19 Aufschluss giebt. (Der bei A erzeugte Widerstand muss die Richtung BA und eine wagerechte Seitenkraft von der Grösse 1 haben; seine senkrechte Seitenkraft besitzt deshalb die Grösse $1\,\dfrac{e}{l_1}$. Ebenso schliesst man auf den senkrechten Widerstand bei D und findet dann die in B und C angreifenden Auflagerkräfte.)

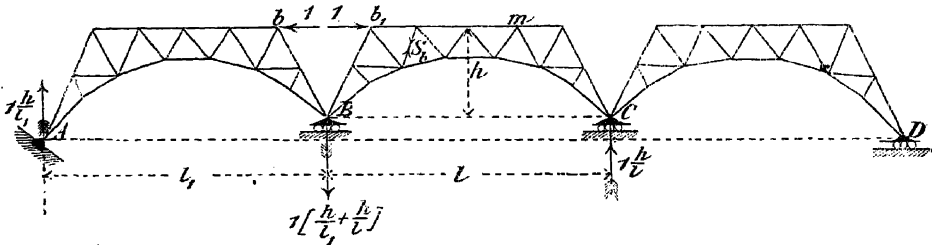



Fig. 20.

In gleicher Weise können S_b und S_c als die den Belastungszuständen: $X_b = -1$ und $X_c = -1$ entsprechenden Spannkräfte betrachtet werden. Diese beiden Zustände sind in den Figuren 20 und 21 dargestellt worden. Grösse und Richtung der Auflagerkräfte sind den Figuren zu entnehmen. Im Belastungsfalle Fig. 20 sind die Stäbe des Theiles CD spannungslos, im Belastungsfalle Fig. 21 diejenigen des Theiles AB.

Alle diese Spannkräfte S_0, S_a, S_b, S_c lassen sich mit Hilfe der im ersten Bande unseres Buches entwickelten Verfahren bestimmen, worauf S

gegeben ist durch Gleichung (18), während für die nothwendigen Auflagerkräfte A, B, C, H die folgenden Werthe gefunden werden:

$$
(19) \quad \begin{cases}
A = A_0 + X_a \dfrac{e}{l_1} - X_b \dfrac{h}{l_1} \text{*)} \\
B = B_0 - X_a \dfrac{e}{l_1} + X_b \left(\dfrac{h}{l_1} + \dfrac{h}{l}\right) - X_c \dfrac{h}{l} \\
C = C_0 - X_a \dfrac{e}{l_1} - X_b \dfrac{h}{l} + X_c \left(\dfrac{h}{l_1} + \dfrac{h}{l}\right) \\
D = D_0 + X_a \dfrac{e}{l_1} - X_c \dfrac{h}{l_1} \\
H = H_0 + X_a .
\end{cases}
$$

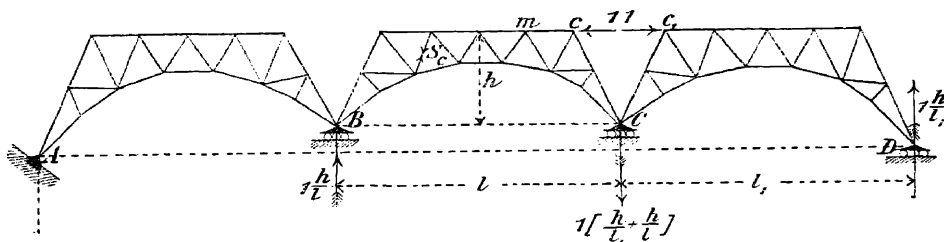



Fig. 21.

Die Aufgabe der Berechnung des Fachwerks ist jetzt auf diejenige zurückgeführt: „*die statisch nicht bestimmbaren Grössen X_a, X_b, X_c zu ermitteln*“, und diese Aufgabe kann man in einfacher Weise lösen, indem man die Arbeitsbedingung $\Sigma \overline{Q} \delta = \Sigma \overline{S} \Delta s$ der Reihe nach auf die drei gedachten Belastungszustände: $X_a = -1$; $X_b = -1$; $X_c = -1$ und — in allen drei Fällen — auf den wirklichen Verschiebungszustand anwendet. Man gelangt dann zu drei Gleichungen ersten Grades, welche nur die Unbekannten X_a, X_b, X_c enthalten.

Nehmen wir an, dass sich in Folge der Nachgiebigkeit der Widerlager

Stützpunkt A in senkrechter Richtung um δ_A nach abwärts verschiebt,
" A " wagerechter " " δ_H " links,
" B " senkrechter " " δ_B " abwärts,
" C " " " " δ_C " "
" D " " " " δ_D " "
" D " wagerechter " " δ_a " rechts,

so lautet die Arbeitsgleichung für den Zustand $X_a = -1$ (Fig. 19):

*) Den Zuständen $X_a = -1$; $X_b = -1$; $X_c = -1$ müssen entsprechen: $A = -\frac{e}{l_1}$; $A = +\frac{h}{l_1}$; $A = 0$. Vergl. Fig. 19, 20, 21. Auf dieselbe Weise prüfe man die Ausdrücke für B, C, D, H.

$$\text{(I)} \qquad L_a + 1 \cdot \delta_a = \Sigma S_a \Delta s, \text{ wobei}$$

$$L_a = 1 \frac{e}{l_1} (\delta_A - \delta_B - \delta_C + \delta_D) + 1 \cdot \delta_H$$

die virtuelle Arbeit der an den Auflagern des statisch bestimmten Hauptnetzes angreifenden Stützenwiderstände bedeutet.

Für den Zustand $X_b = -1$ ergiebt sich, wenn δ_b die Aenderung der Länge s_b des überzähligen Stabes bb_1 bezeichnet:

$$\text{(II)} \qquad L_b + 1 \cdot \delta_b = \Sigma S_b \Delta s, \text{ wo}$$

$L_b = -1 \frac{h}{l_1} \delta_A + 1 \left(\frac{h}{l_1} + \frac{h}{l}\right) \delta_B - 1 \frac{h}{l} \delta_C =$ virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte, und für den Zustand $X_c = -1$ (wenn $\delta_c =$ Aenderung der Stablänge $cc_1 = s_c$):

$$\text{(III)} \qquad L_c + 1 \cdot \delta_c = \Sigma S_c \Delta s, \text{ wo}$$

$$L_c = -1 \frac{h}{l} \delta_B + 1 \left(\frac{h}{l_1} + \frac{h}{l}\right) \delta_C - 1 \frac{h}{l_1} \delta_D.$$

Wird $\Delta s = \frac{Ss}{EF} + \varepsilon t s$ gesetzt und zur Abkürzung die Bezeichnung

$$\rho = \frac{s}{EF}$$

eingeführt, so gehen mit Berücksichtigung von (18) die Gleichungen (I), (II), (III) über in:

$$(20) \begin{cases} L_a + \delta_a = \Sigma S_a S_0 \rho - X_a \Sigma S_a^2 \rho - X_b \Sigma S_a S_b \rho - X_c \Sigma S_a S_c \rho + \Sigma S_a \varepsilon t s \\ L_b + \delta_b = \Sigma S_b S_0 \rho - X_a \Sigma S_b S_a \rho - X_b \Sigma S_b^2 \rho - X_c \Sigma S_b S_c \rho + \Sigma S_b \varepsilon t s \\ L_c + \delta_c = \Sigma S_c S_0 \rho - X_a \Sigma S_c S_a \rho - X_b \Sigma S_c S_b \rho - X_c \Sigma S_c^2 \rho + \Sigma S_c \varepsilon t s. \end{cases}$$

Die auf der rechten Seite stehenden Summen erstrecken sich über sämmtliche nothwendigen Stäbe.

Bezeichnet man nun mit F_b, F_c die Querschnitte der beiden überzähligen Stäbe, mit E_b, E_c die Elasticitätsziffern, mit t_b, t_c die Temperaturänderungen, und mit ε_b, ε_c die Verlängerungsverhältnisse für $t = 1^0$, so hat man in die Gleichungen (20) zu setzen:

$$(21) \qquad \delta_b = \frac{X_b s_b}{E_b F_b} + \varepsilon_b t_b s_b; \qquad \delta_c = \frac{X_c s_c}{E_c F_c} + \varepsilon_c t_c s_c,$$

und ist jetzt im Stande, die Unbekannten X_a, X_b, X_c zu berechnen, vorausgesetzt, dass die Formänderungen der Stützen bekannt oder als Funktionen der X darstellbar sind. Dass die letztere Aufgabe meistens auf unüberwindliche Schwierigkeiten stösst, wurde bereits auf Seite 4 angeführt und begründet. In Folge dessen begnügt man sich in der Regel damit, bei der Untersuchung neuer Arten statisch unbestimmter Träger festzustellen, welchen Einfluss die gegenseitigen Verschiebungen der Stützpunkte auf den Spannungszustand des Trägers ausüben. Ist dieser Einfluss ein wesentlicher und schädlicher, so dürfen die fraglichen

Träger nur dann ausgeführt werden, wenn auf nahezu unverschiebliche Stützen gerechnet werden darf; sie sind z. B. bei unsicherem Baugrunde zu verwerfen; auch ist in diesem Falle bei der Aufstellung der Träger besonders darauf zu achten, dass die Stützpunkte genau die in der Rechnung vorausgesetzte Lage erhalten.

Zuweilen aber ist es möglich, die Formänderungen der Widerlager bei der Berechnung der Träger theilweise zu berücksichtigen. Wird z. B. der in der Fig. 16 dargestellte Träger bei B und C durch Säulen von der Länge h' gestützt, und entsprechen diesen Säulen die Werthe F', E', t', ε', so ist bei Vernachlässigung der Formänderung der Grundpfeiler und des Baugrundes zu setzen:

δ_B = der durch den Druck B erzeugten Verkürzung der Säule, vermindert um die Dehnung dieser Säule in Folge der Temperaturerhöhung, d. i.

$$\delta_B = \frac{Bh'}{E'F'} - \varepsilon' t' h'$$

und ebenso ist einzuführen:

$$\delta_C = \frac{Ch'}{E'F'} - \varepsilon' t' h'.$$

Nun drückt man B und C mittels (19) durch X_a, X_b, X_c aus und löst schliesslich die Gleichungen (20) nach den drei Unbekannten X auf.

12. — Die in den Gleichungen (20) stehenden Summenausdrücke lassen sich auf eine sehr einfache und für die Folge sehr nützliche Weise deuten. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir mit

δ_{ma} die Verschiebung, welche der Angriffspunkt m irgend einer Last P_m in der Richtung von P_m erfährt, sobald auf das statisch bestimmte Hauptnetz nur die Belastung $X_a = -1$ wirkt (Zustand, Fig. 19),

δ_{mb} desgleichen die Verschiebung von m im Sinne von P_m und in Folge von $X_b = -1$ (Fig. 20),

δ_{mc} desgleichen die Verschiebung von m im Sinne von P_m und in Folge von $X_c = -1$ (Fig. 21),

ferner mit

δ_{aa} die nach rechts positiv gezählte wagerechte Verschiebung des Punktes a, für den Fall, dass auf das statisch bestimmte Hauptnetz nur die Belastung $X_a = -1$ wirkt,

δ_{ab} die wagerechte Verschiebung von a in Folge von $X_b = -1$,

δ_{ac} " " " " a " " " $X_c = -1$,

weiter mit

δ_{ba} die gegenseitige Verschiebung des Punktpaares b, b_1, d. i. die Aenderung der Strecke bb_1 für den Fall, dass auf das statisch bestimmte Hauptnetz nur die Last $X_a = -1$ wirkt,

δ_{bb} die Aenderung der Strecke bb_1 in Folge von $X_b = -1$,
δ_{bc} " " " " bb_1 " " " $X_c = -1$,
δ_{ca} " " " " cc_1 " " " $X_a = -1$,
δ_{cb} " " " " cc_1 " " " $X_b = -1$,
δ_{cc} " " " " cc_1 " " " $X_c = -1$,

schliesslich mit

δ_{at} die nach rechts positive, wagerechte Verschiebung des Punktes a, für den Fall, dass das statisch bestimmte, unbelastete Hauptnetz nur einer Temperaturänderung unterworfen wird,
δ_{bt} die in diesem Falle entstehende Aenderung der Strecke bb_1,
δ_{ct} " " " " " " " " cc_1;

sodann setzen wir fest, dass bei der Ermittelung aller hier aufgeführten Verschiebungen δ die Stützen des statisch bestimmten Hauptnetzes vollkommen starr angenommen werden sollen.

Jetzt schreiben wir die Arbeitsbedingung für den Belastungszustand $X = 0$ (Fig. 18) an, setzen in dieselbe die dem Zustande $X_a = -1$ (welcher die Spannkräfte S_a und Aenderungen $\Delta s_a = \frac{S_a s}{EF}$ hervorruft) entsprechenden Verschiebungen ein und erhalten

$$\Sigma P_m \delta_{ma} = \Sigma S_0 \Delta s_a = \Sigma S_0 \frac{S_a s}{EF},$$

woraus, mit $\frac{s}{EF} = \rho$:

$$\Sigma S_0 S_a \rho = \Sigma P_m \delta_{ma}; \tag{22}$$

und ebenso finden wir:

$$\Sigma S_0 S_b \rho = \Sigma P_m \delta_{mb}; \quad \Sigma S_0 S_c \rho = \Sigma P_m \delta_{mc}.$$

Wird die Arbeitsbedingung für den Belastungszustand $X_a = -1$ angeschrieben, und werden in dieselbe der Reihe nach die den Zuständen $X_a = -1$, $X_b = -1$, $X_c = -1$ entsprechenden Verschiebungen eingeführt, so entstehen die Gleichungen

$$1 \cdot \delta_{aa} = \Sigma S_a \Delta s_a; \quad 1 \cdot \delta_{ab} = \Sigma S_a \Delta s_b; \quad 1 \cdot \delta_{ac} = \Sigma S_a \Delta s_c,$$

und aus diesen folgt

(23)
$$\Sigma S_a S_a \rho = \delta_{aa}; \quad \Sigma S_a S_b \rho = \delta_{ab}; \quad \Sigma S_a S_c \rho = \delta_{ac}.$$
Ebenso wird erhalten:
$$\Sigma S_b S_a \rho = \delta_{ba}; \quad \Sigma S_b S_b \rho = \delta_{bb}; \quad \Sigma S_b S_c \rho = \delta_{bc};$$
$$\Sigma S_c S_a \rho = \delta_{ca}; \quad \Sigma S_c S_b \rho = \delta_{cb}; \quad \Sigma S_c S_c \rho = \delta_{cc}.$$

Schliesslich liefern die für die Belastungszustände $X_a = -1$, $X_b = -1$, $X_c = -1$ angeschriebenen und jedesmal auf die nur von den Temperaturänderungen herrührenden Verschiebungen angewandten Arbeitsbedingungen die Gleichungen:

$$\Sigma S_a \varepsilon t s = 1 \cdot \delta_{at}; \quad \Sigma S_b \varepsilon t s = 1 \cdot \delta_{bt}; \quad \Sigma S_c \varepsilon t s = 1 \cdot \delta_{ct}. \tag{24}$$

Die drei Bedingungen (20) lassen sich nun umformen in:

$$(25)\quad \begin{cases} L_a + \delta_a = \Sigma P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} - X_c \delta_{ac} + \delta_{at} \\ L_b + \delta_b = \Sigma P_m \delta_{mb} - X_a \delta_{ba} - X_b \delta_{bb} - X_c \delta_{bc} + \delta_{bt} \\ L_c + \delta_c = \Sigma P_m \delta_{mc} - X_a \delta_{ca} - X_b \delta_{cb} - X_c \delta_{cc} + \delta_{ct}, \end{cases}$$

und hierin ist:

$$(26)\qquad \delta_{ab} = \delta_{ba}; \qquad \delta_{ac} = \delta_{ca}; \qquad \delta_{bc} = \delta_{cb}.$$

Die Gleichungen (25) werden sich später in vielen Fällen als sehr nützlich erweisen, da sich die Verschiebungen δ der Knotenpunkte der meisten Fachwerke in sehr einfacher Weise durch Zeichnung feststellen lassen. Wir werden die Figuren, welche diese Verschiebungen liefern, in der Folge *Verschiebungspläne* nennen. (Vergleiche Abschnitt I.) Um die Unbekannten X_a, X_b, X_c mit Hilfe der Gleichungen (25) bestimmen zu können, genügt es, für das statisch bestimmte Hauptnetz vier Verschiebungspläne zu zeichnen, den ersten für den Belastungszustand $X_a = -1$, den zweiten für den Zustand $X_b = -1$, den dritten für $X_c = -1$ und schliesslich den vierten für das unbelastete und nur Temperaturänderungen ausgesetzte Hauptnetz.

13. — Das in No. 9 zur Berechnung eines statisch unbestimmten Fachwerks benutzte Verfahren führt stets zum Ziele; dasselbe besteht darin, die Spannkräfte der überzähligen Stäbe und die überzähligen Stützenwiderstände mit Hilfe von Arbeitsbedingungen von der Art der Gleichung (13) zu bestimmen. Zuweilen stellt es sich nun als zweckmässiger heraus, zunächst andere Werthe als Unbekannte einzuführen und die überzähligen Stabkräfte und Auflagerkräfte als lineare Funktionen dieser *statisch nicht bestimmbaren Grössen* darzustellen. So könnte man z. B. bei Untersuchung des Trägers in Fig. 16 an Stelle der in den Stäben bb_1 und cc_1 auftretenden Spannkräfte, die auf die Drehpunkte B und C bezogenen Momente $S_{b-b1} \cdot h$ und $S_{c-c1} \cdot h$ dieser Kräfte (die sogenannten Stützenmomente) zu Unbekannten wählen und mit Hilfe von Arbeitsbedingungen berechnen.

Man darf also allgemeiner aussprechen:

Sämmtliche Spannkräfte S und nach bestimmten Richtungen wirkenden Auflagerkräfte C eines statisch unbestimmten Fachwerks lassen sich auf die Form bringen:

$$(27)\quad \begin{cases} S = S_0 - S'X' - S''X'' - S'''X''' - \ldots . \\ C = C_0 - C'X' - C''X'' - C'''X''' - \ldots . \end{cases}$$

wobei X', X'', X''' .... gewisse statisch nicht bestimmbare Grössen bedeuten, während S_0, S', S'' ...., C_0, C', C'' .... Werthe vorstellen, welche von den Unbekannten X unabhängig sind. Insbesondere bedeuten S_0 und C_0 die Spannkräfte und Auflagerkräfte des statisch bestimmten Hauptnetzes, in welches das Fachwerk übergeht, sobald sämmtliche Grössen X verschwin-

den; sie sind geradlinige Funktionen der Lasten P, während die S', S'' ...., C', C'' .... von den P unabhängig sein sollen. Beispielsweise lassen sich S' und C' als diejenigen Werthe deuten, welche die Spannkräfte und Auflagerkräfte annehmen, sobald sämmtliche Lasten P und sämmtliche X verschwinden, ausgenommen X', welchem der Werth (-1) beizulegen ist — ein Belastungszustand, welcher kurz der Zustand $X' = -1$ genannt werden soll.

Weiter darf man sagen:

Die durch die Ursache $X' = -1$ hervorgerufenen Auflagerkräfte C' und Spannkräfte S' sind miteinander im Gleichgewicht, und ebenso sind die C'' im Gleichgewichte mit den S'', die C''' mit den S''' u. s. w.

In Folge dieser Auffassung gelten die Gleichungen (27) nicht nur für die nothwendigen, *sondern auch für die überzähligen* Stäbe und Auflagerkräfte. Ist z. B. X'' die Spannkraft in einem überzähligen Stabe, so entsprechen diesem die Werthe:

$$S_0 = 0,\quad S' = 0,\quad S'' = -1,\quad S''' = 0,\quad S'''' = 0 \text{ u. s. w.}$$

und es folgt dann $S = X''$.

Schreibt man nun die Arbeitsbedingung (13) der Reihe nach für die Belastungszustände

$$X' = -1;\quad X'' = -1;\quad X''' = -1;\quad \ldots.$$

an und wendet sie jedesmal auf den wirklichen Verschiebungszustand an, so gelangt man zu den Gleichungen:

$$(28)\qquad L' = \Sigma S' \Delta s;\quad L'' = \Sigma S'' \Delta s;\quad L''' = \Sigma S''' \Delta s;\ \ldots.$$

in denen L', L'', L''', ... die beziehungsweise von den Auflagerkräften C', C'', C''', ... verrichteten virtuellen Arbeiten bedeuten.

Die Anzahl der Gleichungen (28) ist ebenso gross wie die Anzahl der statisch nicht bestimmbaren Grössen. Führt man ein:

$$\Delta s = \frac{Ss}{EF} + \varepsilon t s,$$

drückt S mit Hilfe der ersten der Gleichungen (27) aus und setzt schliesslich zur Abkürzung: $\frac{s}{EF} = \rho$, so gelangt man zu den Bedingungen:

$$(29)\quad \begin{cases} L' - \Sigma S' \varepsilon t s = \Sigma S_0 S' \rho - X' \Sigma S'^2 \rho - X'' \Sigma S' S'' \rho \\ \qquad\qquad - X''' \Sigma S' S''' \rho - \ldots \\ L'' - \Sigma S'' \varepsilon t s = \Sigma S_0 S'' \rho - X' \Sigma S'' S' \rho - X'' \Sigma S''^2 \rho \\ \qquad\qquad - X''' \Sigma S'' S''' \rho - \ldots \\ L''' - \Sigma S''' \varepsilon t s = \Sigma S_0 S''' \rho - X' \Sigma S''' S' \rho - X'' \Sigma S''' S'' \rho \\ \qquad\qquad - X''' \Sigma S'''^2 \rho - \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Alle in diesen Gleichungen stehenden Summenausdrücke erstrecken sich über *sämmtliche* Stäbe des Fachwerks, über die nothwendigen *und* überzähligen.

Auf den letzten Satz ist besonders zu achten. Wendet man z. B. die Gleichungen (29) auf den in No. 11 untersuchten und in der Fig. 16 dargestellten Träger an, und setzt man $X' = X_a$, $X'' = X_b$, $X''' = X_c$, so entsprechen dem überzähligen Stabe bb_1 die Werthe:

$$S_0 = 0; \quad S' = 0; \quad S'' = -1; \quad S''' = 0$$

und dem überzähligen Stabe cc_1 die Werthe:

$$S_0 = 0; \quad S' = 0; \quad S'' = 0; \quad S''' = -1.$$

Für jeden nothwendigen Stab ist $S' = S_a$; $S'' = S_b$; $S''' = S_c$.

Die Summen $\Sigma S''^2 \rho$, $\Sigma S'''^2 \rho$, $\Sigma S'' \varepsilon t s$, $\Sigma S''' \varepsilon t s$ unterscheiden sich von den in den Gleichungen (29) stehenden Summen: $\Sigma S_b^2 \rho$, $\Sigma S_c^2 \rho$, $\Sigma S_b \varepsilon t s$, $\Sigma S_c \varepsilon t s$ (*welche letztere sich nur auf die nothwendigen Stäbe beziehen*) um die den *überzähligen* Stäben entsprechenden Glieder. Es ist also

$$\Sigma S''^2 \rho = \Sigma S''^2 \frac{s}{EF} = \Sigma S_b^2 \frac{s}{EF} + \frac{1 \cdot s_b}{E_b F_b} = \Sigma S_b^2 \rho + \frac{s_b}{E_b F_b};$$

$$\Sigma S'''^2 \rho = \Sigma S_c^2 \rho + \frac{s_c}{E_c F_c};$$

$$\Sigma S'' \varepsilon t s = \Sigma S_b \varepsilon t s - 1 \cdot \varepsilon_b t_b s_b; \quad \Sigma S''' \varepsilon t s = \Sigma S_c \varepsilon t s - 1 \cdot \varepsilon_c t_c s_c.$$

Hingegen ist $\Sigma S_0 S'' \rho = \Sigma S_0 S_b \rho$; $\Sigma S'' S''' \rho = \Sigma S_b S_c \rho$, weil für jeden überzähligen Stab $S_0 = 0$ und entweder $S'' = 0$ oder $S''' = 0$ ist, und ebenso folgt, dass in allen übrigen Summen S' durch S_a ersetzt werden darf, S'' durch S_b und S''' durch S_c.

Bei der Berechnung von L' ist die im Belastungsfalle $X_a = -1$ am Stützpunkte a angreifende wagerechte Kraft 1 zu den Auflagerkräften zu rechnen, weil X_a eine Auflagerkraft ist, und es folgt deshalb $L' = L_a + 1 \cdot \delta_a$, während $L'' = L_b$ und $L''' = L_c$ ist.

Formt man nun die Gleichungen (29) für den vorliegenden Fall auf diese Weise um, und beachtet noch, dass

$$\delta_b = \frac{X_b s_b}{E_b F_b} + \varepsilon_b t_b s_b \quad \text{und} \quad \delta_c = \frac{X_c s_c}{E_c F_c} + \varepsilon_c t_c s_c$$

ist, so erhält man die auf Seite 22 abgeleiteten Gleichungen (20).

Bei der Anwendung der Gleichungen (29) kommt es hauptsächlich darauf an, die von den Lasten P abhängigen Summen möglichst schnell zu bestimmen. In der Regel wird es sich empfehlen, den in No. 12 eingeschlagenen Weg zu wählen und zu setzen:

$$(30) \qquad \Sigma S_0 S' \rho = \Sigma P_m \delta_m'; \quad \Sigma S_0 S'' \rho = \Sigma P_m \delta_m''; \text{ u. s. w.}$$

wobei δ_m', δ_m'' .... diejenigen Verschiebungen bedeuten, welche der Angriffspunkt m irgend einer Last P_m in der Richtung von P_m erfährt, sobald auf das Fachwerk beziehungsweise nur die Ursache $X' = -1$ oder nur die Ursache $X'' = -1$, u. s. w. wirkt.

Alle übrigen (S_0 nicht enthaltenden) Summenausdrücke sind unabhängig von den Lasten; sie brauchen also nur einmal bestimmt zu werden und werden häufig am schnellsten durch Rechnung gefunden,

nachdem man die Spannkräfte S', S'' .... berechnet oder mit Hilfe von Kräfteplänen ermittelt hat. Es lassen sich aber diese Summen auch auf dem in No. 13 angegebenen Wege als Verschiebungen deuten und dann oft mit Hilfe einfacher Verschiebungspläne angeben.

14. — Hat man die statisch nicht bestimmbaren Grössen X auf dem in No. 11 bis 13 beschriebenen Wege ermittelt und hierauf mit Hilfe der Gleichungen (18) bezw. (27) die Spannkräfte S berechnet, so kann man die Aenderungen Δs sämmtlicher Stablängen s angeben und ist nun im Stande, alle die in No. 9 und 10 behandelten Aufgaben zu lösen und zwar genau nach dem früher benutzten Verfahren. Dasselbe besteht in der Anwendung der Gleichung $\Sigma \overline{Q_m} \delta_m = \Sigma \overline{S} \Delta s$ auf den wirklichen Verschiebungszustand und auf einen gedachten Belastungszustand, welcher letztere so zu wählen ist, dass die virtuelle Gesammtarbeit der Lasten $= 1 \cdot \delta_m$ ist, wobei δ_m die gesuchte gegenseitige Verschiebung eines Punktpaares m, m_1 oder die gesuchte gegenseitige Drehung eines Geradenpaares u. s. w. bedeutet. Hierbei ist zu beachten, dass zwischen den gedachten äusseren und inneren Kräften $\overline{Q}$ und $\overline{S}$ nur Gleichgewicht zu bestehen braucht, dass also die Spannkräfte in den überzähligen Stäben und die überzähligen Auflagerkräfte gleich Null gesetzt werden dürfen.

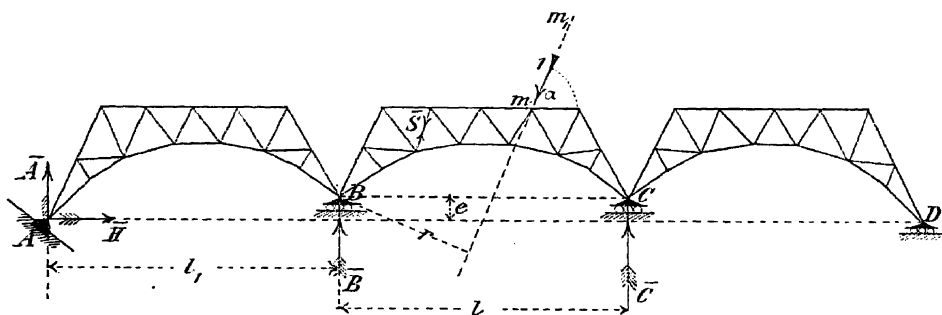



Fig. 22.

Es liege beispielsweise der in Fig. 16 dargestellte Bogenträger vor. Gesucht sei die Verschiebung δ_m, welche irgend ein dem mittleren Bogen angehörender Knotenpunkt m in der Richtung $m_1 m$ erfährt. Die auf Seite 21 angegebenen Verschiebungen der Stützpunkte sollen berücksichtigt werden.

Zuerst wird der Träger durch Beseitigung der überzähligen Stäbe und Auflagerbedingungen statisch bestimmt gemacht (Fig. 22). Hierauf wird in m eine von m_1 nach m gerichtete Last von der Grösse *Eins*

angebracht und zur Berechnung der durch diese Last an den Auflagern des Hauptnetzes hervorgerufenen Widerstände $\overline{A}$, $\overline{B}$, ... geschritten. Bildet $m_1 m$ mit der Wagerechten den Winkel α, und ist der lothrechte Abstand des Stützpunktes B von der mm_1 gleich r, so lauten die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\overline{H} = 1 \cdot \cos\alpha; \quad \overline{A} l_1 - \overline{H} e = 0$$
$$\overline{C} l - 1 \cdot r = 0; \quad \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} = 1 \cdot \sin\alpha$$

und aus diesen findet man:

$$\overline{A} = 1 \frac{e \cos\alpha}{l_1}; \quad \overline{C} = 1 \frac{r}{l};$$
$$\overline{B} = 1 \cdot \left(\sin\alpha - \frac{e\cos\alpha}{l_1} - \frac{r}{l}\right).\text{*)}$$

Nun bestimmt man die von den äusseren Kräften 1, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{H}$ in den Stäben des Hauptnetzes hervorgerufenen Spannkräfte $\overline{S}$ und schreibt die Arbeitsgleichung an:

$$1 \cdot \delta_m - \overline{A}\delta_A - \overline{B}\delta_B - \overline{C}\delta_C - \overline{H}\delta_H = \Sigma \overline{S} \Delta s,$$

in welche die *wirklichen* Aenderungen Δs der Stablängen einzuführen sind. Es ist also zu setzen:

$$\Delta s = \frac{Ss}{EF} + \varepsilon t s, \text{ wo } S = S_0 - S_a X_a - S_b X_b - S_c X_c.$$

Auf diesem Wege erhält man stets δ_m als lineare Funktion der Lasten P, der Temperaturänderungen t, der statisch nicht bestimmbaren Grössen X und der nach bestimmten Richtungen erfolgenden Verschiebungen der Stützpunkte. Da nun zwischen den X, P, t ebenfalls nur Beziehungen ersten Grades bestehen, so folgt, dass im Falle unveränderlicher Gliederung und Stützungsart das in No. 6 ausgesprochene Gesetz von der Zusammenzählung der einzelnen Wirkungen für alle diejenigen Grössen δ_m gilt, welche sich mittels einer Bedingung von der Form $1 \cdot \delta_m + \overline{L} = \Sigma \overline{S} \Delta s$ bestimmen lassen.

15. — Es möge noch darauf hingewiesen werden, dass bei der Auswahl der als überzählig zu bezeichnenden Stäbe und Auflagerbedingungen innerhalb gewisser Grenzen nach Willkür verfahren werden darf.

Führt man z. B. die Widerstände der beiden Mittelstützen des in der Fig. 23 dargestellten durchgehenden Balkens als statisch nicht be-

---

*) Wir empfehlen dem Leser, diese Kräfte auch durch Zeichnung zu bestimmen.

stimmbare Grössen (X) ein, so erhält man das in der Fig. 24 abgebildete Hauptnetz; dasselbe ist ein einfacher Balken. Hingegen gelangt man zu dem aus drei Einzelbalken bestehenden Hauptnetze (Fig. 25)

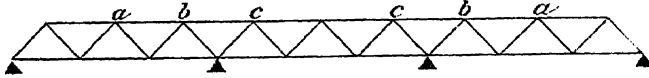



Fig. 23.

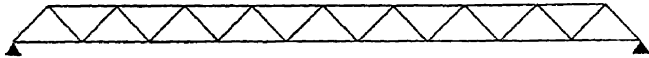



Fig. 24.

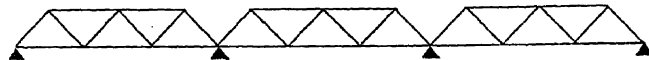



Fig. 25.

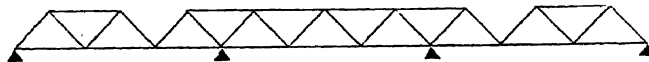



Fig. 26.

oder zu dem einen *Gerber*'schen Balken vorstellenden Hauptnetze (Fig. 26), je nachdem man die beiden Stäbe bc oder die beiden Stäbe ab als überzählig bezeichnet.

Auch ist hervorzuheben, dass bei der Ermittelung der Verschiebungen δ_m andere Hauptnetze gebildet werden dürfen, wie bei der Bestimmung der Spannkräfte.

e. Der Maxwell'sche Satz von der Gegenseitigkeit der elastischen Formänderungen und das Gesetz von Betti.

16. — Wir betrachten ein auf starren Stützen ruhendes, ebenes oder räumliches Fachwerk von unveränderlicher Gliederung und Stützungsart (Seite 6) und setzen einen spannungslosen Anfangszustand voraus. Auch nehmen wir an, dass keine Temperaturänderungen entstehen. Es gilt dann das auf Seite 12 nachgewiesene *Clapeyron*'sche Gesetz, und es ergiebt sich für die mechanische Arbeit A der äusseren Kräfte der nur von den Lasten P abhängige Ausdruck:

$$A = \tfrac{1}{2}\,\Sigma P\delta = \tfrac{1}{2}\,(P_a\delta_a + P_b\delta_b + \ldots + P_m\delta_m + \ldots), \tag{31}$$

in welchem bis jetzt unter P_a, P_b, ... P_m ... Einzellasten verstanden wurden und unter δ_a, δ_b, ... δ_m ... die wirklichen Verschiebungen

der Angriffspunkte a, b, ... m . . . . derselben, im Sinne der P_a, P_b, . . . P_m . . . —

Für die Folge ist es nun nützlich, den Buchstaben P und δ eine allgemeinere Bedeutung beizulegen und unter jedem der in der Gleichung auftretenden Produkte $\frac{1}{2} P\delta$ die mechanische Arbeit einer ganzen Gruppe von Lasten zu verstehen.

Solche Gruppen lassen sich leicht an der Hand der Untersuchungen in No. 9 und No. 10 bilden.

Werden z. B. die beiden Lasten *Eins* in der Fig. 9 mit P_m multiplicirt (wobei man natürlich entweder *Eins* oder P_m als Zahl zu betrachten hat), so entsteht eine Lastengruppe, deren Beitrag zur Arbeit A gleich $\frac{1}{2} P_m \delta_m$ ist, wenn δ_m die gegenseitige Verschiebung des Punktpaares m, m_1 bedeutet.

Multiplicirt man die vier Lasten in Fig. 13 mit P_m, so erhält man eine Gruppe, deren entsprechendes δ_m gleich der im Bogenmaass ausgedrückten gegenseitigen Drehung des Geradenpaares (m), (m_1) ist.

In gleicher Weise lässt sich aus der Figur 15 durch Multiplikation der dort angenommenen Lasten mit P_m eine Lastengruppe ableiten, deren zugehöriges δ_m gleich der Aenderung der Entfernung mf ist.

Die vorliegenden Beispiele dürften genügen, um die Bildung von Lastengruppen zu erläutern, und es sei nur noch hervorgehoben, dass jede am Fachwerk vorkommende Last stets nur einer einzigen Gruppe zugewiesen werden darf. Der Kürze wegen nennen wir eine solche Gruppe von Kräften eine *Belastung* und das entsprechende δ *den Weg dieser Belastung.* Unter anderem werden wir in der Folge öfter von der Belastung P_m eines Punktpaares m, m_1 oder eines Geradenpaares (m), (m_1) sprechen, Belastungen, die nach der vorstehenden Erklärung durch Multiplikation der auf Seite 13 und 16 eingeführten *Belastungseinheiten* jener Paare mit P_m entstehen.

Sämmtliche δ sind lineare Funktionen der Belastungen P; sie lassen sich daher auf die Form bringen:

$$(32)\quad \begin{cases} \delta_a = \delta_{aa} P_a + \delta_{ab} P_b + \ldots + \delta_{am} P_m + \ldots \\ \delta_b = \delta_{ba} P_a + \delta_{bb} P_b + \ldots + \delta_{bm} P_m + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta_m = \delta_{ma} P_a + \delta_{mb} P_b + \ldots + \delta_{mm} P_m + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

wobei die mit einem Doppelzeiger behafteten Werthe δ unabhängig sind von den Belastungen P. Um diese Werthe zu deuten, setze man in irgend einer der Gleichungen (20) sämmtliche P gleich Null, mit

Ausnahme eines einzigen, dem man den Werth *Eins* beilege. Dann ergiebt sich beispielsweise δ_{mb} als derjenige Werth, welchen der Weg δ_m für den Fall annimmt, dass auf das Fachwerk nur die Belastung $P_b = 1$ wirkt.

17. — Wir setzen jetzt voraus, dass nur zwei Belastungen auftreten, etwa P_m und P_n. Die entsprechenden Wege sind

$$\delta_m = \delta_{mm} P_m + \delta_{mn} P_n$$
$$\delta_n = \delta_{nm} P_m + \delta_{nn} P_n.$$

Wird zuerst nur die Belastung P_m aufgebracht, so ist der Weg derselben $= \delta_{mm} P_m$, und es verrichtet deshalb die von Null aus allmählich anwachsende Belastung P_m die mechanische Arbeit $\frac{1}{2}\,\delta_{mm} P_m{}^2$. Fügt man die ebenfalls von Null aus anwachsende Belastung P_n hinzu, so nimmt die Arbeit der äusseren Kräfte erstens um $\frac{1}{2}\,\delta_{nn} P_n{}^2$ zu, weil die wachsende Belastung P_n den Weg $\delta_{nn} P_n$ zurücklegt, und zweitens um $P_m(\delta_{mn} P_n)$, weil der Weg der bereits vorhandenen Belastung P_m die Vergrösserung $\delta_{mn} P_n$ erfährt. Im Ganzen entsteht:

$$A = \tfrac{1}{2}\,\delta_{mm} P_m{}^2 + \tfrac{1}{2}\,\delta_{nn} P_n{}^2 + \delta_{mn} P_m P_n.$$

Wird zuerst die Belastung P_n aufgebracht und nachher P_m, so ergiebt sich durch Vertauschung von m und n:

$$A = \tfrac{1}{2}\,\delta_{nn} P_n{}^2 + \tfrac{1}{2}\,\delta_{mm} P_m{}^2 + \delta_{nm} P_n P_m.$$

Nach dem Clapeyron'schen Gesetze müssen aber die beiden für A gewonnenen Ausdrücke übereinstimmen, und es folgt daher die wichtige Gleichung:

$$\delta_{nm} = \delta_{mn}. \qquad (33)$$

Dieselbe wurde zuerst von *Maxwell* bewiesen und soll in der Folge stets als *Maxwell'scher Lehrsatz* angeführt werden.

Von den vielen Sätzen, welche sich aus der Gleichung (33) ergeben, sind die folgenden für die späteren Untersuchungen von besonderer Bedeutung.

> 1. *Die gegenseitige Verschiebung δ_{mn} eines Punktpaares m, m_1 in Folge der Belastungseinheit eines anderen Punktpaares n, n_1 ist ebenso gross wie die gegenseitige Verschiebung δ_{nm} des Punktpaares n, n_1 in Folge der Belastungseinheit des Punktpaares m, m_1.*
>
> 2. *Die gegenseitige Drehung δ_{mn} eines Geradenpaares (m), (m_1) in Folge der Belastungseinheit eines anderen Geradenpaares (n), (n_1) ist ebenso gross wie die gegenseitige Drehung δ_{nm} des Geradenpaares (n), (n_1) in Folge der Belastungseinheit des Geradenpaares (m), (m_1).*

3. Die gegenseitige Verschiebung eines Punktpaares m, m_1 in Folge der Belastungseinheit eines Geradenpaares (n), (n_1) ist ebenso gross wie die gegenseitige Drehung des Geradenpaares (n), (n_1) in Folge der Belastungseinheit des Punktpaares m, m_1.

Die Sätze (2) und (3) beziehen sich auf ein ebenes Fachwerk. Die Erklärungen der Begriffe: Punktpaar, Geradenpaar, Belastungseinheit eines Punkt- oder Geradenpaares finden sich auf Seite 13 und 16.

Noch sei ein Beispiel angeführt, welches besonders geeignet sein dürfte, von der Fruchtbarkeit des Maxwell'schen Satzes zu überzeugen. Man darf nämlich mit Hinweis auf die Figuren 27 und 28, welche ein und dasselbe Fachwerk auf verschiedenartige Weise belastet darstellen, aussprechen: Die

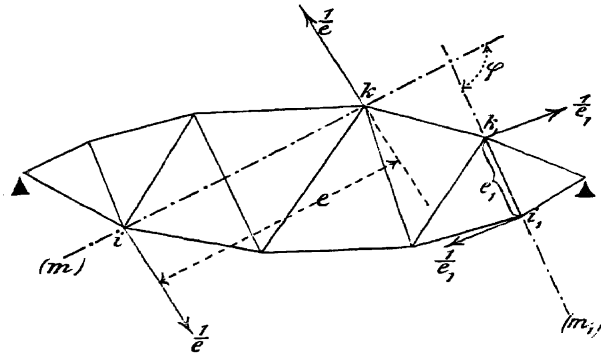



Fig. 27.

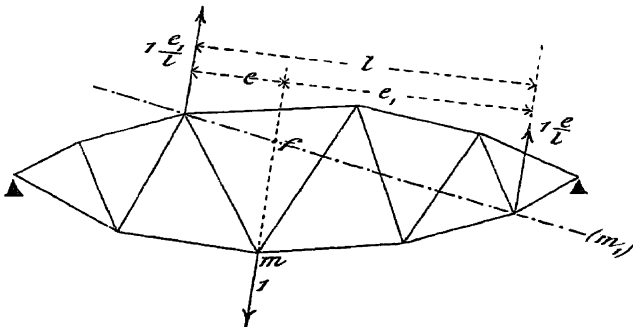



Fig. 28.

Strecke, um welche sich der Abstand mf in Fig. 28 ändert, sobald auf das Fachwerk nur die in der Fig. 27 angenommenen Lasten $\frac{1}{e}$ und $\frac{1}{e_1}$ wirken, ist ebenso gross wie die im Bogenmaass ausgedrückte Aenderung, welche der Winkel φ (Fig. 27) erfährt, falls das Fachwerk auf die in Fig. 28 angegebene Art belastet wird. (Die gleichbezeichneten Strecken e, e_1 der Figuren 27 und 28 brauchen nicht gleich gross zu sein.)

18. — Zu einem anderen Beweise für den Maxwell'schen Satz führt die folgende Betrachtung.

Ein Fachwerk, welches den in No. 16 angeführten Voraussetzungen genügt, werde von beliebigen Belastungen P_m ergriffen. In Folge dessen entstehen Spannkräfte S_m und Aenderungen der Stablängen um $\Delta s_m = \frac{S_m s}{EF}$.

Nach Entfernung der P_m mögen andere Belastungen P_n auf das Fachwerk wirken und die Spannkräfte S_n sowie die Längenänderungen $\Delta s_n = \frac{S_n s}{EF}$ hervorbringen.

Es bedeute nun (δ_{mn}) den Werth, welchen der Weg δ_m irgend einer Belastung P_m annimmt, wenn auf das Fachwerk nur die Belastungen P_n wirken, ferner (δ_{nm}) den nur durch die Belastungen P_m hervorgerufenen Weg irgend einer Belastung P_n. Die Werthe δ wurden durch Klammern ausgezeichnet, da sie eine andere Bedeutung haben als die früher erklärten δ_{mn} und δ_{nm}, deren ersteres z. B. den Werth von δ_m für den Fall vorstellte, dass nur *eine* Belastung P_n wirkt und diese die Grösse *Eins* besitzt.

Schreibt man nun die Arbeitsbedingung (13) einmal an

für den Kräftezustand (P_m, S_m) und den hiervon unabhängigen Verschiebungszustand $[(\delta_{mn})\, \Delta s_n]$

und hierauf

für den Kräftezustand (P_n, S_n) und den hiervon unabhängigen Verschiebungszustand $[(\delta_{nm})\, \Delta s_m]$,

so erhält man die Gleichungen:

$$\Sigma P_m (\delta_{mn}) = \Sigma S_m \, \Delta s_n = \Sigma S_m \frac{S_n s}{EF} \quad \text{und}$$

$$\Sigma P_n (\delta_{nm}) = \Sigma S_n \, \Delta s_m = \Sigma S_n \frac{S_m s}{EF}$$

und gelangt zu dem zuerst von *Betti* nachgewiesenen Gesetze

$$\Sigma P_m (\delta_{mn}) = \Sigma P_n (\delta_{nm}). \tag{34}$$

Wirkt auf das Fachwerk das eine mal nur eine Belastung $P_m = 1$, sodann nur eine Belastung $P_n = 1$, so entsteht aus (34):

$$\delta_{mn} = \delta_{nm}$$

und hieraus folgt, dass der *Maxwell'*sche Satz nur ein besonderer Fall des viel allgemeineren, aber erst später entdeckten *Betti'*schen Satzes ist.

19. — Um die Anwendung des Maxwell'schen Satzes auf die Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke zu erläutern, behandeln wir

zunächst die in No. 11 und 13 bereits auf anderem Wege gelöste Aufgabe: *die überzählige Auflagerkraft X_a und die Spannkräfte X_b, X_c der überzähligen Stäbe des in der Fig. 16 dargestellten Bogenträgers zu bestimmen.*

Es sollen sowohl Temperaturänderungen als auch die auf Seite 21 angeführten Verschiebungen der Stützpunkte berücksichtigt werden.

Wir rechnen (wie in Fig. 17 auf Seite 19) die Kräfte X_a, X_b, X_c zu den auf das Hauptnetz wirkenden *Lasten* und erhalten für die Wege δ_a, δ_b, δ_c der Belastungen X_a, X_b, X_c die Werthe:

$$(35)\quad \begin{cases} \delta_a = \Sigma P_m \delta_{am} - \delta_{aa} X_a - \delta_{ab} X_b - \delta_{ac} X_c + \delta_{at} + \delta_{aw} \\ \delta_b = \Sigma P_m \delta_{bm} - \delta_{ba} X_a - \delta_{bb} X_b - \delta_{bc} X_c + \delta_{bt} + \delta_{bw} \\ \delta_c = \Sigma P_m \delta_{cm} - \delta_{ca} X_a - \delta_{cb} X_b - \delta_{cc} X_c + \delta_{ct} + \delta_{cw}. \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet:

δ_{am} den Einfluss der Ursache $P_m = 1$ auf den Weg δ_a,
δ_{aa} desgl. den Einfluss der Ursache $X_a = -1$,
δ_{ab} ,, ,, ,, ,, ,, $X_b = -1$,
δ_{ac} ,, ,, ,, ,, ,, $X_c = -1$,
δ_{at} desgl. den Einfluss von Temperaturänderungen,
δ_{aw} ,, ,, ,, ,, Verschiebungen der Stützpunkte,

und ebenso lassen sich die übrigen, mit Doppelzeigern behafteten Werthe δ deuten.

Um δ_{aw} zu bestimmen, wird die Arbeitsbedingung für den Belastungszustand $X_a = -1$ (Fig. 19) angeschrieben und dabei jedem Stabe die Längenänderung $\Delta s = 0$ beigelegt. Es ergiebt sich dann

$$1 \cdot \delta_{aw} + 1 \cdot \delta_H + 1 \cdot \frac{e}{l_1} (\delta_A - \delta_B - \delta_C + \delta_D) = 0$$

und hieraus und aus ähnlichen, für die Belastungszustände $X_b = -1$, $X_c = -1$ aufgestellten Gleichungen folgt

$$\delta_{aw} = -L_a; \quad \delta_{bw} = -L_b; \quad \delta_{cw} = -L_c \text{ (vergl. Seite 22).}$$

Setzt man nun diese Werthe in (35) ein und beachtet, dass die Buchstaben der Doppelzeiger miteinander vertauscht werden dürfen, dass also $\delta_{am} = \delta_{ma}$, $\delta_{bm} = \delta_{mb}$, $\delta_{cm} = \delta_{mc}$, $\delta_{ab} = \delta_{ba}$, ... ist, so gelangt man zu den auf Seite 25 erhaltenen Gleichungen (25).

Der eben eingeschlagene Weg führt immer zum Ziele. Man darf aussprechen:

Jedes statisch unbestimmte Fachwerk lässt sich durch Beseitigung von überzähligen Stäben und Auflagerkräften in ein statisch bestimmtes Fachwerk (Hauptnetz genannt) verwandeln. Auf dieses Hauptnetz wirken ausser den gegebenen Lasten P_m und den Temperaturänderungen noch gewisse vorläufig unbekannte Belastungen X_a, X_b, X_c, X_d ...

deren Wege δ_a, δ_b, δ_c, δ_d . . ., jedoch bestimmten Bedingungen unterworfen sind. Es gelten die Gleichungen:

$$(36)\quad \begin{cases} L_a - \delta_{at} + \delta_a = \Sigma P_m \delta_{ma} - \delta_{aa} X_a - \delta_{ba} X_b - \delta_{ca} X_c - \delta_{da} X_d - \dots \\ L_b - \delta_{bt} + \delta_b = \Sigma P_m \delta_{mb} - \delta_{ab} X_a - \delta_{bb} X_b - \delta_{cb} X_c - \delta_{db} X_d - \dots \\ L_c - \delta_{ct} + \delta_c = \Sigma P_m \delta_{mc} - \delta_{ac} X_a - \delta_{bc} X_b - \delta_{cc} X_c - \delta_{dc} X_d - \dots \\ L_d - \delta_{dt} + \delta_d = \Sigma P_m \delta_{md} - \delta_{ad} X_a - \delta_{bd} X_b - \delta_{cd} X_c - \delta_{dd} X_d - \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

welche eine schnelle Berechnung der statisch nicht bestimmbaren Grössen X gestatten, sobald sich die den Belastungszuständen $X_a = -1$, $X_b = -1$, $X_c = -1$, . . . entsprechenden Formänderungen des Hauptnetzes bequem darstellen lassen, und ebenso die von den Temperaturänderungen herrührenden Werthe δ_{at}, δ_{bt}, ... Begegnet die Ermittelung dieser Verschiebungen Schwierigkeiten, so wende man die in No. 11 und 13 abgeleiteten Gleichungen (20) oder (29) an.

f. Einfluss unrichtiger Ablängung überzähliger Stäbe. Künstliche Anspannung.

20. — Die bisherigen Untersuchungen setzten voraus, dass jeder Stab genau diejenige Länge erhält, welche dem spannungslosen Zustande des Fachwerks entspricht. In statisch unbestimmten Fachwerken können jedoch geringfügige Fehler bei der Ablängung der überzähligen Stäbe wesentliche Aenderungen der Spannkräfte zur Folge haben.

Soll z. B. in ein aus 5 Stäben gebildetes ebenes Viereck (Fig. 29) ein sechster Stab ab eingefügt werden, welcher die zu geringe Länge ab_1 besitzt, so ist dieser Stab vorher so anzuspannen, dass er sich um b_1b verlängert. In Folge dessen aber wird er auf das ursprüngliche Fachwerk in a und b gewisse Kräfte ausüben, welche in den Stäben desselben Spannungen hervorrufen.

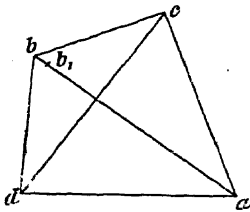



Fig. 29.

Damit man die früher entwickelten Gleichungen auch unmittelbar zur Berechnung von statisch unbestimmten Fachwerken benutzen kann, deren überzählige Stäbe wegen unrichtiger Ablängung mit Anfangsspannungen eingesetzt werden müssen, stelle man sich vor, es seien jene Herstellungsfehler durch Abkühlung beziehungsweise Erwärmung der unrichtig bearbeiteten Stäbe beseitigt worden und zwar *vor* Einfügung dieser Stäbe in das Fachwerk. Die Länge s eines Stabes, dessen Temperatur um t' zunimmt, wächst um $\varepsilon t's$, und es muss deshalb die Temperatur eines um ωs zu kurzen

Stabes um $t' = \frac{\omega}{\varepsilon}$ erhöht, diejenige eines um ωs zu langen Stabes um $t' = \frac{\omega}{\varepsilon}$ erniedrigt werden.

Nach Einsetzen sämmtlicher Stäbe denke man die ursprünglichen Stabtemperaturen wieder hergestellt, schreibe also den erwärmten Stäben die Temperaturänderung $(-t')$, den abgekühlten die Temperaturerhöhung $(+t')$ zu. Man erkennt dann, dass man den fraglichen Bearbeitungsfehlern Rechnung trägt, wenn man die in die früheren Entwickelungen eingeführten Temperaturänderungen t für die um ωs zu langen oder zu kurzen Stäbe um $t' = \frac{\omega}{\varepsilon}$ vergrössert beziehungsweise verkleinert.

Werden überzählige Stäbe absichtlich mit unrichtigen Längen eingesetzt, so bezeichnet man das Stabgebilde als ein *Fachwerk mit künstlicher Anspannung.*

g. Ausnahmefälle.

21. — Alle vorstehenden Entwickelungen sind an die Voraussetzung gebunden, dass es zulässig sei, bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen die Formänderung des Fachwerks zu vernachlässigen; sie gelten also nur für Stabgebilde, deren Knoten sehr geringe Verschiebungen erleiden, und führen, auf Träger von ungenügender Steifigkeit (z. B. mangelhaft versteifte Kettenbrücken) angewendet, mitunter zu ganz unrichtigen Ergebnissen. Es giebt aber auch Fälle, in denen bereits sehr geringe elastische Formänderungen die angenäherte Berechnungsweise unbrauchbar machen, und hierzu gehören die im ersten Bande (Seite 205, 211, 213) als Fachwerke von unendlich kleiner Verschiebbarkeit bezeichneten Stabgebilde, deren Knotenpunkte sich selbst dann gegeneinander (wenn auch nur unendlich wenig) verschieben würden, wenn sämmtliche Stäbe und Stützen starr wären. Ein besonders einfaches Fachwerk dieser Art stellt Fig. 30 dar. Die Achsen der beiden wagerechten Stäbe ac und bc fallen in dieselbe Gerade. a und b sind feste Auflagergelenke. Die um a und b mit den Halbmessern s geschlagenen Kreise haben ein Bogenelement gemein, innerhalb dessen sich c frei bewegen kann. Wird das Fachwerk durch eine senk-

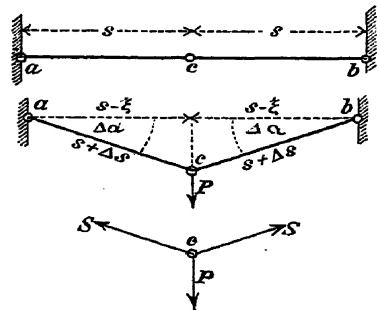



Fig. 30.

rechte Last P beansprucht, und verschiebt sich jedes der beiden Auflagergelenke um die gleiche wagerechte Strecke ξ, so entstehen in den Stäben ac und bc gleich grosse Spannkräfte S. Man erhält:

$$2 S \sin \Delta\alpha = P;$$

$$\sin \Delta\alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \Delta\alpha}; \quad \cos \Delta\alpha = \frac{s - \xi}{s + \Delta s}; \quad \Delta s = \frac{S s}{E F}; \quad \text{also}$$

$$4 S^2 \left[1 - \frac{E^2 F^2 (s - \xi)^2}{s^2 (E F + S)^2}\right] = P^2,$$

und diese Gleichung liefert für S einen bestimmten endlichen Werth, welcher desto grösser ist, je grösser E und F sind. Werden die Widerlager und die Stäbe vollkommen starr angenommen, so ergiebt sich (wegen $\xi = 0$; $\Delta s = 0$; $\sin \Delta\alpha = 0$) für die Spannkraft S, selbst bei sehr kleiner Last P, der unrichtige Werth $S = \infty$.*)

Zu einem ähnlichen Ergebnisse führt die genauere Berechnung des auf Seite 208 und 211 des ersten Bandes angeführten Paskal'schen Sechsecks. Gleichgewicht tritt hier selbst bei starren Stäben im Allgemeinen erst nach einer gegenseitigen Verschiebung der Knotenpunkte ein. Da diese Formänderung aber unendlich klein ist, so darf bei Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen die ursprüngliche Gestalt des Fachwerks beibehalten werden, und es ergeben sich dann (nach Seite 207, Band I) für die Spannkräfte S unendlich grosse oder unbestimmte Werthe. Werden aber die elastischen Verschiebungen berücksichtigt, so liefern die Gleichgewichtsbedingungen für jede Spannkraft S einen ganz bestimmten endlichen Werth. Immerhin ist es rathsam, derartige bereits ausgeführte Fachwerke zu vermeiden, wegen der verhältnissmässig grossen Anstrengungen, welche die Stäbe selbst bei geringer Belastung erleiden.

B. Gesetze für beliebige isotrope, feste Körper.

a. Voraussetzungen und Erklärungen. Gesetz der virtuellen Verschiebungen.

22. — Wir werden in diesem Buche ausser Fachwerken noch Träger untersuchen, die aus irgendwie miteinander befestigten geraden oder krummen Stäben zusammengesetzt sind und *Stabwerke* genannt werden mögen. Die Theorie derselben leiten wir durch Entwickelung einiger Gesetze ein, welche für beliebige feste Körper, die nur elastische, verschwindend kleine Formänderungen erleiden, gelten.

23. — An irgend einer Stelle eines im Gleichgewichte befindlichen festen Körpers denken wir uns ein unendlich kleines Theilchen abge-

*) Vergl. die Anmerkung auf Seite 207, Band I.

grenzt. Die auf die Seitenflächen desselben wirkenden Kräfte sollen *Flächenkräfte* genannt und insbesondere als *innere Kräfte* oder *Oberflächenkräfte* bezeichnet werden, je nachdem die durch sie beanspruchten Flächen im Inneren des Körpers liegen oder zur Oberfläche gehören; ausser ihnen wird an dem Körpertheilchen im Allgemeinen noch eine auf die Masse desselben wirkende äussere Kraft angreifen, welche eine *Massenkraft* heisst (z. B. die Erdanziehung, Ergänzungskräfte der relativen Bewegung).

Nehmen wir nun an, es erleide ein anfänglich im Gleichgewichte befindlicher Körper durch Hinzutreten äusserer Kräfte und durch Temperaturänderung eine Umgestaltung. Dieselbe hört auf, sobald sich ein neuer Gleichgewichtszustand gebildet hat und bestehen bleibt; während ihrer Erzeugung werden die Flächenkräfte des betrachteten Körpertheilchens eine bestimmte Arbeitssumme verrichten, und von dieser ist besonders derjenige Theil von Wichtigkeit, der nur von der Formänderung des Körpertheilchens abhängig ist, der also verschwindet, wenn sich das Theilchen bewegt, ohne seine Gestalt zu ändern. Man nennt diesen Theil der Gesammtarbeit der Flächenkräfte *die Formänderungsarbeit des Körpertheilchens;* ihre Integration über den ganzen Körper liefert die Formänderungsarbeit des Körpers. Bei der Berechnung dieser Arbeit ist zu beachten, dass die Flächenkräfte, deren schliessliche Werthe wir ganz allgemein mit R bezeichnen wollen, sich im Verlaufe jener Umgestaltung ändern.

Denkt man sich hingegen die Flächenkräfte während der ganzen Dauer der Formänderung mit ihren Endwerthen R wirkend und bestimmt die von den R geleistete Formänderungsarbeit unter der Voraussetzung einer *willkürlichen* Formänderung, die man sich zwar als möglich vorstellen kann, die aber nicht von den die Kräfte R erzeugenden, sondern von irgend welchen anderen Ursachen herrührt, so erhält man einen Ausdruck dA_v, welcher die *virtuelle Formänderungsarbeit* des Körpertheilchens heisst, während jene willkürliche, mögliche Umgestaltung eine *virtuelle Formänderung* genannt werden soll.

Wir fassen jetzt eine unendliche kleine virtuelle Formänderung eines im Gleichgewichte befindlichen Körpers und insbesondere die Bewegung und Umgestaltung eines Körpertheilchens ins Auge und bezeichnen die virtuelle Arbeit der auf dieses Körpertheilchen wirkenden Massenkraft mit dA_m, diejenige der Flächenkräfte mit dA_f. Letztere Arbeit besteht aus zwei Theilen; der eine, dA_v, hängt nur von der Umgestaltung des Körpertheilchens ab, der andere, nämlich $dA_f - dA_v$ von der Bewegung des Massenmittelpunktes und der Drehung des Körpertheilchens um diesen Punkt. Somit stellt $dA_m + dA_f - dA_v$ diejenige virtuelle Arbeit vor, welche sämmtliche auf das Körper-

theilchen wirkenden Kräfte verrichten, wenn dessen Bewegung ohne eine Formveränderung vor sich geht. Diese Arbeit muss aber = Null sein, da die Mittelkraft der auf das Körpertheilchen wirkenden Kräfte (des vorausgesetzten Gleichgewichtszustandes wegen) zu Anfang = Null ist und auch während der ganzen Dauer der gedachten unendlich kleinen Bewegung bis auf eine verschwindende Grösse den Werth Null behält.

Es folgt mithin $dA_m + dA_f = dA_v$ und, wenn entsprechende Gleichungen für sämmtliche Körpertheilchen gebildet und hierauf addirt werden,

$$A_m + A_f = A_v. \tag{37}$$

Da sich nun in dem Ausdrucke A_f die Arbeiten der *inneren* Flächenkräfte gegenseitig tilgen, weil auf die Flächen, in denen aneinander grenzende Körpertheilchen zusammenhängen, bei gleichen Verschiebungen entgegengesetzt gleiche Kräfte wirken, so leuchtet ein, dass A_f die *virtuelle Arbeit der Oberflächenkräfte*, mithin $A_f + A_m$ die *virtuelle Arbeit sämmtlicher äusseren Kräfte* vorstellt, und es drückt deshalb die Gleichung (37) das Gesetz aus:

Bei einer verschwindend kleinen virtuellen Formänderung eines im Gleichgewichte befindlichen Körpers ist die virtuelle Arbeit der äusseren Kräfte gleich der virtuellen Formänderungsarbeit.

Die Ableitung dieses Satzes nimmt an, dass alle anfänglich sich deckenden Seitenflächen von aneinander grenzenden Körpertheilchen auch während des ganzen Verlaufs der Formänderung sich decken, weil nur dann die Arbeiten der auf diese Flächen wirkenden Kräfte sich aufheben. Besteht nun der betrachtete Körper aus mehreren einander berührenden Theilen, von denen jeder einzelne der gemachten Annahme entspricht, und finden gegenseitige Verschiebungen von anfänglich zusammenliegenden Berührungsflächen je zweier Theile statt, so müssen, wenn das bewiesene Gesetz gelten soll, alle diese Flächen zur Oberfläche gezählt werden, d. h. es sind die auf diese Flächen wirkenden Kräfte, soweit sich ihre Arbeiten nicht tilgen, zu den äusseren Kräften zu rechnen. So sind z. B. bei aufeinander reibenden Theilen eines Körpers die an den Berührungsstellen wirkenden Reibungswiderstände als äussere Kräfte aufzufassen.

24. — Um einen allgemeinen Ausdruck für A_v abzuleiten, beziehen wir den Körper auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem und denken an irgend einer Stelle, aber innerhalb eines Körpertheiles, dessen Spannungen sich *stetig* ändern, ein Parallelepipedum von den anfänglichen Kantenlängen dx, dy, dz abgegrenzt.

Die Spannung in der zur x-Achse senkrechten, den Punkt (x, y, z) enthaltenden Seitenfläche $dy\,dz$ sei in die Seitenspannungen

σ_x, parallel der x-Achse und positiv, wenn im Sinne von $(-x)$ wirkend,
τ_{xy}, „ „ y- „ „ „ „ „ „ „ $(-y)$ „
τ_{xz}, „ „ z- „ „ „ „ „ „ „ $(-z)$ „

Fig. 31.

zerlegt, und in gleicher Weise mögen die Spannungen in den dem Punkte (x, y, z) anliegenden Seitenflächen $dz\,dx$ und $dx\,dy$ durch ihre Seitenspannungen

$$\sigma_y, \quad \tau_{yz}, \quad \tau_{yx},$$
$$\sigma_z, \quad \tau_{zx}, \quad \tau_{zy}$$

gegeben werden. Die σ sind Zug- oder Druckspannungen, die τ Schubspannungen (Band I, Seite 49).

Durch Multiplikation dieser Spannungen mit den entsprechenden Flächeninhalten gelangt man zu den Kräften, welche jene Flächen beanspruchen. Auf die Fläche $dy\,dz$ wirken z. B. die drei Kräfte:

$$\sigma_x\,dy\,dz, \quad \tau_{xy}\,dy\,dz, \quad \tau_{xz}\,dy\,dz.$$

Wird die Momentensumme aller am Parallelepipedum $dx\,dy\,dz$ angreifenden Kräfte in Bezug auf die der y-Achse parallele Schwerachse des Körpertheilchens gleich Null gesetzt und hierbei davon abgesehen, dass sich die Spannungen in gegenüberliegenden Seitenflächen um Differentiale unterscheiden, weil die Berücksichtigung dieser Unterschiede zu unendlich kleinen Grössen der vierten Ord-

Fig. 32.

nung führen würde, welche gegen die der dritten Ordnung verschwinden, so erhält man (mit Hinweis auf Fig. 32, in der die Projektion des Körpertheilchens auf die (zx)-Ebene dargestellt ist) die Gleichung:

$$(\tau_{zx}\, dx\, dy)\, dz = (\tau_{xz}\, dy\, dz)\, dx \quad \text{(vergl. auch Band I, Seite 82),}$$

und hieraus und aus ähnlichen Momentengleichungen für die der x-Achse und z-Achse parallelen Schwerachsen des Körpertheilchens folgt:

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{zy} = \tau_{yz}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx},$$

weshalb die kürzere Bezeichnung eingeführt werden soll:

$$\tau_x = \tau_{xz} = \tau_{zy}; \quad \tau_y = \tau_{zx} = \tau_{xz}; \quad \tau_z = \tau_{xy} = \tau_{yx},$$

wobei zu merken ist, dass

$$\tau_x \perp dx; \; \tau_y \perp dy; \quad \tau_z \perp dz.$$

Es ändere sich nun die anfängliche Länge dx um die Strecke $\Delta dx = \Delta'\left(\frac{dx}{2}\right) + \Delta''\left(\frac{dx}{2}\right)$ so zwar, dass sie die dem Punkte (x, y, z) anliegende Fläche gegen den Massenmittelpunkt M im Sinne der $(-x)$ um $\Delta'\left(\frac{dx}{2}\right)$ verschiebt und die gegenüber liegende Fläche im Sinne der $(+x)$ um $\Delta''\left(\frac{dx}{2}\right)$. Die auf jene Flächen wirkenden Kräfte:

$$\sigma_x\, dy\, dz \quad \text{und} \quad \left(\sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx} dx\right) dy\, dz$$

liefern dann zur virtuellen Formänderungsarbeit den Beitrag:

$$\sigma_x\, dy\, dz\, \Delta'\left(\frac{dx}{2}\right) + \left(\sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx}\, dx\right) dy\, dz\, \Delta''\left(\frac{dx}{2}\right)$$

und hierfür darf man nach Streichung der kleinen Grösse vierter Ordnung: $\frac{d\sigma_x}{dx}\, dx\, dy\, dz\, \Delta''\left(\frac{1}{2}\, dx\right)$ setzen:

$$\sigma_x\, dy\, dz\, \Delta dx = \sigma_x \frac{\Delta dx}{dx}\, dV$$

worin $dV = dx\, dy\, dz$ den Inhalt des Körpertheilchens bedeutet.

Hieraus und aus ähnlichen Betrachtungen folgt: Aendern sich die anfänglichen Längen dx, dy, dz um Strecken Δdx, Δdy, Δdz und bezeichnet man die in der Folge *Dehnungen* genannten Verlängerungsverhältnisse mit

$$(38) \qquad \varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}, \qquad \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}$$

so ist der von den Spannungen σ_x, σ_y, σ_z abhängige Theil der virtuellen Formänderungsarbeit dA_v des Körpertheilchens $(dx\,dy\,dz)$ gleich

$$(39) \qquad (\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z)\,dV.$$

Gleichzeitig mit den Dehnungen entstehen Winkeländerungen und in Folge dessen leisten auch die Schubkräfte Arbeit. Es sei, mit Bezugnahme auf Fig. 31

γ_x die Aenderung des Winkels YOZ,
γ_y „ „ „ „ ZOX,
γ_z „ „ „ „ XOY.

Man nennt γ_x, γ_y, γ_z, die *Gleitungen* im Punkte x, y, z; sie seien positiv oder negativ, je nachdem sie Verkleinerungen oder Vergrösserungen der Winkel YOZ, ZOX, XOY vorstellen. Bei Berechnung der in Folge der Gleitungen von den Schubkräften verrichteten virtuellen Formänderungsarbeit darf man wieder die Spannungsunterschiede in den einander gegenüber liegenden Flächen vernachlässigen und den Punkt xyz an Stelle des Massenmittelpunktes als ruhend annehmen.

Aendert sich der Winkel YOZ um γ_x, so verschiebt sich die Fläche YO' im Sinne OZ gegen die Fläche OY' um $\gamma_x\,dy$, wobei die in YO' und senkrecht zu dx wirksame Schubkraft $\tau_x\,dx\,dz$ die virtuelle Arbeit $\tau_x\,dx\,dz\,\gamma_x\,dy$ verrichtet, oder es verschiebt sich die Fläche ZO' im Sinne OY gegen die Fläche OZ' um die Strecke $\gamma_x\,dz$, bei welcher Bewegung die in ZO' und senkrecht zu dx wirkende Schubkraft $\tau_x\,dx\,dy$ die Arbeit $\tau_x\,dx\,dy\,\gamma_x\,dz$ leistet. In beiden Fällen wird die Arbeit

$$\tau_x\gamma_x\,dx\,dy\,dz = \tau_x\gamma_x\,dV$$

erhalten, und ebenso ergeben sich für die den Gleitungen γ_y, γ_z entsprechenden Arbeiten die Ausdrücke $\tau_y\gamma_y\,dV$ und $\tau_z\gamma_z\,dV$, so dass die gesammte virtuelle Formänderungsarbeit der an dem Theilchen $(dx\,dy\,dz)$ angreifenden Flächenkräfte gleich

$$dA_v = (\sigma_x\,\varepsilon_x + \sigma_y\,\varepsilon_y + \sigma_z\,\varepsilon_z + \tau_x\gamma_x + \tau_y\gamma_y + \tau_z\gamma_z)\,dV$$

ist. Für den ganzen Körper erhält man:

$$(40) \qquad A_v = \int(\sigma_x\,\varepsilon_x + \sigma_y\,\varepsilon_y + \sigma_z\,\varepsilon_z + \tau_x\gamma_x + \tau_y\gamma_y + \tau_z\gamma_z)\,dV.$$

Bei unstetigen Spannungen muss der Körper in Theile zerlegt werden, innerhalb welcher alle Spannungen stetig sind. Die Werthe A_v werden für die einzelnen Theile gesondert berechnet und schliesslich addirt.

Setzt man (nach No. 22) A_v gleich der virtuellen Arbeit der äusseren Kräfte Q, so erhält man:

$$\Sigma Q_m \delta_m = \int (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z)\, dV, \tag{41}$$

wo δ_m die den Dehnungen ε_x, ε_y, ε_z und Gleitungen γ_x, γ_y, γ_z entsprechende Verschiebung des Angriffspunktes m der Kraft Q_m im Sinne von Q_m bedeutet, d. i. die Projektion des Weges von m auf die Richtung von Q_m. Zu erinnern ist daran, dass bei Ableitung der Gleichung (41) hinsichtlich der äusseren und inneren Kräfte nur die Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen vorausgesetzt wurde, und dass die Dehnungen, die Gleitungen und die ihnen entsprechenden Verschiebungen δ von den Kräften Q und den Spannungen σ und τ unabhängig zu denken sind und von irgend welchen anderen Ursachen herrühren können.

25. — Wir setzen jetzt fest, dass ε_x, ε_y, ε_z, γ_x, γ_y, γ_z die bei einer gegebenen Angriffsweise des Körpers entstehenden *wirklichen Dehnungen* und *Gleitungen* sind, bezeichnen mit $\overline{Q}$, $\overline{\sigma_x}$, $\overline{\sigma_y}$, $\overline{\sigma_z}$, $\overline{\tau_x}$, $\overline{\tau_y}$, $\overline{\tau_z}$ die äusseren Kräfte und Spannungen eines nur *gedachten* Belastungszustandes, wenden auf den letzteren und auf den wirklichen Formänderungszustand die Gleichung (41) an, und erhalten die Beziehung:

$$\Sigma \overline{Q_m} \delta_m = \int (\overline{\sigma_x} \varepsilon_x + \overline{\sigma_y} \varepsilon_y + \overline{\sigma_z} \varepsilon_z + \overline{\tau_x} \gamma_x + \overline{\tau_y} \gamma_y + \overline{\tau_z} \gamma_z)\, dV, \tag{42}$$

welche der für das Fachwerk abgeleiteten Gleichung (13) gegenüber zu stellen ist, und in welcher δ_m die Projektion des wirklichen Weges des Punktes m auf die gedachte Kraft $\overline{Q_m}$ bedeutet.

Die wirklichen Dehnungen und Gleitungen sollen hier nur für den isotropen (d. h. in allen Punkten gleichbeschaffenen) Körper angegeben werden. Es wird ein spannungsloser Anfangszustand angenommen. Die anfängliche Temperatur ändere sich im Punkte (x, y, z) um t.

Die Seite dx des Körpertheilchens $(dx\, dy\, dz)$ erleidet, wenn die Spannung σ_x allein wirkt, die Dehnung $\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\sigma_x}{E}$, während die Temperaturänderung den Einfluss $\frac{\Delta dx}{dx} = \varepsilon t$ erzeugt und in Folge von σ_y und σ_z entsteht: $\frac{\Delta dx}{dx} = -\frac{\sigma_y + \sigma_z}{mE}$, wobei $\frac{1}{m}$ die Werthziffer der Querdehnung ($= \frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{3}$ für Eisen und Stahl) bedeutet.*) Das Zusammenwirken aller Ursachen ruft die Dehnung hervor:

*) Vergl. Band I, Seite 85.

$$
(43)\qquad \begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} - \dfrac{\sigma_y + \sigma_z}{mE} + \varepsilon t \quad \text{und ebenso ergiebt sich:} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y}{E} - \dfrac{\sigma_z + \sigma_x}{mE} + \varepsilon t, \\ \varepsilon_z = \dfrac{\sigma_z}{E} - \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{mE} + \varepsilon t, \end{cases}
$$

während die nur von den Schubspannungen abhängigen Gleitungen die Werthe annehmen:

$$
(44)\qquad \gamma_x = \frac{\tau_x}{G}, \qquad \gamma_y = \frac{\tau_y}{G}, \qquad \gamma_z = \frac{\tau_z}{G},
$$

wobei

$$
(45)\qquad G = \frac{mE}{2\,(m+1)}
$$

die *Schub-Elasticitätsziffer* (auch *Gleitmodul* genannt) bedeutet.*)

b. Anwendung der Gleichung (42).

26. — Wir werden bei Berechnung der Stabwerke die Gleichung (42) in derselben Weise benutzen wie die Gleichung (13) bei Untersuchung des Fachwerks. Zunächst werden wir die nach bestimmten Richtungen wirkenden Seitenkräfte C der Stützenwiderstände sowie die Spannungen σ und τ als lineare Funktionen der gegebenen Lasten P und gewisser statisch nicht bestimmbarer Grössen X', X'', X''' . . . darstellen, und zwar in der Form:

$$
(46)\qquad \begin{cases} C = C_0 - C'X' - C''X'' - C'''X''' - \dots \\ \sigma_x = \sigma_{x0} - \sigma_x' X' - \sigma_x'' X'' - \sigma_x''' X''' - \dots \\ \sigma_y = \sigma_{y0} - \sigma_y' X' - \sigma_y'' X'' - \sigma_y''' X''' - \dots \\ \sigma_z = \sigma_{z0} - \sigma_z' X' - \sigma_z'' X'' - \sigma_z''' X''' - \dots \\ \tau_x = \tau_{x0} - \tau_x' X' - \tau_x'' X'' - \tau_x''' X''' - \dots \\ \tau_y = \tau_{y0} - \tau_y' X' - \tau_y'' X'' - \tau_y''' X''' - \dots \\ \tau_z = \tau_{z0} - \tau_z' X' - \tau_z'' X'' - \tau_z''' X''' - \dots \end{cases}
$$

Die mit dem Zeiger 0 behafteten Werthe sind Funktionen ersten Grades der Lasten P und unabhängig von den Grössen X', X'', ... Die Werthe C', C'' . . . , σ', σ'' . . . , τ', τ'' . . . sind unabhängig von den P und X.

Es bedeuten:

---

*) Vergl. u. A. *Grashof,* Theorie der Elasticität und Festigkeit, 2. Auflage, Berlin 1878, Seite 24 und 30.

C', σ', τ' die Stützenwiderstände und Spannungen für den Zustand $X' = -1$,
C'', σ'', τ'' die Stützenwiderstände und Spannungen für den Zustand $X'' = -1$ u. s. w.

Wird nun die Gleichung (42) der Reihe nach auf die Belastungszustände: $X' = -1$, $X'' = -1$, ... angewendet und jedesmal auf den wirklichen Verschiebungszustand, so ergeben sich die zur Berechnung der Grössen X', X'', ... ausreichenden Bedingungen:

$$(47) \quad \begin{cases} L' = \int (\sigma_x' \varepsilon_x + \sigma_y' \varepsilon_y + \sigma_z' \varepsilon_z + \tau_x' \gamma_x + \tau_y' \gamma_y + \tau_z' \gamma_z)\, dV \\ L'' = \int (\sigma_x'' \varepsilon_x + \sigma_y'' \varepsilon_y + \sigma_z'' \varepsilon_z + \tau_x'' \gamma_x + \tau_y'' \gamma_y + \tau_z'' \gamma_z)\, dV \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

unter L', L'' ... die den Zuständen $X' = -1$, $X'' = -1$, ... entsprechenden virtuellen Arbeiten der Auflagerkräfte verstanden.

27. — Wird die durch bestimmte Dehnungen und Gleitungen $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ bedingte gegenseitige Verschiebung δ_m zweier Punkte m und m_1 des Körpers gesucht, so bringe man in m und m_1 zwei entgegengesetzt gleiche, in die Gerade mm_1 fallende und von einander weg gerichtete Kräfte *Eins* an (Fig. 9) und stelle für diesen gedachten Belastungszustand und für den wirklichen Verschiebungszustand die Gleichung (42) auf. Man erhält:

$$(48) \quad 1 \cdot \delta_m + \bar{L} = \int (\bar{\sigma}_x \varepsilon_x + \bar{\sigma}_y \varepsilon_y + \bar{\sigma}_z \varepsilon_z + \bar{\tau}_x \gamma_x + \bar{\tau}_y \gamma_y + \bar{\tau}_z \gamma_z)\, dV,$$

worin $\bar{\sigma}$, $\bar{\tau}$ und $\bar{C}$ Spannungen und Stützenwiderstände bedeuten, welche mit der Belastungseinheit des Punktpaares m, m_1 im Gleichgewichte sind.

Auf diese Weise lassen sich alle die Aufgaben behandeln, welche in No. 9, 10, 14 für das Fachwerk gelöst worden sind.

c. Das Clapeyron'sche Gesetz und die Sätze von Maxwell und Betti.

28. — Es wird vorausgesetzt, dass die äusseren und inneren Kräfte allmählich von Null aus wachsen, dass also auch die Umgestaltung des Körpers allmählich vor sich geht, ohne dass Schwingungen entstehen. Für jede der unendlich kleinen Formänderungen, in welche sich die ganze Formänderung zerlegen lässt, gilt die Gleichung (42) und es ergiebt sich daher die Beziehung

$$(49) \quad \Sigma \int Q\, d\delta = \int (\sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_x d\gamma_x + \tau_y d\gamma_y + \tau_z d\gamma_z)\, dV,$$

wo Q, σ_x, σ_y, σ_z, τ_x, τ_y, τ_z die Werthe der äusseren Kräfte und Spannungen in dem Augenblicke bedeuten, in welchem die Verschiebungen δ und $d\delta$ zunehmen und die Dehnungen und Gleitungen um $d\varepsilon_x$, $d\varepsilon_y$, $d\varepsilon_z$, $d\gamma_x$, $d\gamma_y$, $d\gamma_z$.

Der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (48) giebt die *mechanische Arbeit der äusseren Kräfte* Q an, der Ausdruck rechts die *wirkliche Formänderungsarbeit* A des Körpers. Behält der Körper in jedem Punkte die anfängliche Temperatur, ist also $t = 0$, so ergiebt sich:

$$d\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(d\sigma_x - \frac{1}{m}d\sigma_y - \frac{1}{m}d\sigma_z\right); \qquad d\gamma_x = \frac{1}{G}\tau_x,$$

$$d\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(d\sigma_y - \frac{1}{m}d\sigma_z - \frac{1}{m}d\sigma_x\right); \qquad d\gamma_y = \frac{1}{G}\tau_y,$$

$$d\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(d\sigma_z - \frac{1}{m}d\sigma_x - \frac{1}{m}d\sigma_y\right); \qquad d\gamma_z = \frac{1}{G}\tau_z, \text{ also}$$

$$\begin{aligned}\sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_x d\gamma_x + \tau_y d\gamma_y + \tau_z d\gamma_z \\ = \frac{1}{E}\left[\sigma_x d\sigma_x + \sigma_y d\sigma_y + \sigma_z d\sigma_z - \frac{1}{m}d(\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y)\right] \\ + \frac{1}{G}[\tau_x d\tau_x + \tau_y d\tau_y + \tau_z d\tau_z]\end{aligned}$$

und hieraus durch Integration:

$$(50) \quad A = \frac{1}{2}\int\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \frac{2}{m}(\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y)\right]\frac{dV}{E} + \frac{1}{2}\int(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)\frac{dV}{G}.$$

Nun gilt aber auch andererseits die Gleichung:

$$\begin{aligned}\Sigma Q\delta &= \int(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_x\gamma_x + \tau_y\gamma_y + \tau_z\gamma_z)\,dV, \\ &= \int\left[\sigma_x\left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m}\right) + \sigma_y\left(\sigma_y - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{m}\right)\right. \\ &\left. + \sigma_z\left(\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m}\right)\right]\frac{dV}{E} + \int(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)\frac{dV}{G},\end{aligned}$$

und diese lässt sich leicht umformen in

$$\Sigma Q\delta = 2A.$$

Da nun, nach (50), $\Sigma\int Q\,d\delta = A$ ist, so ergiebt sich:

$$\Sigma \int Q\,d\delta = \Sigma \frac{Q\delta}{2}$$

und hieraus folgt, dass das in No. 8 für das Fachwerk bewiesene *Clapeyron*'sche *Gesetz* auch für den isotropen festen Körper gilt.

Aus der Gültigkeit des Clapeyron'schen Gesetzes folgt aber auch ohne weiteres diejenige des in No. 17 für den Fall $t = 0$ und $L = 0$ abgeleiteten *Maxwell*'schen *Lehrsatzes*.

29. — Um den Maxwell'schen Satz noch auf eine ähnliche Weise wie in No. 18 als besonderen Fall des allgemeineren Gesetzes von *Betti* herzuleiten, nehmen wir an, dass auf den Körper zuerst beliebige Belastungen P_m wirken. Den Körper denken wir durch drei einander rechtwinklig schneidende Flächen-Schaaren in unendlich kleine Theilchen zerlegt, in deren Seitenflächen nur Normalspannungen auftreten, welche dann Hauptspannungen heissen und mit σ_1', σ_2', σ_3' bezeichnet werden sollen. Die entsprechenden Dehnungen sind (wegen $t = 0$)

$$(51)\qquad \begin{cases} \varepsilon_1' = \left[\sigma_1' - \frac{1}{m}(\sigma_2' + \sigma_3')\right]\frac{1}{E} \\ \varepsilon_2' = \left[\sigma_2' - \frac{1}{m}(\sigma_3' + \sigma_1')\right]\frac{1}{E} \\ \varepsilon_3' = \left[\sigma_3' - \frac{1}{m}(\sigma_1' + \sigma_2')\right]\frac{1}{E}; \end{cases}$$

die Gleitungen sind $= 0$.

Jetzt ersetzen wir die Belastungen P_m durch andere Belastungen P_n, behalten aber die vorhin angenommene Zerlegung des Körpers bei. Es treten dann Normalspannungen σ_1'', σ_2'', σ_3'' auf, und diese erzeugen Dehnungen:

$$(52)\qquad \begin{cases} \varepsilon_1'' = \left[\sigma_1'' - \frac{1}{m}(\sigma_2'' + \sigma_3'')\right]\frac{1}{E} \\ \varepsilon_2'' = \left[\sigma_2'' - \frac{1}{m}(\sigma_3'' + \sigma_1'')\right]\frac{1}{E} \\ \varepsilon_3'' = \left[\sigma_3'' - \frac{1}{m}(\sigma_1'' + \sigma_2'')\right]\frac{1}{E}. \end{cases}$$

Ausserdem werden durch die P_n Schubspannungen τ'' und Gleitungen γ'' hervorgerufen.

Bezeichnen wir nun mit (δ_{mn}) den Weg irgend einer Belastung P_m für den Fall, dass auf den Körper nur die Belastungen P_n wirken, und mit (δ_{nm}) den Weg irgend einer Belastung P_n in Folge ausschliesslicher Wirkung der P_m, und wenden wir die Gleichung (42) zuerst an

auf den Belastungszustand (P_m) und den hiervon unabhängigen, den Belastungen P_n entsprechenden Verschiebungszustand,

sodann:

auf den Belastungszustand (P_n) und den hiervon unabhängigen, den P_m entsprechenden Verschiebungszustand,

so erhalten wir, da die Stützenwiderstände, der Voraussetzung gemäss, keine Arbeit verrichten, die Gleichungen:

$$\Sigma P_m (\delta_{mn}) = \int (\sigma_1' \varepsilon_1'' + \sigma_2' \varepsilon_2'' + \sigma_3' \varepsilon_3'')\, dV$$

$$\Sigma P_n (\delta_{nm}) = \int (\sigma_1'' \varepsilon_1' + \sigma_2'' \varepsilon_2' + \sigma_3'' \varepsilon_3')\, dV,$$

bei deren Aufstellung zu beachten ist, dass den Gleitungen γ'' die Schubspannungen $\tau' = 0$ gegenüberstehen und den Schubspannungen τ'' die Gleitungen $\gamma' = 0$. (In der ersten Veröffentlichung dieses Beweises in des Verfassers Buch: „Die neueren Methoden der Festigkeitslehre u. s. w." Seite 176 wurden die σ'' irrthümlich als Hauptspannungen bezeichnet.)

Mit Hilfe von (51) und (52) lässt sich nun leicht nachweisen, dass

$$\sigma_1' \varepsilon_1'' + \sigma_2' \varepsilon_2'' + \sigma_3' \varepsilon_3'' = \sigma_1'' \varepsilon_1' + \sigma_2'' \varepsilon_2' + \sigma_3'' \varepsilon_3'$$

ist, und deshalb auch

$$\Sigma P_m (\delta_{mn}) = \Sigma P_n (\delta_{nm}).$$

Hieraus aber folgt, wie auf Seite 34, als besonderer Fall:

$$\delta_{mn} = \delta_{nm}.$$

d. Die Castigliano'schen Sätze.

30. — Betrachtet man die statisch nicht bestimmbaren Grössen X (welche sich stets auf Kräfte zurückführen lassen) ebenso wie die P als unabhängige Veränderliche der Gleichungen (46), d. h. rechnet man die X vorübergehend zu den Belastungen, so dürfen die Werthe $\sigma', \sigma'', \ldots \tau', \tau'', \ldots$ als Differentialquotienten der σ und τ aufgefasst werden; denn es ist

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial X'} = -\sigma_x'; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial X'} = -\sigma_y'; \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial X'} = -\sigma_z'; \quad \frac{\partial \tau_x}{\partial X'} = -\tau_x' \ldots \text{u. s. w.}$$

Die Gleichungen (47) lassen sich dann auf die gemeinsame Form bringen

$$(53) \qquad -L_X = \int \Bigl(\varepsilon_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial X} + \varepsilon_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial X} + \varepsilon_z \frac{\partial \sigma_z}{\partial X} + \gamma_x \frac{\partial \tau_x}{\partial X} + \gamma_y \frac{\partial \tau_y}{\partial X} + \gamma_z \frac{\partial \tau_z}{\partial X} \Bigr)\, dV,$$

wobei X irgend eine der statisch nicht bestimmbaren Grössen und L_X die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte für den Zustand $X = -1$ bedeutet. Führt man für die Dehnungen und Gleitungen die durch (43) und (44) gegebenen Werthe ein, so gelangt man zu dem übersichtlichen Gesetze:

$$\frac{\partial A_i}{\partial X} - L_X = 0, \tag{54}$$

wo

$$A_i = A + \int (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \varepsilon t \, dV \tag{55}$$

und A gleich der wirklichen Formänderungsarbeit ist. (Siehe Gleichung 50.)

Verrichten die Stützenwiderstände keine Arbeit ($L_X = 0$) und findet an keiner Stelle des Körpers eine Aenderung der anfänglichen Temperatur statt ($t = 0$), so geht (54) über in

$$\frac{\partial A}{\partial X} = 0 \tag{56}$$

und diese Gleichung sagt aus:

> *dass die statisch nicht bestimmbaren Grössen X die Formänderungsarbeit A, welche als Funktion der zuerst unabhängig veränderlich gedachten Werthe X darzustellen ist, zu einem Minimum machen.*

Dieses *Gesetz der kleinsten Formänderungsarbeit* ist zuerst von *Castigliano* scharf bewiesen worden.

Setzt man in Gleichung (41):

$$\Sigma Q_m \delta_m = \Sigma P_m \delta_m + L,$$

wobei $\Sigma P_m \delta_m$ die virtuelle Arbeit der Belastungen P_m und L diejenige der Stützenwiderstände bedeutet, und beachtet, dass Gleichung (41) auch für den Fall gilt, dass die δ, ε_x, ε_y, ε_z, τ_x, τ_y, τ_z von den Kräften Q unabhängig sind, so findet man durch theilweise Differentiation jener Gleichung nach P_m, bei unveränderlich angenommener Formänderung:

$$\delta_m + \frac{\partial L}{\partial P_m} = \int \left(\varepsilon_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial P_m} + \varepsilon_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial P_m} + \varepsilon_z \frac{\partial \sigma_z}{\partial P_m} + \gamma_x \frac{\partial \tau_x}{\partial P_m} + \gamma_y \frac{\partial \tau_y}{\partial P_m} + \gamma_z \frac{\partial \tau_z}{\partial P_m} \right) dV$$

und diese Beziehung lässt sich umformen in

$$\delta_m = \frac{\partial A_i}{\partial P_m} - \frac{\partial L}{\partial P_m}; \tag{57}$$

sie liefert, falls die Stützenwiderstände keine Arbeit leisten und $t = 0$

ist, das ebenfalls von *Castigliano* bewiesene Gesetz:

$$\delta_m = \frac{\partial A}{\partial P_m}. \tag{58}$$

Dasselbe lässt sich auch wie folgt ableiten. Auf einen Körper mögen die Belastungen P_a, P_b, ... P_m, ... wirken; ihre Wege seien δ_a, δ_b, ... δ_m, ... (vergl. Seite 31). Im Falle $L = 0$ und $t = 0$ ist

$$\begin{aligned}
\delta_a &= \delta_{aa} P_a + \delta_{ab} P_b + \ldots + \delta_{am} P_m + \ldots \\
\delta_b &= \delta_{ba} P_a + \delta_{bb} P_b + \ldots + \delta_{bm} P_m + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\delta_m &= \delta_{ma} P_a + \delta_{mb} P_b + \ldots + \delta_{mm} P_m + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Wächst P_m um ∂P_m, während die übrigen Belastungen ungeändert bleiben, so nehmen δ_a, δ_b, ... δ_m ... zu um

$$\partial \delta_a = \delta_{am} \partial P_m; \quad \partial \delta_b = \delta_{bm} \partial P_m; \ldots \partial \delta_m = \delta_{mm} \partial P_m; \ldots$$

und die Formänderungsarbeit A, welche ebenso gross ist wie die mechanische Arbeit der äusseren Kräfte, wächst um

$$\partial A = P_a \partial \delta_a + P_b \partial \delta_b + \ldots + P_m \partial \delta_m + \ldots$$

Man erhält

$$\partial A = (\delta_{am} P_a + \delta_{bm} P_b + \ldots + \delta_{mm} P_m + \ldots) \partial P_m,$$

wofür man (nach dem Gesetze: $\delta_{mn} = \delta_{nm}$) auch schreiben darf:

$$\frac{\partial A}{\partial P_m} = \delta_{ma} P_a + \delta_{mb} P_b + \ldots + \delta_{mm} P_m + \ldots = \delta_m.$$

Da die Gleichung (41) hinsichtlich der äusseren und inneren Kräfte nur die Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen verlangt, so ist es erlaubt, bei Anwendung der Formeln (57) und (58) die statisch nicht bestimmbaren Grössen X als willkürliche Veränderliche aufzufassen. Differentiirt man also nach P_m, so darf man nicht nur alle übrigen Belastungen sondern auch sämmtliche X als unveränderlich ansehen.

Wendet man die *Castigliano*'schen Sätze auf das Fachwerk an (welches ja nur ein besonderer Fall des eben untersuchten Körpers ist) so hat man zu setzen:

$$A_i = \Sigma \frac{S^2 s}{2EF} + \Sigma \varepsilon t S s. \tag{59}$$

Literatur zur Einleitung.

1. **Lamé**, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, Paris 1852 und 1866 (2. Auflage).

2. Clerk **Maxwell**, *On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames*, Philosophical Magazine, Band 27 (1864), Seite 294. Diese Abhandlung enthält die erste allgemeine Theorie des statisch unbestimmten Fachwerks, allerdings nur für den Fall eines spannungslosen Anfangszustandes und unter der Voraussetzung, dass keine Temperaturänderungen eintreten. Die Grundlage bildet das in unserem Buche (Seite 32) der Maxwell'sche Lehrsatz genannte Gesetz, welches aber nur für Verschiebungen, nicht auch für Drehungen bewiesen wird.

3. **Mohr**, *Beitrag zur Theorie des Fachwerks*, Zeitschr. des Hannov. Arch. und Ing.-Vereins 1874 und 1875, fortgesetzt im Civilingenieur 1885. In dieser Arbeit wird, vom Gesetze der virtuellen Verschiebungen ausgehend, die erste vollständige Theorie des statisch unbestimmten Fachwerks aufgestellt und dabei auch der Satz von der Gegenseitigkeit der elastischen Formänderungen entwickelt, letzterer zwar auch nur für Verschiebungen, jedoch in einer Weise, welche die Verallgemeinerung dieses Satzes durch blosse Aenderung der Bedeutung der Buchstaben möglich macht.

4. **Castigliano**, *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques*, Turin (bei Negro) 1879. An der Spitze dieses hervorragenden Werkes steht der mit Hilfe des Clapeyron'schen Gesetzes entwickelte Satz von der Abgeleiteten der Formänderungsarbeit (Gleichung 58 auf Seite 51 unseres Buches) sowie der aus diesem folgende Satz von der kleinsten Formänderungsarbeit. Castigliano wendet sein Verfahren auch auf die Untersuchung von Stabgebilden an, welche auf Biegung, Torsion und Abscheerung beansprucht werden.

5. **Fränkel**, entwickelt in der Abhandlung: *Das Princip der kleinsten Arbeit der inneren Kräfte elastischer Systeme und seine Anwendung auf die Lösung baustatischer Aufgaben*, (Zeitschrift des Hannov. Arch. u. Ing.-Vereins 1882) — unabhängig von Castigliano — den Satz von der kleinsten Formänderungsarbeit, und zwar ebenfalls zuerst für das Fachwerk, dann aber auch für den isotropen festen Körper.

6. **Castigliano**, *Intorno ad una proprietà dei sistemi elastici,* Atti delle Scienzi di Torino, Band 17 (1882) Seite 705; enthält die erste allgemeine (d. h. für den beliebig geformten isotropen elastischen Körper giltige) Entwickelung des Maxwell'schen Satzes, sowie einen Bericht über das auf Seite 34 u. 48 unseres Buches abgeleitete Gesetz von **Betti.** Letzteres schliesst den Maxwell'schen Satz als besonderen Fall ein und wird von Betti in der Form gegeben:

$$\int_S \rho\,(Xu' + Yv' + Zw')\,dS + \int_s (Lu' + Mv' + Nw')\,ds$$

$$= \int_S \rho\,(X'u + Y'v + Z'w)\,dS + \int_s (L'u + M'v + N'w)\,ds.$$

Dabei bedeuten: $\rho X dS$, $\rho Y dS$, $\rho Z dS$ die an einem Körpertheilchen $dS = dx\,dy\,dz$ angreifenden, den Koordinatenachsen x, y, z parallelen Massenkräfte (ρ = Dichtigkeit an der Stelle xyz), ferner Lds, Mds, Nds die auf ein Oberflächentheilchen ds wirkenden ebenfalls den Koordinatenachsen x, y, z parallelen äusseren Kräfte, und u, v, w die von allen diesen Kräften herrührenden Verschiebungen eines Punktes (xyz) im Sinne der x, y, z, während u', v', w' durch die Kräfte $\rho X'dS$, $\rho Y'dS$, $\rho Z'dS$, $L'ds$, $M'ds$, $N'ds$ erzeugt werden.

7. **Swain**, *On the application of the principle of virtual velocities to the determination of the deflection and stresses of frames.* Journal of the Franklin Institute, 1883, Febr. bis April. Seite 102, 194, 250.

8. **Melan**, *Ueber den Einfluss der Wärme auf elastische Systeme.* Wochenschrift des österreich. Arch. u. Ing.-Ver. 1883, S. 183 u. 202. Erweiterung des Castigliano'schen Satzes von der kleinsten Formänderungsarbeit.

9. **Müller-Breslau**, *Der Satz von der Abgeleiteten der ideellen Formänderungsarbeit.* Zeitschr des Arch. u. Ing.-Ver. zu Hannover, 1884, S. 211. Erweiterung der Sätze Castigliano's.

10. **Krohn**, *Der Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen und Anwendung desselben zur Berechnung statisch unbestimmter Fachwerkträger;* Zeitschrift des Hannov. Arch. u. Ing.-Vereins 1884. Herleitung des Maxwell'schen Satzes und Anwendung desselben auf die Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke.

11. **Melan**, *Beitrag zur Berechnung statisch unbestimmter Stabsysteme.* Zeitschrift des österreich. Arch. u. Ing.-Ver. 1884, S. 100.

12. **Weyrauch**, *Arbeitsbedingungen für statisch unbestimmte Systeme.* Wochenblatt für Arch. u. Ing. 1884, S. 200.

13. **Müller-Breslau**, *Bedingungsgleichungen für statisch unbestimmte Körper.* Wochenblatt für Arch. u. Ing. 1884.

14. **Weyrauch**, *Theorie elastischer Körper.* Leipzig (bei Teubner) 1884.

15. **Müller-Breslau**, *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen*, Leipzig 1886 (Baumgärtner's Buchhandlung). Hier wird darauf hingewiesen, dass der Maxwell'sche Satz nicht nur für Verschiebungen sondern auch für Drehungen gilt.

16. Forchheimer, *Die Gegenseitigkeit der Verschiebungen*, Zeitschr. des österreich. Ing. u. Arch. Vereins 1886; giebt u. A. eine sehr übersichtliche, auf das Clapeyron'sche Gesetz sich stützende und auf Seite 32 dieses Buches wiedergegebene Ableitung des Maxwell'schen Satzes, von der dasselbe gilt wie von der Beweisführung Mohr's.

17. Land. *Die Gegenseitigkeit elastischer Formänderungen* u. s. w. Wochenblatt für Baukunde 1887. Seite 14.

ERSTE ABTHEILUNG.

Formänderung ebener Fachwerke. — Untersuchung der ebenen, statisch unbestimmten Fachwerke.

---

die in einem neuen Knoten d miteinander verbunden sind, hierauf an zwei beliebige Knoten dieses Stabgebildes wieder zwei neue Stäbe mit einem neuen Knoten e anschliesst, u. s. f. Die Bestimmung der durch *gegebene* Aenderungen der Stablängen hervorgerufenen Verschiebungen der Knotenpunkte eines derartigen Fachwerks stützt sich auf die Lösung der folgenden Aufgabe.

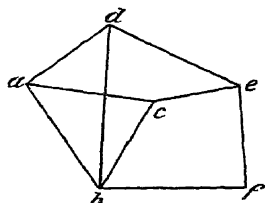



Fig. 33.

32. Erste Hauptaufgabe. Der Knotenpunkt c ist mit den Knoten a und b durch zwei Stäbe 1 und 2 verbunden, deren Längen s_1 und s_2 sich um die gegebenen Strecken $\Delta 1$ und $\Delta 2$ ändern, während sich die Punkte a und b in die neuen Lagen a' und b' bewegen. Gesucht ist die Verschiebung cc' des Punktes c (der mit a und b nicht in derselben Geraden liegen darf). Fig. 34a.

Um die neue Lage von c durch Zeichnung zu bestimmen, löse man bei c die Verbindung beider Stäbe, verschiebe den Stab 1 parallel

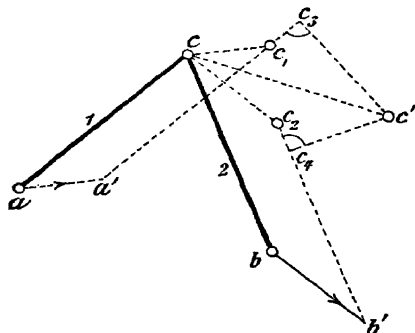



Fig. 34a.

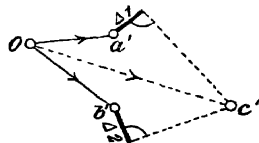



Fig. 34b.

mit sich selbst in die Lage $a'c_1$ und den Stab 2 parallel mit sich selbst in die Lage $b'c_2$. Hierauf ändere man die Längen der Stäbe in der vorgeschriebenen Weise. Wird z. B. der Stab 1 gedehnt, der Stab 2 verkürzt, so verlängere man $a'c_1$ um $\overline{c_1 c_3} = \Delta 1$ und bringe von $b'c_2$ die Strecke $\overline{c_2 c_4} = \Delta 2$ in Abzug. Nun schlage man mit den neuen Stablängen $a'c_3$ und $b'c_4$ als Halbmesser Kreisbögen, deren Mittelpunkte a' und b' sind. Der Schnittpunkt c' jener Bögen giebt die gesuchte neue Lage des Punktes c an. In dem hier vorausgesetzten Falle verschwindend kleiner Verschiebungen dürfen die Kreisbögen $c_3 c'$ und $c_4 c'$ durch die auf den Geraden $a'c_3$ und $b'c_4$ errichteten Lothe ersetzt werden.

Es empfiehlt sich nun, die Verschiebung cc' in einer besonderen Figur und in *gehöriger Vergrösserung* darzustellen. Von einem beliebig gewählten Punkte O aus (welcher der *Ursprung* oder der *Pol* genannt wird, Fig. 34b) trage man die gegebenen Verschiebungen $Oa' = aa'$ und $Ob' = bb'$ der Punkte a und b nach Grösse, Richtung und Sinn auf. An die *Polstrahlen* Oa' und Ob' füge man in a' und b' die den Stäben 1 und 2 parallelen Längenänderungen $\Delta 1$ und $\Delta 2$ und errichte in den Endpunkten der letzteren Lothe, deren Schnittpunkt c' dann die verlangte Verschiebung des Punktes c bestimmt; dieselbe wird nach Grösse, Richtung und Sinn durch den Polstrahl Oc' dargestellt.

Besonders zu achten ist auf den Sinn, in welchem die Längenänderungen $\Delta 1$ und $\Delta 2$ anzutragen sind. Man merke Folgendes:

Ist der Knoten c mit a durch einen Stab 1 verbunden, welcher gedehnt wird, so verschiebt sich c gegen a im Sinne ac, und es muss deshalb $\Delta 1$ an a' im Sinne ac gefügt werden.

Ist der Knoten c mit b durch einen Stab 2 verbunden, welcher verkürzt wird, so verschiebt sich c gegen b im Sinne cb, und es muss deshalb $\Delta 2$ an b' im Sinne cb angetragen werden.

Durch wiederholte Lösung der eben behandelten Aufgabe ist man im Stande, die Verschiebungen der Knotenpunkte einer gegliederten Scheibe von der in No. 31 beschriebenen Art für den Fall zu bestimmen, dass die Richtungslinie eines Stabes (der im allgemeinen einem der beiden Dreiecke abc und abd, Fig. 33, angehören muss) ungeändert bleibt und die Verschiebung eines Punktes der Mittellinie dieses Stabes gleich

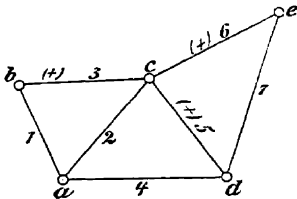
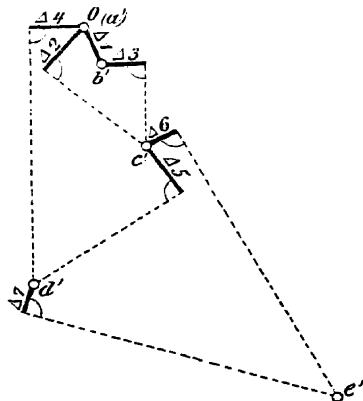



Fig. 35a. Fig. 35b.

Null ist. Als Beispiel wählen wir das in der Figur 35a dargestellte Fachwerk und setzen voraus, dass der Punkt a und die Richtung des

Stabes 1 festliegen. Die in der Figur mit dem Zeichen (+) versehenen Stäbe 3, 5, 6 mögen Dehnungen, alle übrigen aber Verkürzungen erleiden.

Punkt O in Fig. 35b ist der beliebig angenommene Pol. Die Verschiebung von a ist gleich Null, mithin fällt der Punkt a' mit O zusammen. Die Verschiebung Ob' des Punktes b ist gleich der Verkürzung $\Delta 1$ des Stabes 1. Der Knoten c wird mit a durch den Stab 2 und mit b durch den Stab 3 verbunden, er nähert sich a um $\Delta 2$ und entfernt sich von b um $\Delta 3$. Trägt man also an a' im Sinne ca die Strecke $\Delta 2 \parallel 2$ an und an b' im Sinne bc die Strecke $\Delta 3 \parallel 3$ und errichtet auf diesen Strecken in ihren Endpunkten Lothe, so bestimmt deren Schnittpunkt die Verschiebung Oc' des Punktes c. Der Knoten d ist mit a und c durch 4 bezieh. 5 verbunden, seine Verschiebung Od' erhält man, wenn man $\Delta 4 \parallel 4$ an a' im Sinne da anträgt, ferner $\Delta 5 \parallel 5$ an c' im Sinne cd, und auf $\Delta 4$ und $\Delta 5$ in deren Endpunkten Lothe errichtet, deren Schnittpunkt der Punkt d' ist. Auf dieselbe Weise wird Punkt e' bestimmt.

Die Figur 35b, deren Polstrahlen Ob', Oc', ... nach Grösse, Richtung und Sinn die Verschiebungen der Knoten b, c, ... darstellen, nennen wir den *Verschiebungsplan* des Fachwerks $abcde$ oder auch — nach dem Erfinder des vorstehenden Verfahrens — einen *Williot*'schen Verschiebungsplan.

33. Zusammensetzung der Verschiebungen in Folge von zwei getrennt betrachteten, verschwindend kleinen Bewegungen. — Bewegung einer starren Scheibe. Will man die Formveränderung einer irgendwie gestützten, gegliederten Scheibe, die aber äusserlich statisch bestimmt sein möge, untersuchen, so nehme man zuerst die Richtung eines Stabes und einen Punkt der Achse dieses Stabes als festliegend an, zeichne den Verschiebungsplan auf die vorhin beschriebene Weise, und ertheile hierauf der Scheibe — *die jetzt als starr anzusehen ist* — eine Bewegung, durch welche die wirklichen Auflagerbedingungen erfüllt werden. Den Weg, den irgend ein Knotenpunkt m in Folge dieser zweiten Bewegung zurücklegt, stelle man durch einen Polstrahl $m''O$ (Fig. 36) dar, der *nach* dem Pole hinzeigt, weil hierdurch die Zusammensetzung dieser Verschiebung mit der zuerst gefundenen elastischen Verschiebung Om' erleichtert wird. Denn es giebt nun die Strecke $m''m'$ nach Grösse, Richtung und Sinn den Weg des Knotens m für den Fall an, dass die beiden getrennt betrachteten Bewegungen gleichzeitig erfolgen.

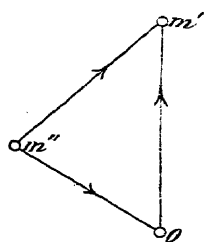



Fig. 36.

Die Verschiebungen der Punkte einer starren Scheibe erhält man unmittelbar durch Anwendung des Satzes, dass sich jede verschwindend kleine Bewegung einer starren Figur auf eine Drehbewegung um einen festen Punkt $\mathfrak{P}$ zurückführen lässt (vergl. Band I, Seite 201). Stellen nämlich die Polstrahlen $a''O$, $b''O$, $c''O$, ... (Fig. 37) nach Grösse, Richtung und Sinn die Verschiebungen der Knoten a, b, c, ... dar, so muss sein

(I) $\quad a''O \perp a\mathfrak{P}; \quad b''O \perp b\mathfrak{P}; \quad c''O \perp c\mathfrak{P}; \ldots;$

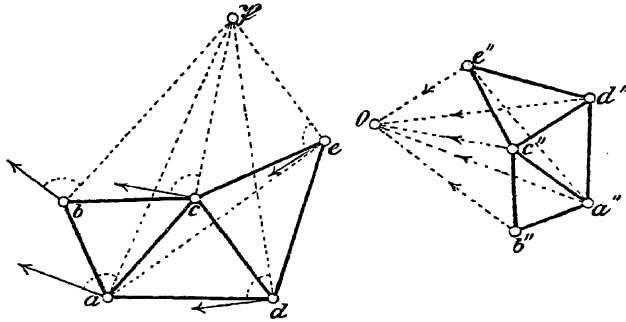



Fig. 37.

denn die Richtung der Verschiebung eines jeden Punktes einer starren Figur ist rechtwinklig zu der Geraden, welche diesen Punkt mit dem augenblicklichen Drehpunkte verbindet, und weiter ergiebt sich

(II) $\quad \overline{a''O} : \overline{b''O} : \overline{c''O} : \ldots\ldots = \overline{a\mathfrak{P}} : \overline{b\mathfrak{P}} : \overline{c\mathfrak{P}} : \ldots\ldots;$

weil sich die Verschiebungen der Punkte a, b, c, ... zu einander verhalten wie die entsprechenden Geschwindigkeiten und die letzteren wie die Entfernungen der Punkte vom Drehpol $\mathfrak{P}$.

Aus den Beziehungen (I) und (II) folgt aber:

1. Verbindet man die Punkte a'', b'', ... des Verschiebungsplanes so durch gerade Linien, dass jedem Fachwerkstabe ik eine Gerade $i''k''$ entspricht, so bilden diese Geraden eine Figur, welche der sich bewegenden starren Scheibe ähnlich ist.

2. Die Verbindungsgerade zweier beliebiger Punkte m, n der Scheibe ist rechtwinklig zu der Verbindungsgeraden der entsprechenden Punkte m'', n''. (Es ist beispielsweise in Fig. 37: $a''b'' \perp ab$; $a''e'' \perp ae$.)

Hat man also mit Hilfe der Auflagerbedingungen zwei Punkte der Figur $a''b''c''$ ... bestimmt, so ist man im Stande diese Figur zu zeichnen.

Es sei noch hervorgehoben, dass sich die vorstehenden Ergebnisse auch aus den in No. 32 entwickelten Gesetzen ableiten lassen. Werden beispielsweise die Aenderungen $\Delta 5$, $\Delta 6$, $\Delta 7$ der Seiten des Stabdreiecks cde in Fig. 35a gleich Null angenommen, so entspricht diesem Dreieck in der Fig. 35b ein ähnliches Dreieck $c'd'e'$, dessen Seiten rechtwinklig zu den entsprechenden Seiten des Dreiecks cde sind. Auch aus Fig. 34 folgt ohne weiteres, dass der Verbindungsgeraden zweier starr mit einander verbundener Punkte a und c (wegen $\Delta 1 = 0$) im Verschiebungsplane eine zu ac rechtwinklige Gerade $a'c'$ entspricht.

34. Fachwerkträger mit einem festen und einem beweglichen Auflagergelenk. Gesucht ist der Verschiebungsplan des in der Fig. 38a dargestellten Trägers, der bei a ein festes und bei g ein auf schräger Bahn geführtes Auflagergelenk besitzt. Die mit dem Zeichen $(+)$ versehenen Stäbe mögen Verlängerungen erleiden.

Fig. 38.

Wird zuerst die Richtung des Stabes 1 als festliegend vorausgesetzt, so lassen sich die von den gegebenen Aenderungen der Stablängen herrührenden elastischen Verschiebungen Ob', Oc', ... Og' der Knotenpunkte b, c, ... g auf die in No. 32 beschriebene Weise bestimmen. Dieselben müssen noch mit denjenigen Verschiebungen $b''O$, $c''O$, ... $g''O$ zusammengesetzt werden, welche die Knotenpunkte erfahren, wenn das starre Fachwerk so um a gedreht wird, dass sich für den auf einer festen Geraden geführten Punkt g eine Gesammtverschiebung $g''g'$ ergiebt, welche zu dieser Geraden parallel ist. Die von den Punkten a'', b'', c'', ... g'' gebildete, der Figur $abcdefg$ ähnliche Figur $a''b''c''d''e''f''g''$ ist demnach durch die Bedingungen bestimmt, dass a'' mit a' zusammenfallen muss, weil a ruht, und dass ferner $a''g'' \perp ag$ und $g''g'$ parallel zur Bahn des Auflagergelenkes g sein muss. Die (in der Fig. nicht ausgezogenen) Strecken $b''b'$, $c''c'$, ... $g''g'$ stellen nach Grösse, Richtung und Sinn die gesuchten Verschiebungen der Knotenpunkte b, c, ... g dar.

Projicirt man die Punkte h', g', a', d', e' in h_0, g_0, a_0, d_0, e_0 auf die Senkrechten durch die entsprechenden Knotenpunkte h, g, a, d, e und verbindet h_0 und e_0 durch eine Gerade, welche jene Senkrechten in g''', a''', d''' schneiden mögen, so geben die Strecken $g''' g_0$, $a''' a_0$, $d''' d_0$ an, um wie viel sich die Knotenpunkte g, a, d in senkrechter Richtung verschieben. Man nennt diese Projektionen der Gesammtverschiebungen auch *Durchbiegungen* und beispielsweise $g''' g_0$ die *senkrechte Durchbiegung des Fachwerks an der Stelle g.*

Das Polygon $h_0 g_0 a_0 d_0 e_0$ heisst *Biegungspolygon* oder *Biegungslinie* der unteren Gurtung und die Gerade $h_0 e_0$ die *Schlusslinie.* Wird nur das Polygon $h_0 g_0 a_0 d_0 e_0$ verlangt (was häufig der Fall ist), so braucht in dem hier vorliegenden wichtigen Falle eines Trägers mit wagerechter Auflagerbahn die Figur $h'' g'' a'' d'' e'' c'' b'' f''$ nicht gezeichnet zu werden.

35. Gerber'scher Fachwerkbalken. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden. 1. Die schwebenden Theile werden, nach dem Vorschlage Gerber's, gelenkartig mit den gestützten Theilen verbunden. 2. Jeder schwebende Theil wird (wie ein einfacher Balken) an dem einen Ende mit einem festen, an dem anderen mit einem beweglichen

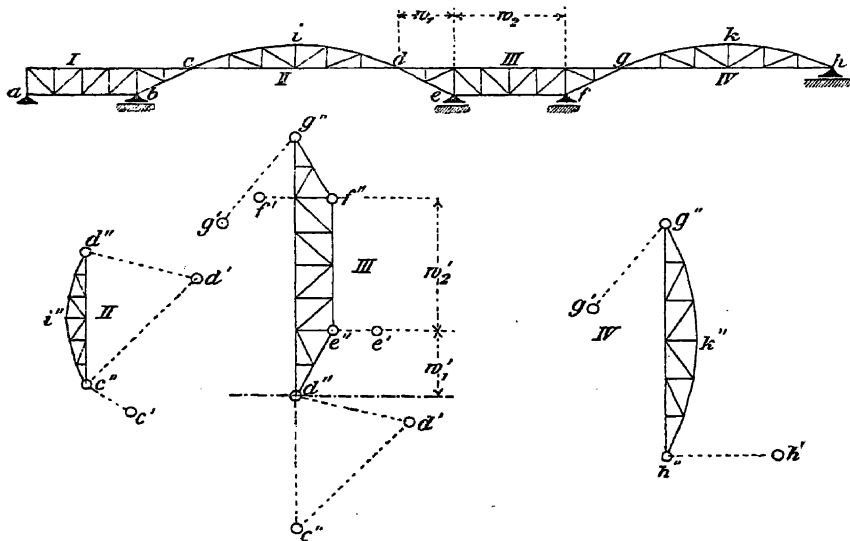



Fig. 40.

Auflagergelenke versehen. Im ersten Falle darf auf den Pfeilern nur *ein* festes Lager angeordnet werden; alle übrigen Lager müssen beweglich sein. Im zweiten Falle erhält jeder der gestützten Theile ein festes und ein bewegliches Auflagergelenk. (Vergl. Band I, Seite 92, Fig. 86 und Seite 342, Fig. 351.)

Ein *Beispiel für die erste Anordnung* zeigt die Figur 40. Die schwebenden Theile II und IV sind mit den gestützten Theilen I und III durch die Gelenke c, d, g verbunden. Das Auflagergelenk a ist fest, während sich die Auflagergelenke b, e, f, h auf wagerechten Bahnen bewegen können. Die Darstellung der durch gegebene Aenderungen der Stablängen bedingten Verschiebungen der Knotenpunkte erfolgt zweckmässig in vier getrennten Figuren, entsprechend den vier Scheiben *I, II, III, IV.* Zuerst nehme man von jeder Scheibe einen beliebigen Punkt und die Richtung eines durch diesen Punkt gehenden Stabes als festliegend an, bestimme die elastischen Verschiebungen der Knotenpunkte auf die in No. 32 angegebene Weise und ertheile hierauf den nunmehr als starre Gebilde anzusehenden Scheiben Bewegungen, durch welche die Auflagerbedingungen erfüllt werden und der Zusammenhang der Scheiben in den Punkten c, d, g wieder hergestellt wird. Der erste Theil dieser Untersuchung — die Bestimmung des irgend einem Knoten m entsprechenden Punktes m' — ist bereits durch mehrere Beispiele erläutert worden, und es sind deshalb in die Fig. 40 nur die wichtigsten dieser Punkte eingetragen worden, nämlich:

die Punkte c', d' des Verschiebungsplanes für die Scheibe *II*,
„ „ d', e', f', g' „ „ „ „ „ *III*,
„ „ g', h' „ „ „ „ „ *IV*.

Der Verschiebungsplan für die Scheibe *I* wurde überhaupt fortgelassen, da dieses Trägerstück ein festes und ein bewegliches Auflagergelenk besitzt, mithin ganz nach No. 34 behandelt werden kann. Es bleibt jetzt nur noch zu erläutern, wie die den Figuren cid, $defg$, gkh ähnlichen Figuren $c''i''d''$, $d''e''f''g''$, $g''k''h''$ zu bestimmen sind.

Der Punkt c'' des Planes *II* ist durch die dem Plane *I* zu entnehmende Verschiebung $c''c'$ des Gelenkes c gegeben; von d'' ist vorläufig nur bekannt, dass $c''d'' \perp cd$ sein muss. Im Plane *III* liegt e'' auf der Wagerechten durch e', und f'' auf der Wagerechten durch f', weil sich die Auflagergelenke e und f auf wagerechten Bahnen bewegen. Bedeuten w_1' und w_2' die in senkrechter Richtung gemessenen Abstände der Punkte d'' und e'', beziehungsweise e'' und f'', ferner w_1, w_2 die in wagerechter Richtung gemessenen Entfernungen der entsprechenden Punkte d, e, f, so verhält sich

$$w_1' : w_2' = w_1 : w_2$$

und mittels dieser Beziehung lässt sich $w_1' = w_2' \dfrac{w_1}{w_2}$ bestimmen und damit auch die Lage der in Fig. 40 strichpunktirten Wagerechten, auf welcher der Punkt d'' liegen muss. Diesen Punkt selbst aber findet man, indem man $c''d'$ aus dem Plane *II* in den Plan *III* überträgt

und $c'' d'' \perp cd$ zieht. Ist noch mit Hilfe der Geraden $d''e'' \perp de$ der Punkt e'' ermittelt worden, so sind zwei Punkte der Figur $d'' e'' f'' g''$ bekannt, und damit ist diese Figur vollständig bestimmt. — Nun überträgt man $d' d''$ aus *III* in den Plan *II* und zeichnet die Figur $c'' i'' d''$, macht hierauf in *IV* die Strecke $g' g''$ gleich und parallel der ebenso bezeichneten Strecke des Planes *III*, zieht $g'' h'' \perp gh$ bis zur Wagerechten durch h' und erhält auf diese Weise zwei Punkte der nunmehr bestimmten Figur $g'' k'' h''$.

Ein Beispiel für die zweite Anordnung ist in der Fig. 41 dargestellt worden. Bei a und g wird der Träger durch feste, bei b und f durch bewegliche Auflagergelenke (letztere mit wagerechten Bahnen) unterstützt. Der schwebende Theil *II* ist bei c durch ein Mittelgelenk mit *I* verbunden und erhält bei d ein wagerechtes Gleitlager. Die

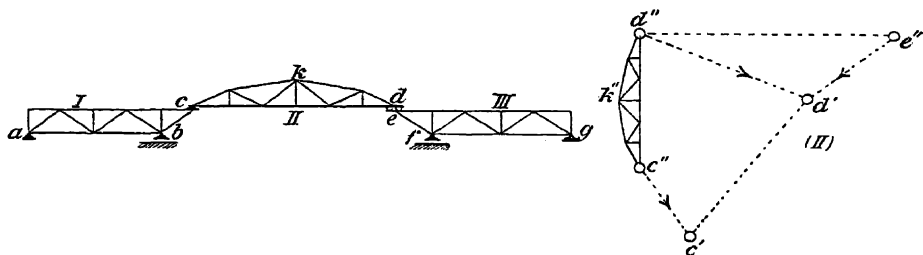



Fig. 41.

Verschiebungspläne für die Scheiben *I* und *III* werden nach No. 34 gezeichnet. Von der Scheibe *II* nehme man zuerst wieder einen beliebigen Punkt und die Richtung eines durch diesen Punkt gehenden Stabes als festliegend an, und ertheile hierauf dieser Scheibe eine Bewegung, durch welche bei c der Zusammenhang der Scheiben *I* und *II* wieder hergestellt und der Bedingung genügt wird, dass die senkrechten Projektionen der Verschiebungen der Punkte d und e gleich gross werden. Hiernach findet man die der Figur ckd ähnliche Figur $c'' k'' d''$ auf die folgende Weise. Man macht die Strecke $c'' c'$ nach Grösse, Richtung und Sinn gleich dem durch den Verschiebungsplan für die Scheibe *I* gegebenen Wege des Knotens c und die Strecke $e'' d'$ gleich der aus dem Plane für die Scheibe *III* zu entnehmenden Verschiebung des Punktes e. Hierauf zieht man $c''d'' \perp cd$ bis zur Wagerechten durch e'' und erhält in der Strecke $d'' d'$ nach Grösse, Richtung und Sinn die Verschiebung von d. Die Figur $c'' k'' d''$ ist durch die beiden Punkte c'' und d'' vollständig bestimmt.

36. Bogenträger mit drei Gelenken. Die beiden gegliederten Scheiben *I* und *II*, welche bei a und b feste Auflagergelenke besitzen und bei c durch ein Mittelgelenk miteinander verbunden sind, werden

zuerst getrennt untersucht, wobei von jeder Scheibe ein beliebiger Punkt und die Richtung eines durch diesen Punkt gehenden Stabes als festliegend angesehen werden. Hierauf werden den als starr anzusehenden Scheiben Bewegungen ertheilt, welche die Auflagerbedingungen befriedigen und den Zusammenhang der Scheiben bei c wiederherstellen. Fig. 42 giebt nur die Lage der den Gelenken a, b, c entsprechenden Punkte a', b', c' der beiden Verschiebungspläne I und II an; die den übrigen Knoten m entsprechenden Punkte m' wurden fortgelassen. Zur Bestimmung der den Figuren $a\,c\,d$ und bce ähnlichen Figuren $a''\,c''\,d''$ und $b''\,c''\,e''$ stehen die folgenden Bedingungen zur Verfügung:

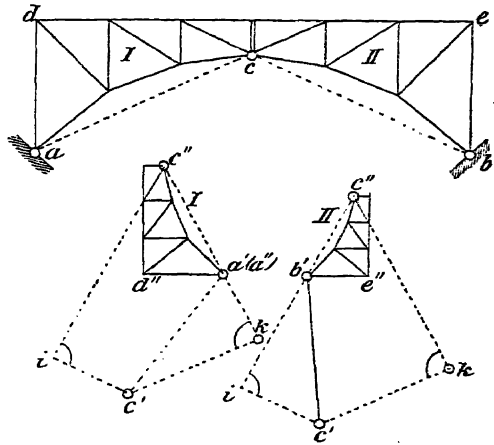



Fig. 42.

1. Die Verschiebung $a''\,a'$ von a ist gleich Null; mithin muss a'' mit a' zusammenfallen.
2. Aus gleichem Grunde muss b'' mit b' zusammenfallen.
3. Im Plane I muss sein: $a''\,c'' \perp ac$ und im Plane II: $b''\,c'' \perp bc$.
4. Die Pläne I und II müssen für die Verschiebung von c denselhen Werth $c''\,c'$ liefern.

Man lege nun im Plane I durch a' eine zu ac rechtwinklige Gerade, ziehe durch c' zu ac eine Parallele, welche jene Gerade in k schneidet, und bestimme auf diese Weise die Projektion kc' der Verschiebung $c''\,c'$ auf die Richtung ac. Diese Projektion übertrage man in den Plan II, errichte hier in k auf $c'\,k$ ein Loth und bestimme dessen Schnittpunkt c'' mit der durch b'' rechtwinklig zu bc gezogenen Geraden $b''\,c''$. Jetzt ist die Figur $b''\,c''\,e''$ gegeben, da zwei Punkte derselben bekannt sind. Ueberträgt man noch kc'' aus dem Plane II in den Plan I, so kennt man auch zwei Punkte (a'' und c'') der Figur $a''c''d''$, kann also auch diese Figur zeichnen. Auch lässt sich im Plane II die Projektion ic' von $c''c'$ auf die Richtung bc finden und in den Plan I übertragen, worauf dann c'' mittels $c''\,i \perp c'i$ bestimmt werden kann.

37. — Dem in No. 31 beschriebenen und als Fachwerk einfachster Art bezeichneten Stabgebilde lässt sich ein sehr wichtiges Scheibengebilde von ähnlicher Entstehungsweise an die Seite stellen. Man erhält dasselbe, indem man drei gegliederte Scheiben *I*, *II*, *III* durch drei Mittelgelenke g_1, g_2, g_3 zu einem *Scheibendreieck* vereinigt (Fig. 43), an dieses zwei weitere Scheiben *IV* und *V*, die in einem Gelenke g_6 aneinanderhängen, mittels zweier Gelenke g_4 und g_5 anschliesst, in derselben Weise zwei neue Scheiben *VI* und *VII* hinzufügt und so fortfährt. Sind sämmtliche Scheiben Fachwerke von der in No. 31 angegebenen Art, so ist es möglich, den Verschiebungsplan des Gebildes durch wiederholte Lösung der in No. 32 behandelten Aufgabe zunächst unter der Voraussetzung zu erhalten, dass nur die Richtung eines Stabes

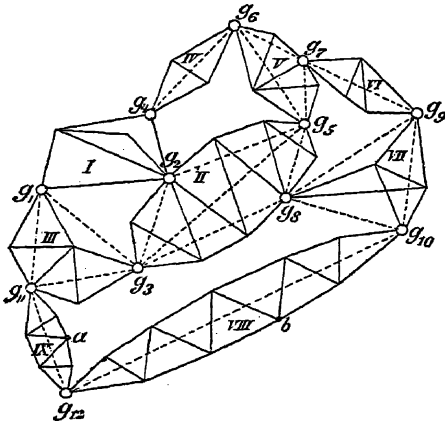
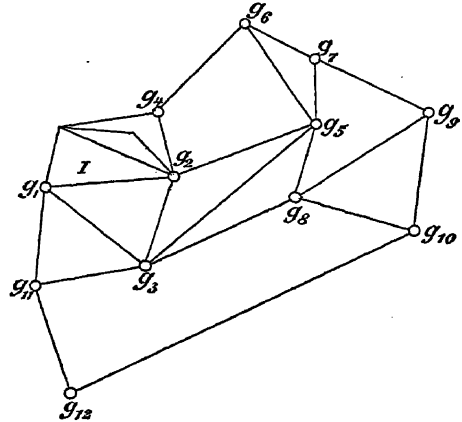



Fig. 43. Fig. 44.

(der im Allgemeinen dem Scheibendreiecke *I II III* angehören muss) und ein Punkt in der Achse dieses Stabes festliegen, und hierauf können dann mit Hilfe von No. 33 auch solche Fälle erledigt werden, in denen das Gebilde in anderer, aber ebenfalls statisch bestimmter Weise gestützt wird.

Soll z. B. das in Fig. 43 dargestellte Fachwerk untersucht werden, und gehört der Stab, dessen Richtungslinie zunächst festgehalten wird, der Scheibe *I* an, so denke man die übrigen Scheiben auf die in der Fig. 44 angegebene Weise durch Stäbe ersetzt und schreibe diesen Stäben Längenänderungen zu, welche mit den wirklichen gegenseitigen Verschiebungen ihrer Endpunkte übereinstimmen, so dass z. B. die Längenänderung des gedachten Stabes $g_2 g_3$ gleich der gegenseitigen Verschiebung des der Scheibe *II* angehörenden Punktepaares g_2, g_3 ist. Es liegt jetzt ein Fachwerk von der in No. 31 beschriebenen Art vor; man ist im Stande, der Reihe nach die Verschiebungen der Gelenke g_3, g_5, g_6, g_7, g_8, g_9, g_{10}, g_{11}, g_{12} anzugeben, und hierauf mit Hilfe von No. 33 die wirklichen Auflagerbedingungen zu befriedigen. Um

den zweiten Theil dieser Aufgabe lösen zu können, müssen die Stützpunkte in passender Weise mit den Gelenken durch Stäbe verbunden gedacht werden. Besitzt z. B. das Scheibengebilde zwei Auflagergelenke a und b (von denen das eine fest, das andere beweglich sein muss), so sind noch die Stäbe ag_{11}, ag_{12}, bg_{10}, bg_{12} hinzuzufügen.

Der auf dem angegebenen Wege erhaltene Verschiebungsplan soll kurz der *Plan I* heissen; er enthält die den wirklichen Auflagerbedingungen entsprechenden Verschiebungen $m''m'$ sämmtlicher Knotenpunkte m der Scheibe I, die Verschiebungen $g''g'$ sämmtlicher Mittelgelenke g und die Verschiebung des beweglichen Auflagergelenks.

Um nun die zur Anfertigung des Planes I erforderlichen Längenänderungen der gedachten Stäbe zu erhalten, muss im Allgemeinen für jede einzelne Scheibe ein besonderer Verschiebungsplan unter der Voraussetzung gezeichnet werden, dass die Richtung eines Stabes der fraglichen Scheibe und ein Punkt in der Achse dieses Stabes festliegen. Fig. 45 stellt einen Theil des auf diese Weise für die Scheibe III erhaltenen Planes (kurz Plan III genannt) vor; er dient zur Bestimmung der Aenderungen $\Delta(g_1 g_3)$, $\Delta(g_3 g_{11})$, $\Delta(g_{11} g_1)$ der Entfernungen $g_1 g_3$, $g_3 g_{11}$, $g_{11} g_1$. Behufs Ermittelung von $\Delta(g_1 g_3)$, projicire man die Polstrahlen Og_1' und Og_3' in $\bar{O}\bar{g}_1$ und $\bar{O}\bar{g}_3$ auf eine zur $g_1 g_3$ parallele Gerade 1—3. Es stellt dann $\bar{O}\bar{g}_1$ die Verschiebung von g_1 in der Richtung $g_3 g_1$ dar, ferner $\bar{O}\bar{g}_3$ die Verschiebung von g_3 in derselben Richtung und es giebt mithin die Strecke

$$\overline{g_1 g_3} = \Delta(g_1 g_3)$$

die gegenseitige Verschiebung des Punktepaares $g_1 g_3$ an; sie hat denselben Sinn wie die Strecke $g_1 g_3$ und bedeutet deshalb eine Verlängerung des gedachten Stabes $g_1 g_3$. Auf dieselbe Weise wird der Werth $\Delta(g_3 g_{11})$ durch Projiciren der Punkte g_3' und g_{11}' auf die zur $g_3 g_{11}$ parallele Gerade 3—11 gefunden und $\Delta(g_1 g_{11})$ mittels der Projektionen von g_1' und g_{11}' auf die Gerade 1—11. Für $\Delta(g_1 g_{11})$ ergab sich in der Fig. 45 ein positiver Werth, für $\Delta(g_3 g_{11})$ hingegen ein negativer, so dass dem gedachten Stabe $g_3 g_{11}$ eine Verkürzung zuzuschreiben ist.

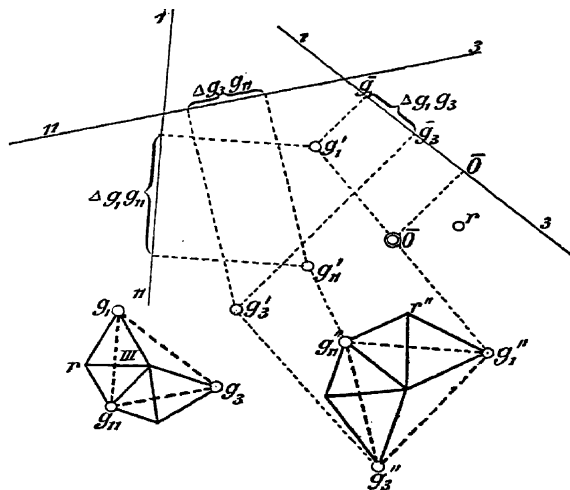



Fig. 45.

Der in Fig. 45 für die Scheibe *III* gezeichnete Einzelplan lässt sich mit Vortheil verwerthen, um nach Vollendung des Planes *I* die wirklichen Verschiebungen $r'' r'$ sämmtlicher Knoten r dieser Scheibe darzustellen. Zu diesem Zwecke übertrage man die im Plane *I* für die Gelenke g_1, g_3, g_{11} gefundenen wirklichen Verschiebungen $g_1'' g_1'$, $g_3'' g_3'$, $g_{11}'' g_{11}'$ in den Plan *III* und zeichne hierauf die der Scheibe *III* ähnliche Figur $g_1'' g_3'' r'' g_{11}''$, welche bereits durch zwei der Punkte g_1'', g_3'', g_{11}'' bestimmt wird, so dass man die Schärfe der Zeichnung leicht prüfen kann. Hat man nämlich $g_1'' g_1'$, $g_3'' g_3'$, $g_{11}'' g_{11}'$ aus Plan *I* in Plan *III* übertragen, so muss bei sorgfältiger Zeichnung sein: $g_1'' g_3'' \perp g_1 g_3$, $g_3'' g_{11}'' \perp g_3 g_{11}$ und $g_{11}'' g_1'' \perp g_{11} g_1$.

Zahlenbeispiel. Zur Erläuterung untersuchen wir den auf Tafel 1 im Maassstabe 1 : 100 aufgetragenen Dachbinder, und zwar zunächst mit Hilfe des allgemeinen Verfahrens. Auf die im vorliegenden und in vielen anderen Fällen möglichen Vereinfachungen werden wir an geeigneter Stelle hinweisen.

Die von dem Eigengewichte des Dachstuhls und dem Schnee herrührende senkrechte Belastung jedes der mittleren Knotenpunkte betrage 1125^k, jedes Endknotens: $\frac{1}{2}\, 1125^k$. Der auf jedes Feld der linken Dachhälfte wirkende Winddruck sei $= 700^k$. Die mit Hilfe eines Cremona'schen Kräfteplanes (der hier nicht wiedergegeben worden ist) erhaltenen Spannkräfte S, sowie die Stablängen s, Querschnitte F (ohne Abzug für Nietlöcher) und Längenänderungen $\Delta s = \frac{Ss}{EF}$ sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt worden. Temperaturänderungen blieben unberücksichtigt. Die Elasticitätsziffer wurde (für Stabeisen): $E = 1\,800\,000^k$ f. d. *qcm* angenommen.*) Zur besseren Uebersicht wurden die Δs (in Millimetern) auch in das Trägernetz auf Tafel 1 eingeschrieben.

Linke Trägerhälfte					Rechte Trägerhälfte				
Stab	S	F	s	Δs	Stab	S	F	s	Δs
1	— 9910	44	212	—0,27	1′	— 9530	44	212	— 0,26
2	— 9110	44	212	—0,24	2′	— 8730	44	212	— 0,23
3	— 8320	44	212	—0,22	3′	— 7940	44	212	— 0,21
4	— 7520	44	212	—0,20	4′	— 7140	44	212	— 0,19
5	+ 8970	13	245	+0,94	5′	+ 6970	13	245	+ 0,73
6	+ 7470	13	245	+0,78	6′	+ 6170	13	245	+ 0,65
7	+ 4110	12	254	+0,48					
8	+ 4210	12	245	+0,48	8′	+ 2820	12	245	+ 0,32
9	+ 5710	12	245	+0,65	9′	+ 3620	12	245	+ 0,41
10	— 1500	9	122	—0,11	10′	— 800	9	122	— 0,06
11	+ 1500	5	245	+0,41	11′	+ 800	5	245	+ 0,22
12	— 3000	16	245	—0,26	12′	— 1600	16	245	— 0,14
13	+ 1500	5	245	+ 0,41	13′	+ 800	5	245	+ 0,22
14	— 1500	9	122	—0,11	14′	— 800	9	122	— 0,06
	kilogr.	*qcm.*	*cm.*	*mm*		*kilogr.*	*qcm.*	*cm.*	*mm.*

*) Bei Berechnung von Formveränderungen emfiehlt es sich im Allgemeinen, E nicht zu hoch anzunehmen, um den schwierig zu berechnenden Einfluss der Verschwächung durch Niete und das Nachgeben der Verbindungen zu berücksichtigen.

Der zu untersuchende Träger besteht aus den beiden gegliederten Scheiben aeh und iqh, welche kurz mit I und II bezeichnet werden sollen und die mittels des Gelenkes h und des Stabes ai mit einander verbunden sind.

Zuerst wurde in Fig. 47 der Verschiebungsplan für die Scheibe I unter der Voraussetzung aufgetragen, dass der Knoten a und die Richtung des Stabes ab festliegen. Sämmtliche Verschiebungen wurden in zwanzigfacher Vergrösserung gezeichnet. O ist der beliebig angenommene Pol. a' fällt mit O zusammen. Die Verschiebung Ob' des Punktes b ist gleich der Längenänderung $\Delta 12$ des Stabes 12. Die Punkte c', d', e' ferner f' g' h' wurden nach dem in No. 32 beschriebenen Verfahren bestimmt. Hierauf wurde der (roth ausgezogene) Verschiebungsplan II für die Scheibe II in Angriff genommen, vorerst für den Fall, dass Punkt i und die Richtung des Stabes ik festgehalten werden. Nach Ermittelung der Punkte k', l', m', q' und n', p', h' konnte die Aenderung $\Delta(hi)$ der Entfernung hi als Projektion der Strecke $h'i'$ auf eine zu hi parallele Gerade angegeben werden und ebenso die Aenderungen $\Delta(iq)$ und $\Delta(hq)$ der Abstände iq und hq. [Im vorliegenden Falle wäre allerdings hierzu die Aufzeichnung des Planes II nicht nöthig gewesen, denn es ist offenbar $\Delta(hi)$ gleich der Summe der Längenänderungen der Stäbe 9′ und 8′, d. h. $\Delta(hi) = +0{,}41 + 0{,}32 = +0{,}73^{mm}$ und ebenso findet man ohne weiteres: $\Delta(hq) = \Delta 4' + \Delta 3' + \Delta 2' + \Delta 1' = -0{,}19 - 0{,}21 - 0{,}23 - 0{,}26 = -0{,}89^{mm}$ und $\Delta(iq) = \Delta 6' + \Delta 5' = +0{,}65 + 0{,}73 = +1{,}38^{mm}$].

Jetzt war es möglich, den Plan I zu vollenden. Mit Hilfe von $\Delta(hi)$ und $\Delta 7$ wurde die Lage von i', ferner mittels $\Delta(hq)$ und $\Delta(iq)$ die Lage von q' gefunden und hierauf den Auflagerbedingungen genügt. Da e festliegt und q auf einer Wagerechten geführt wird, so fällt e'' mit e' zusammen, während q'' der Schnittpunkt der rechtwinklig zu eq gezogenen Geraden $e''q''$ mit der Wagerechten durch q' ist. Durch die Punkte e'' und q'' ist die dem gegebenen Fachwerke ähnliche Figur $e''d''b''g''h''f''a''i''q''$ vollständig bestimmt, und damit sind auch die Verschiebungen sämmtlicher Knoten der Scheibe I sowie diejenigen der Punkte i und q gegeben.

Behufs Darstellung der Verschiebungen der Knotenpunkte der Scheibe II wurden die Verschiebungen $q''q'$ und $h''h'$ aus Plan I in II übertragen und auf diese Weise zwei Punkte der Figur $q''m''k''p''h''n''i''l''$ gefunden. Bei sorgfältiger Zeichnung muss $q''h'' \perp qh$ sein, ferner muss die Verschiebung $i''i'$ mit der bereits im Plane I erhaltenen Verschiebung $i''i'$ nach Grösse und Richtung übereinstimmen. [Wegen der geraden Gurtung hk hätte man auch im Plane I einen Punkt k' mit Hilfe von $\Delta 12'$ und $\Delta(hk) = -0{,}19 - 0{,}21 = -0{,}40^{mm}$ ermitteln können, hierauf n' mittels $\Delta 13'$ und $\Delta 8'$, p' mittels $\Delta 3'$ und $\Delta 14'$, sodann l' und m'. Plan II kann also bei Untersuchung des vorliegenden Trägers entbehrt werden; er ist aber nöthig, sobald h, p, k, m, q oder h, n, i oder i, l, q nicht in einer Geraden liegen, also beispielsweise bei Behandlung des in Fig. 180 auf Seite 196 des ersten Bandes abgebildeten Dachbinders.]

Vergleichende Messungen zeigen, dass im vorliegenden Falle von allen Knoten des Trägers der Punkt g die grösste Verschiebung erfährt. Man findet $\overline{g''g'} = 7{,}6^{mm}$. Die wagerechte Verschiebung des Punktes q ist: $\overline{q''q'} = 6{,}5^{mm}$.

Die Figuren 49 bis 52 zeigen weitere Arten von Fachwerken, deren Verschiebungspläne auf dem im vorstehenden Beispiele angegebenen Wege erhalten werden können.

Der einfache Fachwerkbalken in Fig. 49 besteht aus den beiden Scheiben *abc* und *bde* (deren Ränder durch Schraffirung hervorgehoben

Fig. 49.

wurden) und dem Stabe *ce*. Die sich schneidenden Diagonalen und Vertikalen sind an den Kreuzungsstellen nicht miteinander verbunden.

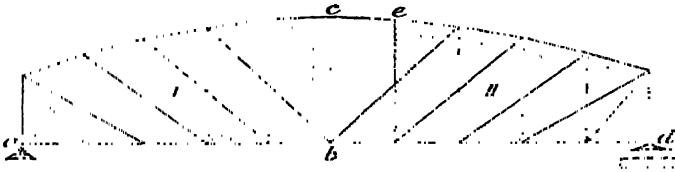



Fig. 50 stellt einen versteiften Gelenkbogen (vergl. Band I, Seite 421, No. 210) dar, welcher in die Scheiben *I* und *II* und den Stab *ce* zer-

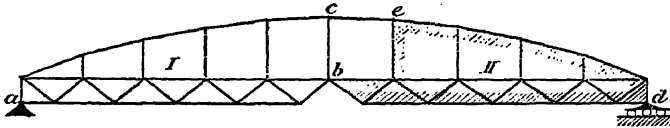



Fig. 50.

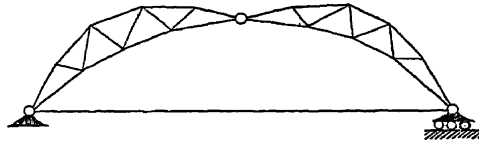



Fig. 51.

legt werden kann, Fig. 51 einen Fachwerkbogen mit drei Gelenken, dessen Kämpfer durch eine Stange verbunden sind.

Soll die Formveränderung des in Fig. 52 abgebildeten Trägers

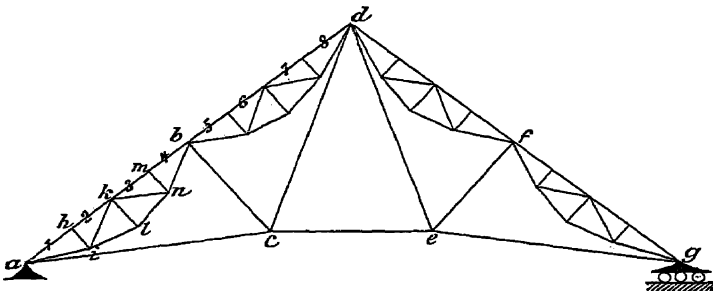



Fig. 52.

untersucht werden, so nehme man zunächst den Punkt *c* und die Richtung des Stabes *ce* als festliegend an, ermittele *e′*, sodann:

d' mit Hilfe von $\Delta(dc)$ und $\Delta(de)$
b' „ „ „ $\Delta(bc)$ „ $\Delta(bd) = \Delta 5 + \Delta 6 + \Delta 7 + \Delta 8$
a' „ „ „ $\Delta(ac)$ „ $\Delta(ab) = \Delta 1 + \Delta 2 + \Delta 3 + \Delta 4$,
und ebenso bestimme man f' und g'. Nun befriedige man die Auflagerbedingungen, übertrage die hierbei gefundenen Verschiebungen $b''b'$, $d''d'$, $f''f'$, $g''g'$ der Punkte b, d, f, g in die nach No. 32 für die einzelnen Scheiben angefertigten Pläne und zeichne in diese letzteren schliesslich die den Scheiben ab, bd, df, fg ähnlichen Figuren $a''b''$, $b''d''$, $d''f''$, $f''g''$ ein.

38. Fachwerkträger verschiedener Art. Liegt ein Fachwerk von anderer als in den vorstehenden Untersuchungen beschriebener Art vor, so verwandele man dasselbe — am besten durch Aenderung der Stützung — zunächst in ein solches, dessen Verschiebungsplan durch wiederholte Lösung der in No. 32 vorgeführten Hauptaufgabe erhalten werden kann, nachdem man vorher nöthigenfalls für einzelne Theile (Scheiben) besondere Pläne zur Bestimmung der gegenseitigen Verschiebungen derjenigen Gelenke gezeichnet hat, in denen diese Theile aneinander hängen. Hierauf beseitige man die neu hinzugefügten Stützen und schreibe den starr zu denkenden Gliedern des nunmehr beweglichen Fachwerks Verschiebungen und Drehungen zu, durch welche die wirklichen Auflagerbedingungen erfüllt werden. Die folgenden Beispiele werden genügen, dieses Verfahren zu erläutern.

1. Beispiel. Das in Fig. 53 dargestellte Fachwerk besteht aus zwei gegliederten Scheiben I und II, die im Gelenke c aneinander hängen und durch die Stäbe 4 und 7 mit dem Kopfe e der Pendelsäule 5 verbunden sind. Bei a ist ein festes, bei g ein auf wagerechter Bahn bewegliches Auflagergelenk angeordnet. Will man die Verschiebungen der Knotenpunkte dieses Fachwerks ermitteln, so bestimme man zunächst mit Hilfe von Einzelplänen (I) und (II), die nach No. 32 für die Scheiben I und II aufgetragen werden, die Aenderungen $\Delta 1$, $\Delta 2$, $\Delta 8$, $\Delta 9$ der kurz mit 1, 2, 8, 9 bezeichneten Strecken ab, ac, dg, cg. Hierauf nehme man an, der Knoten g sei frei, setze dafür aber b in der Richtung ab geführt voraus und zeichne den Plan Fig. 53(A).

O ist der beliebig angenommene Pol. a' und f' fallen mit O zusammen, da a und f feste Punkte sind. Die Wagerechte $Ob' = \Delta 1$ giebt die Verschiebung von b an. Mittels $\Delta 2$ und $\Delta 3$ wird nach No. 32 der Punkt c' bestimmt, hierauf der Reihe nach: e' mittels $\Delta 4$ und $\Delta 5$, d' mittels $\Delta 6$ und $\Delta 7$, g' mittels $\Delta 8$ und $\Delta 9$*).

---

*) Anstatt Scheibe I in b zu führen, kann man auch die Richtung des Stabes ah festlegen. Der Plan (I) wird dann überflüssig, da man die Knotenpunkte der Scheibe I schrittweise durch je zwei Stäbe an den Stab ah an-

Jetzt verwandele man das Fachwerk durch Beseitigung der Führung des Punktes b in eine zwangläufige kinematische Kette, drehe die

Fig. 53.

Scheibe I so um das Auflagergelenk a, dass der Punkt g eine (im Plane A durch einen Strahl $g''O$ darzustellende) Verschiebung erfährt, die, mit der vorhin gefundenen Og' zusammengesetzt, eine wagerechte Gesammtverschiebung $g''g'$ ergiebt, und bestimme schliesslich auch die von den Knotenpunkten d, c, e, b bei dieser Bewegung beschriebenen Wege: $d''O$, $c''O$, $e''O$, $b''O$.

Zu einer einfachen Lösung dieser Aufgabe führen die im ersten Bande (§ 30—32) mitgetheilten Untersuchungen kinematischer Ketten. Die dort für die Geschwindigkeiten der Punkte solcher Ketten abgeleiteten Gesetze gelten auch für die Verschiebungen dieser Punkte, sobald nur vorausgesetzt wird, dass alle diese Verschiebungen in demselben Zeittheilchen erfolgen und sich mithin zu einander verhalten, wie die entsprechenden Geschwindigkeiten.

Stellt man also die vorläufig willkürlich anzunehmende Grösse der Verschiebung des Punktes b durch eine Strecke bb_0 dar, welche, von b aus, auf dem nach dem augenblicklichen Drehpunkte *(Drehpole)* a

---

schliessen kann. Plan (II) ist auch bei der oben angenommenen Stützungsart entbehrlich, doch möge wiederholt werden, dass die Anfertigung von Einzelplänen für die verschiedenen Scheiben den Vorzug der grösseren Uebersichtlichkeit besitzt.

gezogenen Strahle ba abgetragen wird, und zieht man $b_0 c_0 \parallel bc$ bis zum Polstrahle ca, so giebt cc_0 die Grösse der Verschiebung von c an. Macht man weiter $b_0 e_0 \parallel be$, so erhält man in der Strecke ee_0 die Grösse der Verschiebung des Punktes e der um f sich drehenden Pendelsäule, und hierauf kann man mittels $c_0 d_0 \parallel cd$ und $e_0 d_0 \parallel ed$ die Verschiebung dd_0 von d, sodann mittels $c_0 g_0 \parallel cg$ und $d_0 g_0 \parallel dg$ die Verschiebung gg_0 von g bestimmen. Die Richtungen der Verschiebungen der Punkte b, c, e, d, g sind rechtwinklig zu den entsprechenden Strecken bb_0, cc_0, ee_0, dd_0, gg_0 (welche letztere deshalb *„um 90° gedrehte Verschiebungen“* genannt werden sollen) und damit sind die Richtungen der Strahlen bestimmt, die im Plane A die Punkte g'', d'', c'' .... mit dem Pole O verbinden. Es ist $g''O \perp gg_0$, $d''O \perp dd_0$, $c''O \perp cc_0$ u. s. w. Die Länge des Strahles $g''O$ folgt aus der Bedingung, dass g'' auf der Wagerechten durch g' liegen muss, und hierauf ist d'' gegeben durch $g''d'' \perp gd$, c'' durch: $c''d'' \perp cd$ oder $g''c'' \perp gc$, ferner b'' durch: $c''b'' \perp cb$, sodann e'' durch $b''e'' \perp be$ oder $d''e'' \perp de$.

Wir theilen noch drei andere Verfahren mit, die Punkte d'', e'', b'', c'' zu ermitteln:

1. Man zeichne einen Linienzug $g_1 d_1 e_1 b_1 c_1$, dessen Seiten den entsprechenden Seiten des Zuges $g_0 d_0 e_0 b_0 c_0$ parallel sind (so dass also $g_1 d_1 \parallel gd$, $d_1 e_1 \parallel de$, ...) und dessen Ecken auf den Geraden gg_0, dd_0, ee_0, ... liegen. Macht man hierbei $\overline{gg_1} = \overline{g''O}$, so ist auch $d''O = dd_1$, $e''O = ee_1$, u. s. w.

2. Man bestimme die Pole, um welche sich die einzelnen Glieder der bewegten zwangläufigen Kette gegen das ruhende, kurz mit w bezeichnete Widerlager, dem die festen Punkte a und f angehören, drehen. Der Pol $(I \cdot w)$ der Scheibe I fällt mit a zusammen, der Pol $(I \cdot II)$ von I gegen II mit dem Gelenke c. Die Glieder I, 4, 5 der Kette bilden mit dem Widerlager zusammen ein Gelenkviereck, und es liegt daher der Pol $(4 \cdot w)$ von 4 gegen w im Schnittpunkte der Geraden ab und fe. Ebenso folgt, dass der Pol $(4 \cdot II)$ von 4 gegen II der Schnittpunkt der Geraden cb und de ist, und nun lässt sich der Pol $(II \cdot w)$ von II gegen w mittels der Bedingungen finden, dass die drei Punkte $(I \cdot w)$, $(I \cdot II)$ und $(II \cdot w)$ in einer Geraden liegen müssen, desgleichen die Punkte $(4 \,.\, II)$, $(4 \cdot w)$, $(II \cdot w)$. Durch den Pol $(II \cdot w)$ sind die Richtungen gg_0 und dd_0 gegeben, und man ist jetzt im Stande, die Punkte g'', d'', c'', b'', e'' auf die zuerst beschriebene Art zu bestimmen.

3. Man nehme die Verschiebung des Punktes b der um a sich drehenden Scheibe I zunächst beliebig gross an und stelle sie in einem besonderen Plane (Fig. 53 B) durch einen zur Geraden ba rechtwinkligen Polstrahl $b'''O$ dar, wobei es gleichgiltig ist, ob b''' unterhalb oder

oberhalb des Poles O liegend gewählt wird. Hierauf bestimme man die gleichzeitig von den Punkten c, e, d, g beschriebenen Wege, indem man die Reihe zieht:

$$b'''c''' \perp bc \quad \text{und} \quad a'''c''' \perp ac,$$
$$b'''e''' \perp be \quad ,, \quad f'''e''' \perp fe,^{*)}$$
$$c'''d''' \perp cd \quad ,, \quad e'''d''' \perp ed,$$
$$c'''g''' \perp cg \quad ,, \quad d'''g''' \perp dg.$$

Die Strahlen, welche die Punkte b''', c''', e''', d''', g''' mit dem Pole O verbinden, stellen nach Grösse und Richtung die Verschiebungen der Punkte b, c, e, d, g dar. Nun ermittele man im Plane (A) mit Hilfe von $g''O \parallel g'''O$ diejenige Verschiebung, welche g erfahren muss, damit die Auflagerbedingung bei g erfüllt wird, und hierauf die zugehörigen Verschiebungen $c''O$, $d''O$, ... indem man eine Figur $g''c''d''$... zeichnet, deren Seiten parallel sind den entsprechenden Seiten der Figur $g'''c'''d'''$....

Die Figur (B) ist offenbar nichts weiter als der *Williot*'sche Verschiebungsplan derjenigen kinematischen Kette, in welche das zu untersuchende Fachwerk durch Beseitigung des beweglichen Auflagers g übergeht**).

Ueberträgt man schliesslich die auf einem der beschriebenen Wege gefundenen Verschiebungen $b''b'$, $c''d''$, $d''d'$, $g''g'$ aus dem Plane (A) in die für die Scheiben (I) und (II) angefertigten Einzelpläne, und zeichnet in (I) die der Scheibe abc ähnliche Figur $a''b''c''$ (deren Punkt a'' mit dem Punkte a' dieses Planes zusammenfällt), sodann in (II) die der Scheibe cdg ähnliche Figur $c''d''g''$, so ist man im Stande, die Verschiebungen $m''m'$ sämmtlicher Knoten m der Scheiben I und II anzugeben.

Auf ähnliche Weise wie das eben untersuchte Fachwerk kann auch das in Fig. 54 dargestellte behandelt werden. Es ist zweckmässig, zunächst den Punkt a und die Richtung von ab festliegend anzunehmen und sich die Führung des Gelenkes m beseitigt zu denken. Hierauf drehe man die Scheibe I so um a, dass der Punkt m eine wagerechte Gesammtverschiebung $m''m'$ erfährt. Die Pole, um welche sich die Scheiben II und III in Folge dieser zweiten Bewegung drehen, sind in der Fig. 54 angegeben worden***). An ihrer Stelle können auch die

---

*) f''' fällt mit a''' zusammen.

**) Dass es sich bei Aufzeichnung der Figur (B) in der That nur um die wiederholte Lösung der in No. 32 vorgeführten Hauptaufgabe handelt, lehrt ein Blick auf Fig. 34. Ist $\Delta 1 = 0$ und $\Delta 2 = 0$, so entsprechen den Geraden ac und cb in Fig. 34a die zu ihnen rechtwinkligen Geraden $a'c'$ und $c'b'$ des Verschiebungsplanes Fig. 34b. Vergl. auch den Anfang von Seite 62.

***) Das Zeichen ∞ ($4 \cdot II$) deutet an, dass der Pol ($4 \cdot II$) mit dem unendlich fernen Schnittpunkte der Stäbe 3 und 7 zusammenfällt.

um 90° gedrehten Verschiebungen oder ein Williot'scher Plan benutzt werden, und es wird dem Leser empfohlen, zur Uebung die betreffenden Figuren selbst zu entwerfen*).

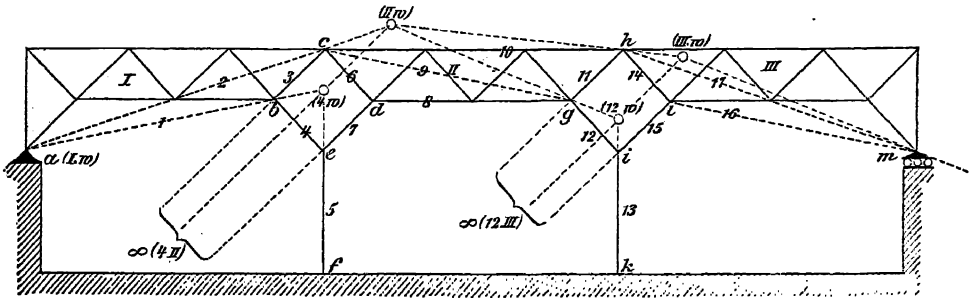



Fig. 54.

2. Beispiel. Fig. 55 zeigt einen statisch bestimmten Bogenträger mit drei Oeffnungen. Derselbe besteht aus vier gegliederten Scheiben, die in den Gelenken *c*, *g*, *i* aneinander hängen. Die Scheiben *I* und *II* sind durch zwei Stäbe mit dem Kopfe der Pendelsäule *ef* verbunden, in gleicher Weise *III* und *IV* mit der Säule *lm*. Bei *a* und *n* sind feste Auflagergelenke angeordnet.

Wird der Verschiebungsplan dieses Trägers verlangt, so setze man zunächst voraus, es sei bei *g* die Verbindung der Scheiben *II* und *III*

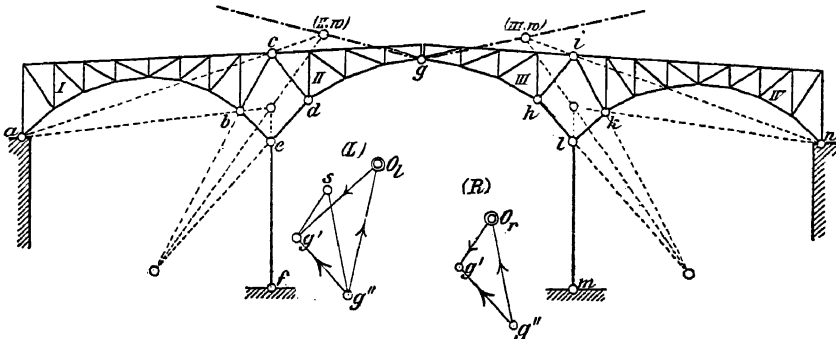



Fig. 55.

gelöst, nehme dafür aber den Punkt *b* in der Richtung *ab* geführt an und den Punkt *k* in der Richtung *nk*. Für diese Stützungsart ermittele

*) Bei Polbestimmungen müssen häufig Gerade durch die Schnittpunkte von ausserhalb des Zeichenblattes sich treffenden Linien gelegt werden, was zwar keinerlei Schwierigkeiten bietet, immerhin aber umständlich genug ist, um dann die Bevorzugung anderer Verfahren zu veranlassen.

man (genau wie im Beispiel 1) die Verschiebungen der Punkte b, c, e, d, g der linken Trägerhälfte und der Punkte k, i, l, h, g der rechten Hälfte — am besten in zwei besonderen Figuren (L) und (R); deren Pole O_l und O_r seien. Hierauf drehe man die Scheiben I und IV so um die Gelenke a bezieh. n, dass der Zusammenhang der Scheiben II und III in g wieder hergestellt wird.

Der erste Theil dieser Untersuchung möge für den Punkt g der linken Trägerhälfte die Verschiebung $O_l g'$ (Plan L) ergeben haben und für den Punkt g der rechten Hälfte die Verschiebung $O_r g'$ (Plan R). In Folge der zweiten Bewegung dreht sich die Scheibe II um den Pol $(II \cdot w)$, dessen Lage in der auf Seite 74 beschriebenen Weise gefunden wird, und es muss deshalb der Strahl $g'' O_l$ rechtwinklig zu der durch die Punkte $(II \cdot w)$ und g bestimmten Geraden sein. Im Plane R hingegen ist $g'' O_r$ rechtwinklig zur Geraden $g — (III \cdot w)$. Da nun beide Pläne Verschiebungen $g'' g'$ liefern müssen, die nach Grösse, Richtung und Sinn übereinstimmen, so lässt sich die Lage der Punkte g'' in folgender Weise ermitteln.

Man mache in (L) die Strecke $g' s$ gleich und parallel dem Strahle $g' O_r$ des Planes (R) und lege durch den Punkt s, rechtwinklig zu $g — (III \cdot w)$ eine Gerade. Dieselbe schneidet die gegebene Richtung des Strahles $g'' O_l$ in g''. Hierauf mache man in (R) die Strecke $O_r g''$ gleich der Strecke $s g''$ in (L).

Jetzt ist man im Stande, genau wie bei Aufgabe 1 die der Verschiebung $g'' O_l$ entsprechenden Wege $d'' O_l$, $c'' O_l$, ... der Punkte d, c, . . . zu bestimmen, desgleichen die Verschiebungen $h'' O_r$, $i'' O_r$, . . . der Punkte h, i, ...

3. Beispiel. Es soll der Verschiebungsplan einer durch einen Balken mit Mittelgelenk versteiften Kette gezeichnet werden. Fig. 56. Bei b ist ein festes, bei p ein auf einer Wagerechten geführtes Auflagergelenk angeordnet. Die ebenfalls auf wagerechten Bahnen beweglichen Gelenke a und x der Tragkette aox sind durch Rückhaltketten, deren Längen sich um die gegebenen Strecken Δ' und Δ'' vergrössern, mit festen Punkten der Widerlager verbunden.

Von dem beliebig angenommenen Pole O aus (Plan A) wird Δ' aufgetragen, und im Endpunkte dieser der linken Rückhaltkette parallelen Strecke ein Loth errichtet, welches die Wagerechte durch O in a' schneidet. Oa' stellt die Verschiebung von a dar. An a' wird die Verlängerung $\Delta 1$ des Kettengliedes 1 angetragen und in dem auf $\Delta 1$ im Endpunkte errichteten Lothe der Ort des Punktes c' gefunden.

Es empfiehlt sich nun, den Punkt c' zunächst beliebig anzunehmen und gewissermaassen vorauszusetzen, es werde der Punkt c in der durch den Strahl Oc' angegebenen Richtung geführt; dafür aber denke man

die wagerechte Führung des Punktes x beseitigt. Denn durch die Annahme eines bestimmten c' sind die Verschiebungen sämmtlicher

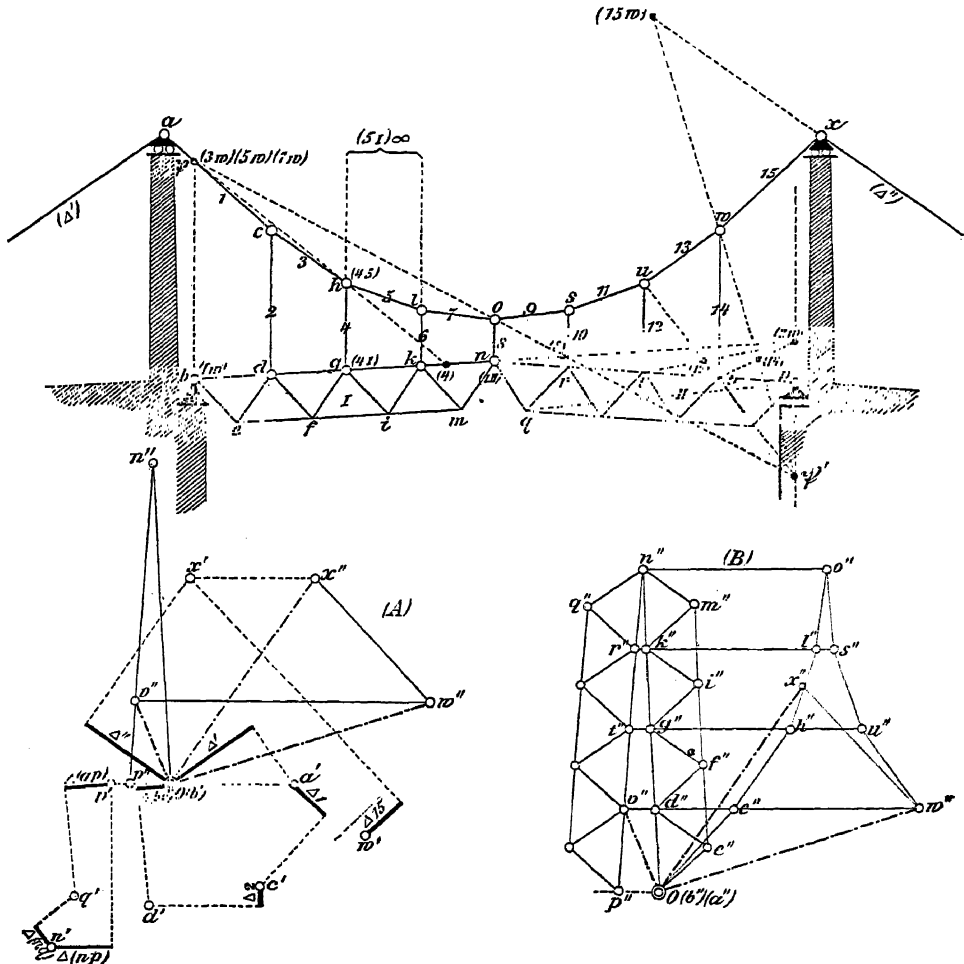



Fig. 56.

Knoten des Fachwerks gegeben, da man schrittweise finden kann:

Punkt d'	mittels	$\Delta(bd)$	und	$\Delta 2$,
„ e'	„	$\Delta(be)$	„	$\Delta(de)$,
„ f'	„	$\Delta(df)$	„	$\Delta(ef)$,
„ g'	„	$\Delta(dg)$	„	$\Delta(fg)$,
„ h'	„	$\Delta 4$	„	$\Delta 3$,

u. s. f. die Punkte i', k', l', m', n', o', hierauf:

Punkt p' auf der Wagerechten durch O mittels Δnp,
„ q' mittels $\Delta(nq)$ und $\Delta(pq)$*)
„ r' „ $\Delta(nr)$ „ $\Delta(qr)$
„ s' „ $\Delta 9$ „ $\Delta 10$ u. s. w. bis Punkt w'.

Schliesslich erhält man den Punkt x', indem man in O und w' die Strecken Δ'' (parallel zur rechten Rückhaltkette) und $\Delta 15$ anträgt und in den Endpunkten dieser Strecken Lothe errichtet.

Jetzt wird die vorübergehend angenommene Führung des Punktes c wieder beseitigt, und hierdurch das Fachwerk in eine zwangläufige kinematische Kette verwandelt, der eine Bewegung zu ertheilen ist, durch welche der Punkt x eine Verschiebung $x''O$ erfährt, die mit Ox' zusammengesetzt eine wagerechte Gesammtverschiebung $x''x'$ ergiebt. Die Pole, um welche sich die einzelnen Glieder des Fachwerks bei dieser zweiten Bewegung drehen, werden wie folgt ermittelt.

Der Pol $(I \cdot w)$ der Scheibe I gegen das Widerlager fällt mit b zusammen, der Pol $(I \cdot II)$ mit n, während $(II \cdot w)$ durch den Schnittpunkt der Geraden $(I \cdot w)$ — $(I \cdot II)$ mit der Senkrechten durch p bestimmt ist, weil sich p auf einer Wagerechten bewegt.

Die Stäbe 5, 4, 6 bilden mit der Scheibe I ein Gelenkviereck, und es ist deshalb der unendlich ferne Schnittpunkt von 4 und 6 der Pol von 5 gegen I; derselbe liegt in der Senkrechten durch b, denn die Pole $(5 \cdot w)$, $(5 \cdot I)$, $(I \cdot w)$ fallen in eine Gerade. Da nun die Verschiebungsrichtung des Punktes c rechtwinklig zur Achse des um a sich drehenden Stabes 1 ist, und c auch dem Stabe 3 angehört, so ist der Schnittpunkt $\mathfrak{P}$ von 1 mit der Senkrechten durch p der Pol von 3 gegen w, und es bewegt sich deshalb h rechtwinklig zur Geraden $\mathfrak{P}h$. Daraus ergiebt sich aber, dass $(5 \cdot w)$ mit $\mathfrak{P}$ zusammenfällt und ebenso kann gefolgert werden, dass sich $\mathfrak{P}$ auch mit $(7 \cdot w)$ deckt.

Ganz ähnlich lässt sich beweisen, dass der Schnittpunkt $\mathfrak{P}'$ der Geraden $\mathfrak{P}o$ mit der Senkrechten durch b der gemeinschaftliche Pol der Stäbe 9, 11 und 13 ist, denn die Pole $(9 \cdot w)$, $(11 \cdot w)$, $(12 \cdot w)$ liegen auf der Geraden, welche durch $(II \cdot w)$ und die unendlich fernen Schnittpunkte der Stäbe 8 und 10, 10 und 12, 12 und 14 geht.

Legt man nun durch $\mathfrak{P}$ und den oberen Endpunkt einer der linken Trägerhälfte angehörenden Hängestange eine Gerade, desgleichen durch $(I \cdot w)$ und den unteren Endpunkt, so erhält man im Schnittpunkte beider Geraden den Pol dieser Stange. Auf diese Art ist in Fig. 56 der kurz mit (4) bezeichnete Pol $(4 \cdot w)$ des Stabes 4 bestimmt

*) $\Delta(pq)$ und $\Delta(np)$ werden einem für die Scheibe II gezeichneten besonderen Plane entnommen. Im Plane (A) haben wir, um eine übersichtliche Figur zu erhalten, nur die Punkte a', c', d', n', p', q', w', x' angegeben.

worden; der Beweis folgt daraus, dass die Punkte $(5 \cdot w)$, $(4 \cdot 5)$, $(4 \cdot w)$ in einer Geraden liegen, desgleichen die Punkte $(I \cdot w)$, $(4 \cdot I)$, $(4 \cdot w)$. Aehnlich werden die Pole der Hängestangen der rechten Hälfte ermittelt. An Stelle der Punkte $\mathfrak{P}$ und $(I \cdot w)$ treten hier die Punkte $\mathfrak{P}'$ und $(II \cdot w)$. In der Figur sind die kurz mit (12) und (14) bezeichneten Pole $(12 \cdot w)$ und $(14 \cdot w)$ der Stäbe 12 und 14 angegeben worden. Pol (8) von 8 ist der Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ und $(I \cdot w)$ — $(II \cdot w)$. Der Pol von $(15 \cdot w)$ gehört der Geraden $\mathfrak{P}'$ (14) und der Mittellinie der rechten Rückhaltkette an.

Um die Verschiebungen zu ermitteln, welche die Punkte der betrachteten Kette erfahren, ziehe man im Plane A den Strahl $x''O$ rechtwinklig zur rechten Rückhaltkette bis zur Wagerechten durch x', hierauf $x''w'' \perp xw$ und Ow'' rechtwinklig zu der Geraden, welche den Punkt w mit dem Pole $\mathfrak{P}'$ verbindet. Den Punkt v'' findet man mittels der Bedingungen: $v''w'' \perp vw$ und $v''O \perp v(14)$ und den Punkt n'' mit Hilfe von $v''n'' \perp vn$ und $n''O \perp n(I \cdot w)$, womit je zwei Punkte der den Scheiben npq und nmb ähnlichen Figuren $n''p''q''$ und $n''m''a''$ bestimmt sind. Bei richtiger Zeichnung muss hierbei p'' in die Wagerechte durch O fallen.

Damit Fig. (A) deutlich bleibe, haben wir die bereits gefundenen Punkte $x''w''v''n''p''$ in eine besondere Fig. (B) übertragen und in dieser die Ermittelung der fraglichen Verschiebungen fortgesetzt. Nach Auftragung der Figuren $n''p''q''$ und $n''m''a''$ wurden der Reihe nach bestimmt:

u''	mittels:	$u''w'' \perp uw$	und	$u''t'' \perp ut$
s''	„	$s''u'' \perp su$	„	$s''r'' \perp sr$
o''	„	$o''s'' \perp os$	„	$o''n'' \perp on$
l''	„	$l''o'' \perp lo$	„	$l''k'' \perp lk$
h''	„	$h''l'' \perp hl$	„	$h''g'' \perp hg$
c''	„	$c''h'' \perp ch$	„	$c''d'' \perp cd$.

Bei sorgfältiger Zeichnung muss eine von c'' aus rechtwinklig zu ca gezogene Gerade den Pol O des Verschiebungsplanes treffen. Ferner muss sein:

$$u''O \perp u\mathfrak{P}', \quad s''O \perp s\mathfrak{P}', \quad o''O \perp o\mathfrak{P}', \quad l''O \perp l\mathfrak{P}, \quad h''O \perp h\mathfrak{P}.$$

4. Beispiel. Fig. 57 stellt eine gegliederte Scheibe der folgenden Erzeugungsweise dar. An ein aus vier Stäben bestehendes Gelenkviereck 1, 2, 3, 4 werden die Knoten 5, 6, 7, ... n so angeschlossen, dass 5 verbunden wird mit 4 und 2, 6 mit 5 und 3, 7 mit 6 und 4, ... n mit $n - 1$ und $n - 3$, worauf schliesslich noch der Stab $n1$ hinzugefügt wird. In Fig. 57 ist $n = 8$. Wird der Verschiebungsplan für den Fall gesucht, dass der Knoten 1 und die Richtung des Stabes 1—2 festliegen, so nehme man zuerst an, es sei der Knoten 3 auf

irgend einer festen Geraden geführt, der Stab 1—8 hingegen beseitigt. Trägt man dann vom Pole O des Verschiebungsplanes aus die (in Fig. 57

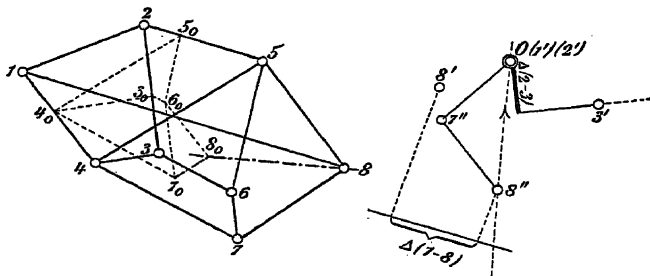



Fig. 57.

positiv vorausgesetzte) Längenänderung $\Delta(2-3)$ des Stabes 2—3 auf und errichtet im Endpunkte derselben ein Loth, so ist dieses der Ort des Punktes $3'$. Dieser Punkt selbst wird beliebig angenommen; die Gerade, welche ihn mit O verbindet, giebt die Richtung an, in welcher 3 vorläufig geführt wird.

Nun bestimmt man der Reihe nach die Punkte $4'$, $5'$, $6'$, $7'$, $8'$, beseitigt hierauf die Führung des Knotens 3 und ertheilt den nunmehr starr zu denkenden, zwangläufig miteinander verbundenen Stäben Bewegungen, durch welche die Bedingung erfüllt wird, dass die gegenseitige Verschiebung der Punkte 8 und 1 gleich der Längenänderung $\Delta(1-8)$ des Stabes 1—8 ist. Dazu ermittelt man mit Hilfe der um $90°$ gedrehten Verschiebungen $3-3_0$, $4-4_0$, ... $8-8_0$ die zur Geraden $8-8_0$ rechtwinklige Richtung des Strahles $8''O$ und bestimmt auf diesem den Punkt $8''$ mittels der Bedingung, dass die Projektion der Gesammtverschiebung $8''8'$ des Punktes 8 auf eine zum Stabe (1 — 8) parallele Gerade gleich der (in der Fig. 57 negativ angenommenen) Längenänderung $\Delta(1-8)$ dieses Stabes ist. Jetzt kann man $7''$ finden mittels $7''-8'' \perp 7-8$ und $7''O \perp 7-7_0$, hierauf $6''$, $5''$, ... Damit sind die Gesammtverschiebungen $m''m'$ sämmtlicher Knoten m bestimmt.

Dem eben betrachteten Stabgebilde entspricht ein Scheibengebilde von ähnlicher Entstehungsweise. Ein Beispiel bietet der in Fig. 54 dargestellte Träger. Die Glieder *I*, 4, 5 bilden mit dem die festen Punkte *a* und *f* verbindenden starren Widerlager ein Gelenkviereck, an das der Knoten *d* mittels *II* und 7 zwangläufig angeschlossen wird, hierauf *i* mittels 12 und 13, sodann *l* mittels 15 und *III*, welches letzte Glied schliesslich bei *m* eine Führung erhält.

5. Beispiel. Es soll noch eine sehr lehrreiche Aufgabe mitgetheilt und auf zweierlei Art gelöst werden. Die zweite Lösung wird nach einem Verfahren erfolgen, das selbst in den schwierigsten Fällen übersichtlich zum Ziele führt.

An ein aus Stäben gebildetes Gelenkfünfeck 1—2—3—4—5 seien weitere Knoten 6, 7, 8, ... *m*, ... *n* durch je zwei Stäbe in der Weise angeschlossen, dass 6 verbunden wird mit 5 und 2, 7 mit 6 und 3, ..., *m* mit $(m-1)$ und $(m-4)$, ..., *n* mit $(n-1)$ und $(n-4)$. Der Knoten 1 und die Richtung des Stabes 1—2 liegen fest; *m* werde in einer ruhenden Geraden $m_0 m_0$ geführt, ebenso *n* in $n_0 n_0$. Es soll der Verschiebungsplan gezeichnet werden.

Fig. 58 a.

In Fig. 58a ist $m = 8$ und $n = 11$. Vom Pole *O* aus (Fig. 58b) wurden die Längenänderungen $\Delta(1-2)$ und $\Delta(1-5)$ der Stäbe 1—2 und 1—5 aufgetragen und an $\Delta(1-2)$ die Strecke $\Delta(2-3)$ gesetzt. Die in den Endpunkten von $\Delta(2-3)$ und $\Delta(1-5)$ auf diesen Strecken

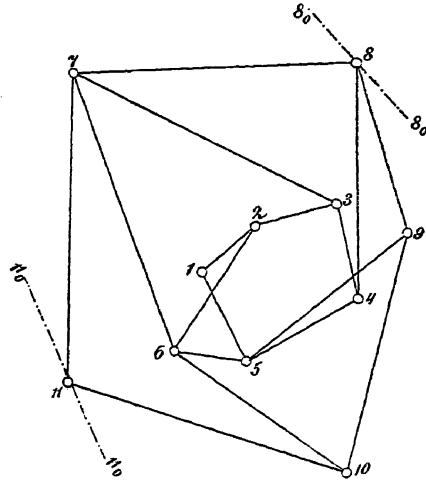
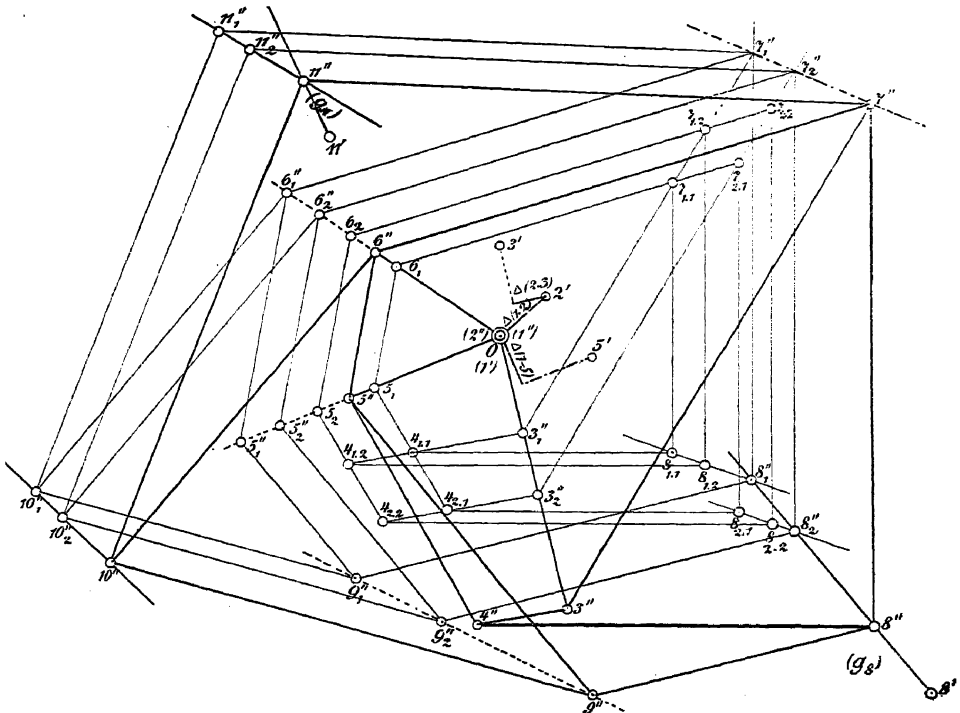



Fig. 58 b.

errichteten Lothe sind die Oerter von $3'$ beziehungsweise $5'$. Werden die Punkte $3'$ und $5'$ vorläufg willkürlich angenommen, wird also gewissermaassen zunächst vorausgesetzt, es seien die Knoten 3 und 5 (statt 8 und 11) in festen, den Polstrahlen $O3'$ und $O5'$ parallelen Geraden geführt, so lassen sich die Punkte $4'$, $6'$, $7'$, $8'$, $9'$, $10'$, $11'$ schrittweise bestimmen, da 4 durch zwei Stäbe mit 3 und 5 verbunden ist, desgleichen 6 mit 2 und 5, u. s. f.

Jetzt hebe man die Führung der Punkte 3 und 5 wieder auf, und drehe die Stäbe 2—3 und 1—5 so um die in Ruhe bleibenden Gelenke 1 und 2, dass 8 eine Verschiebung $8''O$ erfährt, die, mit $O8'$ zusammengesetzt, eine zur Führung $8_0 8_0$ parallele Verschiebung $8''8'$ ergiebt und ebenso für den Punkt 11 eine zu 11_0—11_0 parallele Gesammtverschiebung $11''11'$ erhalten wird. Behufs Darstellung dieser Bewegung zeichne man im Plane Fig. 58b eine Figur $1''$—$2''$—$3''$—$4''\ldots 8''\ldots 11''$, deren Seiten rechtwinklig zu den ihnen entsprechenden Stäben des Fachwerks 1—2—3—4 . . . 8 . . . 11 sind, deren Punkte $1''$, $2''$ mit O zusammenfallen, und deren Punkte $8''$, $11''$ in gegebenen Geraden (g_8) bezieh. (g_{11}) liegen. Die zu 8_0—8_0 parallele (g_8) ist durch den Punkt $8'$ bestimmt, die zu 11_0—11_0 parallele (g_{11}) durch den Punkt $11'$. Diese rein geometrische Aufgabe lässt sich mit Hilfe des folgenden (bereits im ersten Bande mehrfach benutzten) Satzes der Geometrie der Lage lösen.

Aendert ein n-Eck in der Weise seine Form, dass sämmtliche Seiten desselben durch feste Punkte einer und derselben Geraden gehen (die im vorliegenden Falle die unendlich ferne Gerade ist) während n — 1 Eckpunkte gerade Linien beschreiben, so bewegt sich auch der letzte Eckpunkt in einer Geraden.

Man nehme auf der zum Stabe 2—3 rechtwinkligen Geraden $O3''$ zunächst zwei beliebige Punkte $(3_1'', 3_2'')$ versuchsweise an, ebenso auf der zu 1—5 rechtwinkligen $O5''$ zwei beliebige Punkte $(5_1, 5_2)$, ziehe durch $3_1''$ und $3_2''$ gerade Linien rechtwinklig zum Stabe 3—4 und bestimme auf denselben die Schnittpunkte $4_{1\cdot 1}$, $4_{1\cdot 2}$, $4_{2\cdot 1}$, $4_{2\cdot 2}$ der durch 5_1 und 5_2 rechtwinklig zu 5—4 gelegten Geraden. Es sind dann

$[O, 3_1'', 4_{1\cdot 1}, 5_1]$; $[O, 3_1'', 4_{1\cdot 2}, 5_2]$; $[O, 3_2'', 4_{2\cdot 1}, 5_1]$; $[O, 3_2'', 4_{2\cdot 2}, 5_2]$

vier versuchsweise Lösungen für das verlangte Viereck O, $3''$, $4''$, $5''$.

Der ersten Lösung entsprechen die Punkte 6_1, $7_{1\cdot 1}$, $8_{1\cdot 1}$,
„ zweiten „ „ „ „ 6_2, $7_{1\cdot 2}$, $8_{1\cdot 2}$,
„ dritten „ „ „ „ 6_1, $7_{2\cdot 1}$, $8_{2\cdot 1}$,
„ vierten „ „ „ „ 6_2, $7_{2\cdot 2}$. $8_{2\cdot 2}$.

Die Bestimmung von 6_1, $7_{1\cdot 1}$, $8_{1\cdot 1}$ erfolgt der Reihe nach mittels:

5_1—$6_1 \perp 5$—6, O—$6_1 \perp 2$—6, 6_1—$7_{1\cdot 1} \perp 6$—7, $3_1''$—$7_{1\cdot 1} \perp 3$—7,
$7_{1\cdot 1}$—$8_{1\cdot 1} \perp 7$—8, $4_{1\cdot 1}$—$8_{1\cdot 1} \perp 4$—8,

und in gleicher Weise findet man 6_2, ... $8_{2\cdot 2}$.

In den Punkten, in denen die Geraden $8_{1\cdot 1}$—$8_{1\cdot 2}$ und $8_{2\cdot 1}$—$8_{2\cdot 2}$ die gegebene (g_8) schneiden, erhält man die zu $(3_1'', 3_2'')$ gehörenden Lösungen $(8_1'', 8_2'')$ und kann nun in der Geraden $7_{1\cdot 1}$—$7_{1\cdot 2}$ den Punkt $7_1''$ bestimmen, in der Geraden $7_{2\cdot 1}$—$7_{2\cdot 2}$ den Punkt $7_2''$, hierauf $6_1''$, $6_2''$ und $5_1''$, $5_2''$. (Die Ermittelung von $4_1''$ und $4_2''$ ist überflüssig.)

Weiter lässt sich jetzt angeben:

$9_1''$ mittels $8_1''$— $9_1'' \perp$ 8— 9 und $5_1''$— $9_1'' \perp$ 5— 9
$10_1''$ „ $9_1''$—$10_1'' \perp$ 9—10 „ $6_1''$—$10_1'' \perp$ 6—10
$11_1''$ „ $10_1''$—$11_1'' \perp$ 10—11 „ $7_1''$—$11_1'' \perp$ 7—11

und ebenso $9_2''$, $10_2''$, $11_2''$, worauf $11''$ bestimmt ist als Schnittpunkt der Geraden $11_1''$—$11_2''$ mit der zur Führung 11_0—11_0 parallelen g_{11}. Hat man aber $11''$ gefunden, so kann man auch $10''$, $9''$, $8''$, $7''$, $6''$, $5''$, $4''$, $3''$ ermitteln, denn es liegen $10_1''$, $10_2''$, $10''$ in einer Geraden, desgleichen $9_1''$, $9_2''$, $9''$ u. s. w.

Die mitgetheilte Lösung gilt für jedes m und n und bezieht sich auch auf gegliederte Scheiben von der in No. 142 des ersten Bandes beschriebenen Art. Wird, wie in Fig. 201, Band I, die Führung des Knotens 11 durch einen Stab ersetzt, der 11 mit 1 verbindet, so liegt $11''$ auf einer zum Stabe 11—1 rechtwinkligen Geraden, deren Abstand von $11'$ gleich der Längenänderung dieses Stabes ist.*) (Vergl. Beispiel 4, worin der Ort von $8''$ auf diese Weise bestimmt wurde.) Auch wenn an die Stelle der Stäbe gegliederte Scheiben treten, führt das entwickelte Verfahren zum Ziele.

Zu einer anderen, ebenfalls allgemeinen Lösung führt die folgende Betrachtung.

Beseitigt man wie vorhin die Stützungen der Punkte 8 und 11 (Fig. 58a), nimmt dafür aber an, es sei jeder der Knoten 3 und 5 mit einem ausserhalb des Fachwerks liegenden festen Punkte durch einen Stab verbunden, und legt man diesen Stäben (die zur Unterscheidung von den wirklichen Fachwerkstäben als *gedachte* bezeichnet werden mögen) beliebige Längenänderungen Δx und Δy bei, so lassen sich die Verschiebungen sämmtlicher Knotenpunkte durch wiederholte Lösung der ersten Hauptaufgabe (No. 32) bestimmen. Punkt 8 wird sich im allgemeinen von der Führung 8_0—8_0 entfernen; die Projektion seiner Verschiebung auf eine zu 8_0—8_0 rechtwinklige Gerade wird einen endlichen Werth δ_8 annehmen, und ebenso wird sich auch für die Projektion der Verschiebung von 11 auf eine zu 11_0—11_0 rechtwinklige Gerade ein endlicher Werth δ_{11} ergeben.

Zwischen δ_8, δ_{11} und den Aenderungen der Stablängen bestehen nach No. 4 Beziehungen ersten Grades, die sich auf die Form

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \delta_8 = \alpha_8\, \Delta x + \beta_8\, \Delta y + \delta_8' \\ \delta_{11} = \alpha_{11} \Delta x + \beta_{11} \Delta y + \delta_{11}' \end{cases}$$

bringen lassen, worin δ_8' und δ_{11}' von den Längenänderungen der wirklichen Stäbe abhängig sind und diejenigen Werthe bezeichnen, welche δ_8 und δ_{11} für den Fall annehmen, dass die beiden gedachten Stäbe starr vorausgesetzt werden (Zustand: $\Delta x = 0$ und $\Delta y = 0$). Verschwinden auch die Längenänderungen der wirklichen Stäbe (was kurz durch $\Delta s = 0$ angedeutet werden soll) so ergiebt sich $\delta_8' = 0$, $\delta_{11}' = 0$.

Weiter bedeuten:

α_8, α_{11} die Werthe von δ_8, δ_{11} für den Zustand: $\Delta x = 1$, $\Delta y = 0$, $\Delta s = 0$;
β_8, β_{11} „ „ „ δ_8, δ_{11} „ „ „ : $\Delta x = 0$, $\Delta y = 1$, $\Delta s = 0$;

und es können somit die sechs Koefficienten der rechten Seiten der Gleichungen I mit Hilfe von drei Verschiebungsplänen, welche den drei angeführten Zuständen entsprechen, bestimmt werden, worauf die Bedingungen: $\delta_8 = 0$ und $\delta_{11} = 0$, d. h.

$$\begin{aligned} \alpha_8\, \Delta x + \beta_8\, \Delta y + \delta_8' &= 0 \\ \alpha_{11} \Delta x + \beta_{11} \Delta y + \delta_{11}' &= 0 \end{aligned}$$

---

*) Der in Fig. 201, Band I, dargestellte besondere Fall ($m = 8$, $n = 11$, m mit 2 verbunden und n mit 11) lässt sich noch einfacher behandeln, wenn zunächst Stab 2—3 festgelegt wird. Es liegt dann ein Fachwerk von der im Beispiel 4 untersuchten Art vor.

diejenigen Längenänderungen Δx und Δy liefern, welche den beiden gedachten Stäben zugeschrieben werden müssen.

Es leuchtet ein, dass sich auf diesem Wege die Ermittelung der Verschiebungen der Knoten jedes statisch bestimmten Fachwerks auf die wiederholte Lösung der ersten Hauptaufgabe und die Auflösung einer Gruppe von Gleichungen ersten Grades zurückführen lässt.

§ 2.

Darstellung der Formveränderung von Stabzügen mit gelenkartigen Knoten.

39. — Werden gerade Stäbe so aneinander gereiht, dass jeder Stab nur mit dem vorhergehenden und dem nachfolgenden zusammenhängt, so entsteht ein Gebilde, welchem wir den Namen *Stabzug* beilegen. Die Knotenpunkte bezeichnen wir mit den Ziffern 0, 1, 2, . . . $(m-1)$, m, $(m+1)$, . . . n, die Stablängen mit s_1, s_2, . . . s_m, . . . s_n und die Winkel, welche die Mittellinien aufeinander folgender Stäbe einschliessen, mit ϑ_1, ϑ_2, . . . ϑ_m, . . . ϑ_{n-1}. Fig. 59.

Greifen alle äusseren Kräfte in den Knotenpunkten an, und sind die Stäbe durch reibungslose Gelenke miteinander verbunden — was

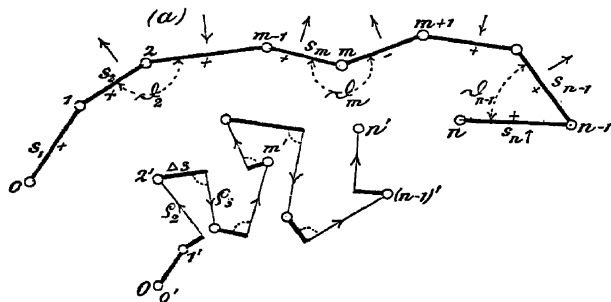



Fig. 59.

beides hier vorausgesetzt werden möge — so wird jeder Stab nur auf Zug oder Druck beansprucht; seine Mittellinie bleibt gerade, und die gegenseitigen Verschiebungen der Knotenpunkte des Gebildes sind bestimmt durch die Aenderungen Δs_1, Δs_2, . . ., $\Delta \vartheta_1$, $\Delta \vartheta_2$, . . . der Längen s und Winkel ϑ. Eine übersichtliche Darstellung dieser Verschiebungen ist u. A. von Werth für die Theorie des Fachwerks, dessen Knotenpunkte häufig durch Stabzüge mit leicht zu berechnenden Winkeländerungen $\Delta \vartheta$ verbunden werden können.

Zunächst werde angenommen, es seien sämmtliche Δs und $\Delta \vartheta$ bekannt, auch werde vorausgesetzt, dass die Richtung der Achse irgend

eines Stabes und ein Punkt dieser Achse festliegen, beispielsweise die Richtung des Stabes s_1 und der Knotenpunkt 0. Die übrigen Stäbe ($s_2, s_3, \ldots s_m, \ldots s_n$) werden sich um gewisse Winkel $\psi_2, \psi_3, \ldots \psi_m, \ldots \psi_n$ drehen, und zwar ist:

$$\psi_2 = \Delta \vartheta_1; \ \psi_3 = \psi_2 + \Delta \vartheta_2; \ \ldots; \ \psi_m = \psi_{m-1} + \Delta \vartheta_{m-1}; \ \ldots$$

Wir betrachten nun einen beliebigen Stab s, dessen Endpunkte die Ordnungsziffern a und b tragen mögen. Fig. 60. Der Weg aa' des Punktes a sei gegeben. Behufs Bestimmung der neuen Lage b' des

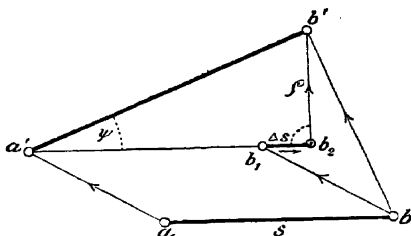
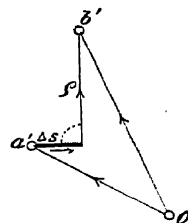



Fig. 60a. Fig. 60b.

Punktes b verschieben wir den Stab ab parallel mit sich selbst in die Lage $a'b_1$, ändern seine Länge um das gegebene Maass $\overline{b_1 b_2} = \Delta s$ und drehen ihn schliesslich um den gegebenen Winkel ψ. Hierbei beschreibt b_2 den Kreisbogen

$$\overline{b_2 b'} = (s + \Delta s)\, \psi,$$

der aber — wegen der Beschränkung unserer Untersuchung auf sehr kleine Verschiebungen — durch ein in b_2 auf $a'b_2$ errichtetes Loth von der Länge

$$\rho = s\psi$$

ersetzt werden darf.

Es empfiehlt sich nun, die Knotenpunktsverschiebungen (wie im § 1) in einer besonderen Figur und in gehöriger Vergrösserung von einem beliebig gewählten Pole O aus aufzutragen, so zwar, dass jede Verschiebung nach Grösse, Richtung und Sinn durch einen *vom* Pole *ausgehenden* Strahl dargestellt wird. In Fig. 60b bezeichnet Oa' die gegebene Verschiebung des Punktes a; an diese wurde die dem Stabe s parallele Strecke Δs angetragen und hieran die zu s rechtwinklige Strecke ρ; es stellt dann der Strahl Ob' die gesuchte Verschiebung des Punktes b vor.

Auf diese Weise sind in Fig. 59b die Verschiebungen der Knotenpunkte des in der Fig. 59a abgebildeten Stabzuges schrittweise ermittelt worden. Die Werthe Δs und $\rho = s\psi$ wurden in der Reihenfolge

$$\Delta s_1, \ \Delta s_2, \ \rho_2, \ \Delta s_3, \ \rho_3, \ldots, \ \Delta s_m, \ \rho_m, \ldots, \ \Delta s_n, \ \rho_n$$

nach Grösse, Richtung und Sinn aneinander gesetzt, wobei allgemein $\Delta s_m \parallel s_m$, $\rho_m \perp s_m$. Anstatt der Zeichen Δs_1, Δs_2, ... wurden die kürzeren $\Delta 1$, $\Delta 2$, ... gebraucht. Die (in der Figur nicht ausgezogenen) Polstrahlen $O1'$, $O2'$, $O3'$, ... stellen nach Grösse, Richtung und Sinn die gesuchten Verschiebungen der Knoten 1, 2, 3, ... dar. In Fig. 60a geben kleine Pfeile den Drehungssinn der einzelnen Stäbe an. Einem positiven ψ entspricht im vorliegenden Falle eine Drehung nach links, einem negativen eine Drehung nach rechts. Die an die Stäbe gesetzten (+) und (—) bedeuten die Vorzeichen der entsprechenden Δs. Die ein (+) tragenden Stäbe werden gedehnt, die übrigen verkürzt.

Wird der Stabzug in einer anderen als der eben vorausgesetzten Art gestützt, so nehme man zuerst die Richtung irgend einer Stabachse und einen Punkt derselben als festliegend an, zeichne den Verschiebungsplan auf die beschriebene Weise und ertheile hierauf dem nunmehr als starres Ganzes zu betrachtenden Gebilde eine Bewegung, durch welche die wirklichen Auflagerbedingungen befriedigt werden. Die Verschiebungen, welche die Knotenpunkte in Folge dieser zweiten Bewegung erfahren, werden — genau wie im § 1 (No. 34) — durch Strahlen $m''O$ dargestellt, die *nach* dem Pole hinzeigen, und deren Zusammensetzung mit den Strahlen Om' die Gesammtverschiebungen $m''m'$ liefern (Fig. 36, S. 60).

Wir werden die Ergebnisse der vorstehenden Betrachtungen hauptsächlich auf die Darstellung der Formänderungen von gegliederten Scheiben anwenden, die sich in Dreiecke zerlegen lassen. Die Winkel ϑ, zwischen den aufeinander folgenden Seiten der die Knotenpunkte derartiger Scheiben verbindenden Stabzüge sind entweder Dreieckswinkel oder sie setzen sich aus solchen zusammen, und es erfordert daher die Berechnung der $\Delta\vartheta$ nur die Lösung der folgenden, auch für spätere Untersuchungen sehr wichtigen Aufgabe:

40. — Zweite Hauptaufgabe. Gegeben seien die Aenderungen Δs_1, Δs_2, Δs_3 der Seitenlängen s_1, s_2, s_3 eines Dreiecks ABC, gesucht die Aenderungen $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$, $\Delta\alpha_3$ der Winkel α_1, α_2, α_3. Fig. 61a.

Zu einer sehr einfachen Darstellung der $\Delta\alpha$ gelangt man mit Hilfe eines Williot'schen Verschiebungsplanes. Man nehme A und die Richtung der Seite AB als festliegend an. Dann fällt A' mit dem Pole O zusammen (Fig. 61b) und $A'B' = \Delta s_3$ giebt die Verschiebung von B an. In A' und B' trage man die Strecken Δs_2 und Δs_1 an und errichte auf diesen in ihren Endpunkten Lothe, deren Schnittpunkt C' die Verschiebung OC' von C bestimmt. Denkt man sich nun den Punkt C'

auf dem in No. 39 beschriebenen Wege mittels der dem Stabe s_2 entsprechenden Werthe Δs_2 und $\rho_2 = s_2 \psi_2$ gefunden, so erkennt man,

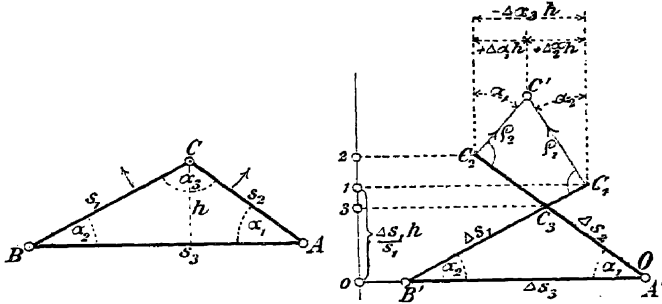



Fig. 61 a. Fig. 61 b.

dass das Loth $\overline{C' C_2}$ von C' auf Δs_2 gleich ρ_2 ist. Der Stab s_2 dreht sich aber, da s_3 festliegt, um $\Delta \alpha_1$; es ergiebt sich daher:

$$\overline{C' C_2} = \rho_2 = s_2 \Delta \alpha_1 ,$$

und ebenso findet man (indem man den Pol von A' nach B' verlegt, also B als ruhend ansieht):

$$\overline{C' C_1} = \rho_1 = s_1 \Delta \alpha_2 .$$

Wir bezeichnen nun den Schnittpunkt von Δs_1 und Δs_2 mit C_3, errichten in einem beliebigen Punkte 0 der $A'B'$ auf dieser Geraden ein Loth, ziehen durch C_1, C_2, C_3 Parallelen zu $A'B'$, welche jenes Loth in 1, 2, 3 schneiden und erhalten:

$$\overline{0\,1} : \Delta s_1 = h : s_1 ; \quad \overline{0\,1} = \Delta s_1 \frac{h}{s_1}; \quad \overline{0\,2} = \frac{\Delta s_2}{s_2} h; \quad \overline{0\,3} = \frac{\Delta s_3}{s_3} h,$$

wo h die zu AB rechtwinklige Höhe des Dreiecks ABC bedeutet.

Weiter projiciren wir die Strecken $\overline{C_2 C'}$ und $\overline{C_1 C'}$ auf eine zur $A'B'$ parallele Gerade und finden für die Projektionen die Werthe:

$\overline{C_2 C'} \sin \alpha_1 = \rho_2 \sin \alpha_1 = s_2 \sin \alpha_1 \Delta \alpha_1 = \Delta \alpha_1 h$ und $\overline{C_1 C'} \sin \alpha_2 = \Delta \alpha_2 h$,

deren algebraische Summe $= - \Delta \alpha_3 h$ ist, weil die Summe der Dreieckswinkel auch nach der Formänderung 180° beträgt, mithin

$$\Delta \alpha_1 + \Delta \alpha_2 + \Delta \alpha_3 = 0 \text{ ist.}$$

Ersetzt man in Fig. 61b die Längenänderungen Δs_1, Δs_2, Δs_3 durch die Verhältnisszahlen $\frac{\Delta s_1}{h}$, $\frac{\Delta s_2}{h}$, $\frac{\Delta s_3}{h}$ (welche nach einem *Zahlen*maassstabe durch Strecken dargestellt werden), so liefert diese Figur die Werthe $\Delta \alpha_1$, $\Delta \alpha_2$, $\Delta \alpha_3$.

Es braucht übrigens nur das durch die Punkte 1, 3, 2 bestimmte Viereck $C_1 C_3 C_2 C'$ gezeichnet zu werden. 3 wird beliebig gewählt; 1 und 2 haben von 3 die Abstände:

$$\overline{3\,1} = \frac{\Delta s_1}{s_1} - \frac{\Delta s_3}{s_3}; \quad \overline{2\,1} = \frac{\Delta s_2}{s_2} - \frac{\Delta s_1}{s_1}.$$

Behufs Vermeidung von Fehlern bei der Feststellung der Vorzeichen der $\Delta\alpha$, versehe man die Strecken $C_2 C'$ und $C_1 C'$ mit Pfeilen, die nach C' hinzeigen. Diese Pfeile geben an, in welchem Sinne sich die Seiten s_2 und s_1 gegen die Seite s_3 drehen. In dem in der Figur dargestellten Falle dreht sich s_2 nach rechts, s_1 nach links; $\Delta\alpha_1$ und $\Delta\alpha_2$ sind also positiv, während sich für $\Delta\alpha_3$ ein negativer Werth ergiebt.

Aus der Fig. 61b, deren Längenabmessungen wir uns durch h dividirt denken, lässt sich auch eine einfache Formel ableiten. Es ist nämlich:

$$-\Delta\alpha_3 = \overline{C_2 C_3}\cos\alpha_1 + \overline{C_3 C_1}\cos\alpha_2$$

$$\overline{C_2 C_3} = \left(\frac{\Delta s_2}{s_2} - \frac{\Delta s_3}{s_3}\right)\frac{1}{\sin\alpha_1}; \quad \overline{C_3 C_1} = \left(\frac{\Delta s_1}{s_1} - \frac{\Delta s_3}{s_3}\right)\frac{1}{\sin\alpha_2}$$

und es folgt daher:

$$(1) \qquad \Delta\alpha_3 = \left(\frac{\Delta s_3}{s_3} - \frac{\Delta s_1}{s_1}\right)\operatorname{cotg}\alpha_2 + \left(\frac{\Delta s_3}{s_3} - \frac{\Delta s_2}{s_2}\right)\operatorname{cotg}\alpha_1.$$

Sind die Längenänderungen lediglich Folge von Spannkräften S_1, S_2, S_3, welche die Spannungen

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{F_1}; \quad \sigma_2 = \frac{S_2}{F_2}; \quad \sigma_3 = \frac{S_3}{F_3}$$

erzeugen, so hat man

$$\frac{\Delta s_1}{s_1} = \frac{\sigma_1}{E_1}; \quad \frac{\Delta s_2}{s_2} = \frac{\sigma_2}{E_2}; \quad \frac{\Delta s_3}{s_3} = \frac{\sigma_3}{E_3}.$$

Bei gleich grossen Elasticitätsziffern (E) ergiebt sich

$$(2) \qquad \begin{cases} E\Delta\alpha_3 = (\sigma_3 - \sigma_1)\operatorname{cotg}\alpha_2 + (\sigma_3 - \sigma_2)\operatorname{cotg}\alpha_1 \\ E\Delta\alpha_2 = (\sigma_2 - \sigma_3)\operatorname{cotg}\alpha_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)\operatorname{cotg}\alpha_3 \\ E\Delta\alpha_1 = (\sigma_1 - \sigma_2)\operatorname{cotg}\alpha_3 + (\sigma_1 - \sigma_3)\operatorname{cotg}\alpha_2. \end{cases}$$

In diesem Falle ist es zweckmässig, die Werthe $E\Delta\alpha$ (an Stelle der $\Delta\alpha$) durch Zeichnung darzustellen, also in Fig. 61b die $\frac{\Delta s}{s}h$ durch die entsprechenden σ zu ersetzen. Man gelangt dann zu dem in der Fig. 62 angegebenen Verfahren, das einer weiteren Erläuterung nicht mehr bedarf. Zu achten ist auf die Vorzeichen der Spannungsunterschiede $\sigma_1 - \sigma_3$ und $\sigma_2 - \sigma_3$. In Fig. 62b wurden beide Werthe positiv an-

genommen, in Fig. 62c der erstere positiv, der andere negativ. In letzterer Figur ist C_3 mit 3 zusammenfallend gewählt. Hinsichtlich der Vorzeichen der Winkeländerungen stimmt Fig. 62b mit Fig. 61b überein.

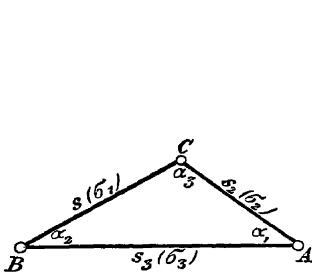
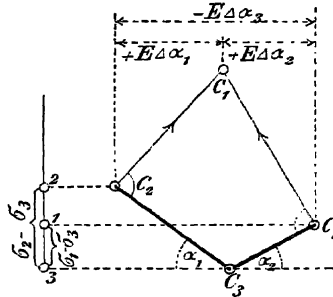
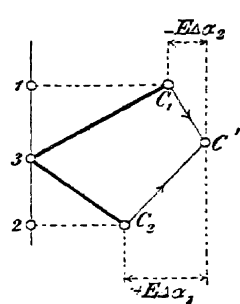



Fig. 62a. Fig. 62b. Fig. 62c.

In dem in der Fig. 62c dargestellten Falle erfährt sowohl s_1 als auch s_2 eine Drehung nach rechts; es ist mithin $\Delta\alpha_1$ negativ, $\Delta\alpha_2$ positiv.

Will man die Werthe $E\Delta\alpha$ *berechnen*, so führt man zweckmässig die Hilfsgrössen ein:

$$\omega_1 = \operatorname{cotg}\alpha_1\,(\sigma_2 - \sigma_3);\quad \omega_2 = \operatorname{cotg}\alpha_2\,(\sigma_3 - \sigma_1);\quad \omega_3 = \operatorname{cotg}\alpha_3\,(\sigma_1 - \sigma_2)$$

und hat dann:

$$E\Delta\alpha_1 = \omega_3 - \omega_2;\quad E\Delta\alpha_2 = \omega_1 - \omega_3;\quad E\Delta\alpha_3 = \omega_2 - \omega_1.$$

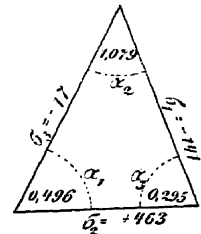
Zur besseren Uebersicht schreibe man auf jede Dreieckseite die betreffende Spannung und in jeden Winkel dessen Cotangente, wie dies Fig. 63 angiebt. Für das dort dargestellte (mit dem Dreieck 11—12—13 des auf Tafel 2 abgebildeten Fischbauchträgers übereinstimmende) Dreieck, in dessen Seiten die Spannungen:

$$-141,\ +463,\ -17\ \textit{klgr}\ \text{f. d. } \textit{qcm}$$

herrschen, erhält man:

Fig. 63.

$$\omega_1 = 0{,}496\,(+463 + 17) = +238;$$
$$\omega_2 = 1{,}079\,(-17 + 141) = +134;$$
$$\omega_3 = 0{,}295\,(-141 - 463) = -178;$$

$E\Delta\alpha_1 = -178 - 134 = -312^k$ f. d. *qcm*; $E\Delta\alpha_2 = +238 + 178 = +416$; $E\Delta\alpha_3 = 134 - 238 = -104$.

Sehr zweckmässig ist es auch, die Werthe ω zeichnerisch zu ermitteln und hierzu ein in möglichst grossem Maassstabe angefertigtes Trägernetz zu benutzen. Fig. 64 (Tafel 2, welche zwei Dreiecke des auf dieser Tafel abgebildeten Fischbauchträgers darstellt) giebt eine Anordnung an, die recht übersichtlich ist. Die auf den Stäben stehenden rothen Zahlen bedeuten die Spannungen in *klgr* f. d. *qcm*. Die Spannungsunterschiede in den die Winkel α_1, α_2, α_3 einschliessenden Seiten sind für das Dreieck *I*:

$$+463 + 17 = +480;\quad -17 + 141 = +124;\quad -141 - 463 = -604$$

und für das Dreieck *II*:

$$-128 + 141 = +13;\quad -141 + 576 = +435;\quad -576 + 128 = -448;$$

dieselben werden beziehungsweise mit cotg α_1, cotg α_2, cotg α_3 multiplicirt. Die Ergebnisse sind für das Dreieck *I*:

$$\omega_1 = +238; \quad \omega_2 = +134; \quad \omega_3 = -178$$

und für das Dreieck *II*:

$$\omega_1 = +13; \quad \omega_2 = +177; \quad \omega_3 = -183.$$

Die Strecken, welche diese Werthe ω darstellen, wurden in Fig. 64 durch Doppellinien bezeichnet. Der Spannungsmaassstab lautet: $4^{mm} = 100^k$ f. d. *qcm*; nur für ω_1 im Dreieck *II* wurde der Maassstab $1^{mm} = 10^k$ f. d. *qcm* gewählt.

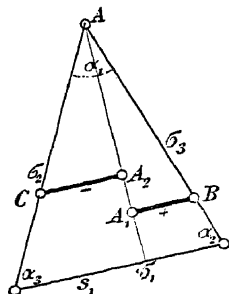



Fig. 65.

Ist für jedes Dreieck nur *eine* Winkeländerung $\Delta\alpha$ zu bestimmen [ein Fall, der vorliegt, wenn das Fachwerk in Fig. 77 (Seite 95) durch den mittels kräftiger Linien angedeuteten Stabzug ersetzt werden soll] so gewährt die folgende Darstellungsweise die beste Uebersicht. Vom Scheitel *A* Fig. 65 des fraglichen Winkels α_1 wird auf die gegenüberliegende Seite ein Loth gefällt, und auf diesem werden die absoluten Werthe der Spannungsunterschiede aufgetragen, indem

$$\overline{AA_1} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad \text{und} \quad \overline{AA_2} = \sigma_1 - \sigma_2$$

gemacht wird. Zieht man nun $A_1B \parallel s_1$, ebenso $A_2C \parallel s_1$, so ist $\overline{A_1B} = (\sigma_1 - \sigma_3)$ cotg α_2 und $\overline{A_2C} = (\sigma_1 - \sigma_2)$ cotg α_3. Die Vorzeichen werden an die Strecken geschrieben. In Fig. 65 ist $\sigma_1 > \sigma_3$ und $\sigma_2 > \sigma_1$ vorausgesetzt worden.

Dann folgt: $$E\Delta\alpha_1 = \overline{A_1B} - \overline{A_2C}.$$

Temperaturänderungen können nach Seite 2 durch Vergrösserung der Spannungen $\sigma = \frac{S}{F}$ um εEt berücksichtigt werden. Ist beispielsweise für einen schmiedeeisernen Stab: $S = 20\,000^k$, $F = 50$ *qcm.*, also $\frac{S}{F} = 400$, und wird der Stab um 30° C. erwärmt, so ist demselben bei Ermittelung der $E\Delta\alpha$ nach den zuletzt beschriebenen Verfahren eine Spannung $\sigma = 400 + \varepsilon Et = 400 + 22 \cdot 30 = 1060^k$ f. d. *qcm* zuzuschreiben, wobei $\varepsilon = 0{,}000012$ und $E = 1\,800\,000$ angenommen wurden. Im Falle einer Abkühlung um 30° erhält man $\sigma = 400 - 24 \cdot 30 = -260$.

41. Untersuchung der Formänderung eines Fachwerkbalkens. Zahlenbeispiel. (Figuren auf Tafel 2.) Es sollen die Verschiebungen der Knotenpunkte der unteren Gurtung des auf Tafel 2 abgebildeten Hauptträgers einer zweigeleisigen Eisenbahnbrücke für die in Fig. 66 angegebene Probebelastung bestimmt werden.*) Die durch diese Belastung erzeugten Spannkräfte sind in Fig. 67 auf folgende Weise ermittelt worden.

Mit beliebiger Polweite *H* wurde in Fig. 66 zu den Achsenbelastungen eine Seillinie gezeichnet und in diese ein Polygon *I II III* . . . *X*

*) Bei Belastungsproben handelt es sich stets um die Ermittelung der von der beweglichen Belastung allein hervorgerufenen Durchbiegungen.

einbeschrieben, dessen Ecken den in der oberen Gurtung liegenden Angriffspunkten 0, 2, 4, ... 18, 20 der Zwischenträger entsprechen. Hierauf wurden in Fig. 67 mittels eines Büschels, dessen Strahlen *I*, *II*, . . . *X* parallel den gleichbezeichneten Polygonseiten sind, auf einer vom Mittelpunkte O des Büschels um H entfernten Senkrechten die Knotenlasten P_2, P_4, P_6, ... P_{18} abgeschnitten und durch einen zur Schlusslinie des Seilpolygons parallelen Strahl s die an den Stützpunkten 0 und 20 angreifenden Auflagerdrücke A und B bestimmt. Schliesslich wurde ein Cremona'scher Kräfteplan gezeichnet. In demselben bedeuten:

$O_1, O_3, O_5, \ldots$ die Spannkräfte der oberen Gurtung,
$U_1, U_2, U_4, \ldots$ „ „ „ unteren „
$D_2, D_3, D_4, \ldots$ „ „ „ [illegible].

Die Figuren 68 und 69 bieten eine übersichtliche Zusammenstellung der Stablängen (in *cm*), Querschnittsinhalte (*qcm*), Spannkräfte (*Tonnen*) und Spannungen (*kilogr.* f. d. *qcm*). Die in den Figuren 70 bis 75 abgebildeten Querschnitte wurden voll gerechnet; die Elasticitätsziffer wurde (für Stabeisen) $= 1800000^k$ f. d. *qcm* angenommen.

Der Füllungsstab 1—2 erhält den Querschnitt: Fig. 72 mit $F = 52$ *qcm*
Die Füllungsst. 2—3, 3—4 erhalten „ Fig. 73 „ $F = 60$ „
„ „ 4—5, 5—6, 6—7, 7—8 „ Fig. 74 „ $F = 68$ „
„ „ 8—9, 9—10 „ Fig. 75 „ $F = 90$ „

Fig. 76 zeigt den Verschiebungsplan der einen Stabzug bildenden unteren Gurtung. Die nach No. 40 ermittelten Werthe $E\Delta\alpha$ der an dieser Gurtung liegenden Dreieckswinkel α sind in die betreffenden Winkel eingeschrieben worden; sie bestimmen die Aenderungen $\Delta\vartheta$ der Stabzugswinkel ϑ. Zuerst wurde der Knoten 9 und die Richtung des Stabes 7—9 festliegend, der Stabzug aber sonst frei angenommen. Es entspricht dann:

dem Stabe 7—5 der Werth $E\psi_{7-5} = E\Delta\vartheta_7 = +212 + 363 + 294$
$= +869^k$ f. d. *qcm*,

„ „ 5—3 „ „ $E\psi_{5-3} = +869 + (301 + 432 + 426)$
$= +2028$,

„ „ 3—1 „ „ $E\psi_{3-1} = 2028 + (447 + 541 + 412)$
$= +3428$,

„ „ 1—0 „ „ $E\psi_{1-0} = 3428 + (2170 + 926)$
$= +6524$,

und ebenso ergeben sich für die rechts an 9 sich schliessenden Stäbe der Reihe nach die Werthe:

$$E\psi = 850;\quad 1754;\quad 2433;\quad 3421;\quad 4943;\quad 8389.$$

Alle auf der linken Seite des ruhenden Stabes 7—9 befindlichen Stäbe erfahren eine Drehung nach rechts, die auf der rechten Seite eine Drehung nach links.

Für den Stab 0 — 1 erhält man nun

$$\rho_{0-1} = s \cdot \psi = \frac{s \cdot E\psi}{E} = 271^{cm} \frac{6524}{1\,800\,000} = 0{,}982^{cm} = 9{,}82^{mm}$$

für den folgenden Stab: $\rho = 6{,}21^{mm}$ u. s. f. Diese Werthe wurden in Fig. 66 (in Klammern) an die einzelnen Stäbe geschrieben; desgleichen wurden die Längenänderungen $\Delta s = \frac{Ss}{EF} = \frac{\sigma s}{E}$ angegeben. Für den Stab 0—1 ergiebt sich z. B.: $\Delta s_{0-1} = \frac{478 \cdot 271}{1\,800\,000} = 0{,}072^{cm} = 0{,}72^{mm}$.

Nach Erledigung dieser Rechnungen konnte der Verschiebungsplan aufgetragen werden. An die Strecke $7' — 9' = \Delta s_{7-9} = 0{,}94^{mm}$ (Maassstab 2 : 1) wurden links der Reihe nach angetragen:

$\Delta s_{7-5} = 0{,}98^{mm}$, $\rho_{7-5} = 1{,}77^{mm}$, $\Delta s_{5-3} = 1{,}00^{mm}$, $\rho_{5-3} = 4{,}25^{mm}$, u. s. w.

und rechts die Strecken:

$\Delta s_{9-11} = 0{,}95^{mm}$, $\rho_{9-11} = 1{,}70^{mm}$, $\Delta s_{11-13} = 0{,}93^{mm}$, $\rho_{11-13} = 3{,}53^{mm}$, u. s. f.

Die Endpunkte der Strecken ρ_{7-5}, ρ_{5-3}, . . . bestimmen die Punkte 5′, 3′, ..., denjenigen von ρ_{9-11}, ρ_{11-13}, . . . die Punkte 11′, 13′, . . .

Schliesslich wurde zur Erfüllung der wirklichen Auflagerbedingungen geschritten und die dem Stabzuge 0 — 1 — 3 — 5 . . . 19 — 20 ähnliche Figur 0″ — 1″ — 3″ — 5″ . . . 19″ — 20″ gezeichnet. Der Punkt 0″ fällt mit 0′ zusammen, weil Knoten 0 festliegt, während 20″ auf der Wagerechten durch 20′ liegen muss, da der Knoten 20 auf einer wagerechten Auflagerbahn geführt wird; 0″ — 20″ ist rechtwinklig zu 0 — 20.*)

Damit sind die Verschiebungen 1″ 1′, 3″ 3′, ... der Knoten 1, 3, ... nach Grösse, Richtung und Sinn bestimmt.

In Fig. 76 wurde noch die Biegungslinie der unteren Gurtung eingetragen. Die Eckpunkte 0_0, 1_0, 3_0, ... derselben liegen senkrecht unter den entsprechenden Knoten 0, 1, 3, ... und auf den

---

*) Probe: Die Verschiebung 20″—20′ muss im vorliegenden Falle gleich der Summe der [illegible] Δs der Stäbe der oberen Gurtung sein. Da diese Stäbe g[illegible] gleichen Querschnitt haben, so findet man:

$$\overline{20''—20'} = \frac{s}{EF} \Sigma S = \frac{360 \cdot 1\,592\,000^{k}}{1\,800\,000 \cdot 278} = 1{,}15^{cm} = 11{,}5^{mm}.$$

Wagerechten durch die Punkte 0′, 1′, 3′, ... ; die grösste senkrechte Verschiebung (28,8 ^{mm}) erfährt der Knotenpunkt 9. Wird nur das Biegungspolygon gesucht, so braucht die Figur 0″—1″—2″ . . . 20″ nicht gezeichnet zu werden.

Will man die Verschiebungen sämmtlicher Knotenpunkte haben, so muss man den in Fig. 77 kräftig ausgezogenen Stabzug 0—1—2—3 . . . 18—19—20 untersuchen. In Fig. 77 sind die Längenänderungen der Stäbe (in *mm*) und

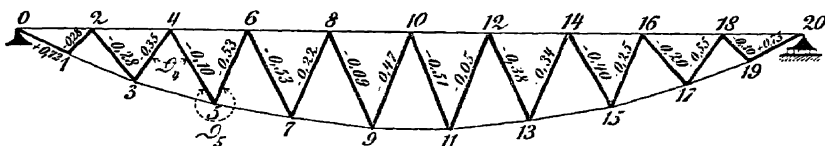



Fig. 77.

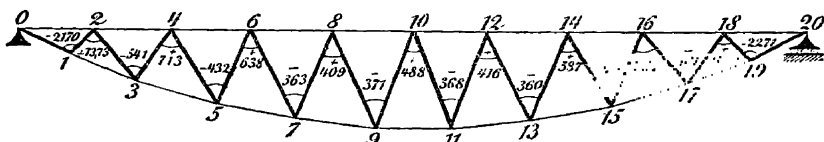



Fig. 78.

in Fig. 78 die Werthe $E\Delta\alpha$ (in *klg* f. d. *qcm*) angegeben worden. Dem Leser wird empfohlen, diese Aufgabe zu lösen. Es ist zweckmässig, zuerst den Knoten 10 und die Richtung des Stabes 10—9 als ruhend anzusehen.

42. — Wir wollen die im Vorstehenden gelehrte Darstellungsweise der Verschiebungen kurz das *Stabzugverfahren* nennen; dasselbe liefert übersichtlichere Figuren als das Verfahren von Williot und verdient namentlich dann den Vorzug, wenn die nach Williot zur Bestimmung der Punkte m' auf den Δs zu errichtenden Lothe sich unter sehr spitzen Winkeln schneiden. Dagegen erfordert das Stabzugverfahren etwas mehr Zeit, es sei denn, dass die Winkeländerungen noch anderweitig gebraucht werden, was beispielsweise der Fall ist, wenn für ein unter der Voraussetzung gelenkartiger Knoten berechnetes, in Wirklichkeit aber vernietetes Fachwerk die von den festen Verbindungen herrührenden Spannungsänderungen nachgewiesen werden sollen — eine Aufgabe, die sich, wie in der dritten Abtheilung dieses Bandes gezeigt werden wird, mit Hilfe der Winkeländerungen besonders einfach lösen lässt. Hierbei wird allerdings vorausgesetzt, dass diese Zusatzspannungen (welche auch *Nebenspannungen* heissen) und die Verschiebungen für ein und denselben Belastungszustand verlangt werden, ein Fall, der häufig eintritt.

Auch die Anwendung eines gemischten Verfahrens ist oft am Platze. So kann es z. B. vortheilhaft sein, bei Untersuchung der in den Figuren 50 bis 56 dargestellten Träger die für die einzelnen Scheiben erforder-

lichen Sonderpläne nach dem Stabzugverfahren zu zeichnen, während es im übrigen zweckmässig ist, den früher befolgten Weg einzuschlagen.

43. Zeichnerische Ermittelung der Werthe ρ. Wir betrachten (wie in No. 39) einen Stabzug $0 - 1 - 2 - \ldots - n$ Fig. 79, dessen Knoten 0 und Stabrichtung $0 - 1$ festliegen und suchen die nur von den Winkeländerungen $\Delta\mathfrak{J}$ abhängigen Verschiebungen, nehmen also an, es seien sämmtliche $\Delta s = 0$. Der Verschiebungsplan besteht dann aus einem Linienzuge $O - 2' - 3' - \ldots - n'$, dessen Seiten $\overline{O2'} = \rho_2 = s_2 \Delta\mathfrak{J}_2$, $\overline{2'3'} = \rho_3 = s_3 \Delta\mathfrak{J}_3$, ... beziehungsweise rechtwinklig zu den Stäben s_2, s_3, ... sind, und der offenbar bestimmt ist, sobald die Projektionen δ_2', δ_3', ... der Verschiebungen $O2'$, $O3'$, ... auf eine Gerade AB (deren Richtung aber keiner der Stabachsen parallel sein darf, damit sie von keiner Seite ρ rechtwinklig geschnitten wird) gegeben sind.

Die Seitenverschiebungen δ' lassen sich sehr leicht finden. Dazu nehmen wir zunächst an, es ändere sich nur der Winkel $\mathfrak{J}_1$, es drehe

Fig. 79.

sich also der Stabzug $1 - 2 - \ldots n$ um $\Delta\mathfrak{J}_1$. Punkt m, der vom Drehpunkte 1 den Abstand e haben möge, verschiebt sich in einer zur Geraden $1 - m$ rechtwinkligen Richtung und um eine Strecke: $\delta_{m.1} = e\Delta\mathfrak{J}_1$, deren Projektion $\delta'_{m.1}$ auf die zur AB parallele mm_1 durch die Gleichung:

$$\delta'_{m.1} : \delta_{m.1} = x_1 : e$$

bestimmt ist, worin x_1 den Abstand des Knotens 1 von der Geraden $m m_1$ bedeutet. Man erhält:

$$\delta'_{m.1} = x_1 \Delta \vartheta_1$$

und, wenn sämmtliche Winkel die vorgeschriebenen Aenderungen $\Delta \vartheta$ erfahren:

$$(3) \qquad \delta'_m = x_1 \Delta \vartheta_1 + x_2 \Delta \vartheta_2 + \ldots x_{m-1} \Delta \vartheta_{m-1} = \sum_1^{m-1} x \Delta \vartheta.$$

Die Winkeländerungen $\Delta \vartheta_m$, $\Delta \vartheta_{m+1}$, ... sind ohne Einfluss auf die Bewegung von m.

Der auf der rechten Seite der Gleichung (3) stehende Ausdruck lässt sich nun deuten als *das auf den Punkt m bezogene statische Moment von Kräften* $\Delta \vartheta_1$, $\Delta \vartheta_2$ .... $\Delta \vartheta_{m-1}$, *welche in den links von m gelegenen Knotenpunkten angreifen und die Richtung AB haben,* und hieraus (und aus No. 17, Band I, Seite 20) ergiebt sich das folgende Verfahren, die Werthe ρ durch Zeichnung zu bestimmen.

Man zeichne zu den Gewichten*) $\Delta \vartheta_1$, $\Delta \vartheta_2$, ... $\Delta \vartheta_{n-1}$ mit der Polweite 1 (*Zahlen*einheit) ein Seilpolygon, dessen erste Seite zweckmässig rechtwinklig zu AB angenommen wird. Die den Knotenpunkten 2, 3, ... m, ... n entsprechenden, parallel zu AB gemessenen Abstände des Seilpolygons von der Seite I sind dann beziehungsweise $= \delta_2'$, δ_3', ... δ_m', ... δ_n'. Zieht man also durch die Punkte 1, 2, ... m, ... n des [illegible] Parallelen zur Seite I und zeichnet einen Linienzug $0' 2' \ldots m' \ldots n'$, dessen Ecken in jenen Parallelen liegen und dessen Seiten rechtwinklig zu den entsprechenden Seiten des Stabzuges sind, so erhält man die Werthe:

$$\rho_2 = \overline{0' - 2'}, \quad \rho_3 = \overline{2' - 3'}, \ldots, \quad \rho_n = \overline{(n-1)' - n'}.$$

Will man diese Strecken ρ in ν-facher Vergrösserung erhalten, so ersetze man die $\Delta \vartheta$ durch die Gewichte $\nu \Delta \vartheta$ oder die Polweite 1 durch die Polweite $\frac{1}{\nu}$.

In Fig. 79 wurde angenommen, dass die Winkel ϑ_{m-1} und ϑ_m abnehmen, alle übrigen ϑ hingegen eine Vergrösserung erfahren.

Wir empfehlen dem Leser, die auf Tafel 2 in Fig. 76 angegebenen Werthe ρ durch Zeichnung zu bestimmen und die Ergebnisse mit den durch die Rechnung gewonnenen zu vergleichen. Sollen die ρ im Maassstabe 2 : 1 erhalten werden, so sind (wenn die Polweite = 1 gewählt wird) die Knoten des im Maassstabe 1 : 300 gezeichneten Fachwerks mit den Gewichten $2 \cdot 300 \, \Delta \vartheta = \frac{600 \cdot E \Delta \vartheta}{1\,800\,000} = \frac{E \Delta \vartheta}{3000}$ zu belasten. Dem Knoten 1 entspricht z. B. $E \Delta \vartheta = 2170 + 926 = 3096$, und es ist daher seine Belastung $= 1{,}032$.

*) Der Ausdruck *Gewicht* ist hier natürlich in mathematischem Sinne zu nehmen. Die $\Delta \vartheta$ sind Zahlen, ihre Auftragung macht die Anfertigung eines besonderen Zahlenmaassstabes nöthig.

44. Längenänderung einer Stabzugsehne. Eine für die Folge wichtige Aufgabe besteht darin, die Längenänderung der zwei Knoten 0 und n eines Stabzuges (Fig. 80) verbindenden Sehne durch die Längenänderungen Δs und Winkeländerungen $\Delta\vartheta$ auszudrücken. Wir bezeichnen den Abstand irgend eines Knotens m von der Sehne $0 - n$ mit y_m, den Neigungswinkel des Stabes s_m gegen die $0 - n$ mit φ_m und setzen $s_m \cos \varphi_m = e_m$.

Die Vergrösserung von ϑ_m um $\Delta\vartheta_m$ erzeugt für sich allein $\Delta l = y_m \Delta\vartheta_m$, ein Ergebniss, das ohne weiteres aus No. 43 (und auch aus Fig. 80) folgt, während der Aenderung der Stablänge s_m um Δs_m $\Delta l = \Delta s_m \cos \varphi_m$ entspricht. Im ganzen entsteht daher:

$$\Delta l = \sum_1^{n-1} y_m \Delta\vartheta_m + \sum_1^{n} \Delta s_m \cos \varphi_m{}^{*)}$$

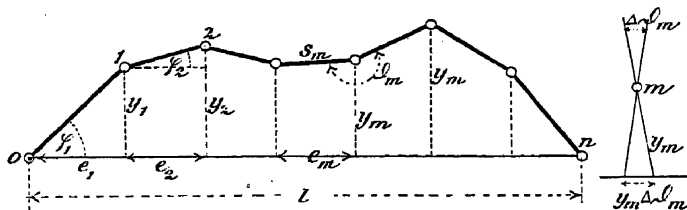



Fig. 80.

und für den Fall $t = 0$ $\left(\text{wegen } \Delta s = \frac{\sigma s}{E}\right)$:

$$\Delta l = \sum_1^{n-1} y_m \Delta\vartheta_m + \sum_1^{n} \frac{\sigma_m}{E} e_m. \tag{4}$$

Will man diese Formel auch dann anwenden, wenn Temperaturänderungen berücksichtigt werden sollen, so muss die Spannung $\sigma = \frac{S}{F}$ um den Betrag $\varepsilon E t$ erhöhen. Vergl. den Schluss von No. 40.

Der Ausdruck $\Sigma y \Delta\vartheta$ lässt sich als das auf die Sehne $0 - n$ bezogene statische Moment von Gewichten $\Delta\vartheta_1$, $\Delta\vartheta_2$, ... deuten, welche in den Knoten 1, 2, ... des Stabzuges angreifen und parallel zu $0 - n$ sind. Es ist also möglich, diesen Ausdruck mit Hilfe eines Seilpolygons darzustellen.

---

*) $\sum_1^{n-1} y_m \Delta\vartheta_m = \sum_{m=1}^{m=n-1} y_m \Delta\vartheta_m$ bedeutet die Summe der Werthe $y_1 \Delta\vartheta_1$, $y_2 \Delta\vartheta_2$ ... bis $y_{n-1} \Delta\vartheta_{n-1}$.

§ 3.

Die Biegungslinie als Seilpolygon betrachtet.

45. Auffassung eines beliebigen Polygons als Seilpolygon. Jeder aus Geraden bestehende Linienzug 0 — 1 — 2 — 3 — . . . (Fig. 81) lässt sich als das Seilpolygon endlicher Kräfte P_1, P_2, P_3, . . . deuten, die in den Punkten 1, 2, 3, . . . angreifen, und deren Richtungen innerhalb gewisser Grenzen willkürlich gewählt werden dürfen. Das Grössenverhältniss dieser Kräfte ist durch die Seiten eines zweiten Linienzuges $ABCD$ . . . bestimmt, dessen Ecken auf den durch einen beliebigen Pol O parallel zu den Geraden 0 — 1, 1 — 2, 2 — 3, . . . gezogenen Strahlen *I, II, III*, . . . liegen und dessen Seiten AB, BC, CD, . . . die Richtungen der Kräfte P_1, P_2, P_3, . . . haben. Es verhält sich:

Fig. 81.

$$P_1 : P_2 : P_3 : \ldots = \overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CD} : \ldots .$$

Sollen alle Kräfte endlich werden, so darf die Richtung keiner Kraft in eine der beiden angrenzenden Seiten des Linienzuges 0—1—2—3— . . . fallen, es darf also z. B. P_2 weder die Richtung von *II* noch die von *III* haben.

Wird ein Linienzug 0 — 1 — 2 — 3 — . . . als das Seilpolygon *paralleler Kräfte* betrachtet (Fig. 82), so bestehen zwischen der Polweite H, den Kräften P und den in der Richtung der P gemessenen Abständen η_1, η_2, η_3, . . . der Punkte 1, 2, 3, . . . von einer beliebigen Geraden AB einfache Beziehungen, die es gestatten, die P durch die η auszudrücken. Legt man nämlich durch den Punkt 2 eine Parallele zu AB, welche die Richtung von P_3 in $3'$ trifft, und verlängert 1 — 2 bis $3''$, so erhält man:

$$\overline{3''-3'} = (\eta_2 - \eta_1)\frac{\lambda_3}{\lambda_2}; \qquad \overline{3-3'} = \eta_3 - \eta_2, \quad \text{also}$$

$$\overline{3''-3} = \overline{3''-3'} - \overline{3-3'} = (\eta_2 - \eta_1)\frac{\lambda_3}{\lambda_2} - (\eta_3 - \eta_2),$$

wobei λ_2 und λ_3 die Projektionen der Seiten 1 — 2 und 2 — 3 auf

eine zur Richtung der P rechtwinklige Gerade bedeuten. Weiter findet man:

$$\overline{3''-3} : \lambda_3 \parallel P_2 : H, \quad \text{mithin:} \quad \overline{3''-3} = P_2 \frac{\lambda_3}{H}$$

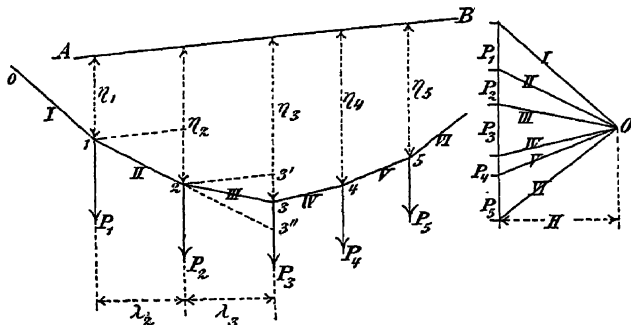



Fig. 82.

und daraus folgt dann:

$$P_2 = H\left[\frac{\eta_2 - \eta_1}{\lambda_2} - \frac{\eta_3 - \eta_2}{\lambda_3}\right],$$

und allgemein:

$$(1) \qquad P_m = H\left[\frac{\eta_m - \eta_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{\eta_{m+1} - \eta_m}{\lambda_{m+1}}\right].$$

46. Die Biegungslinie. An der Hand der vorstehenden Betrachtungen möge nun die Biegungslinie eines Stabzuges $0-1-2-\ldots m \ldots$ (Fig. 83) als Seilpolygon paralleler Kräfte gedeutet werden.

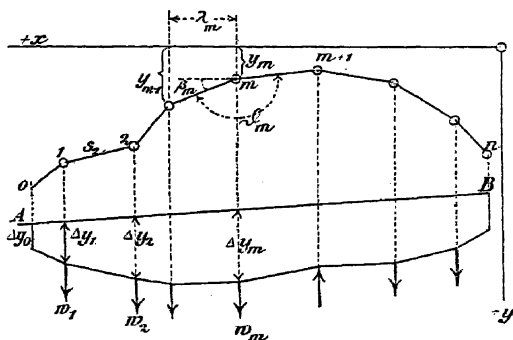



Fig. 83.

Den in einer senkrechten Ebene angenommenen Stabzug beziehen wir auf ein beliebiges rechtwinkliges Achsenkreuz x, y, dessen Wahl an die einzige Einschränkung gebunden ist, dass keiner der Neigungswinkel β_1, β_2, β_3 ... der Stäbe s_1, s_2, s_3, ... gegen die x-Achse gleich 90° sein darf. Sodann setzen wir voraus, es seien die Verschiebungen sämmtlicher Knotenpunkte in je zwei den Achsen x und y parallele Seitenverschiebungen Δx und Δy (das sind die Aenderungen der Coordinaten

x und y) zerlegt und denken uns die Δy auf den durch die Knotenpunkte parallel zur y-Achse gelegten Geraden von einer beliebig angenommenen Geraden AB aus aufgetragen. Den Linienzug, welcher die Endpunkte der Δy verbindet, nennen wir die *Biegungslinie* und die von dieser Linie, von der AB und den Δy_0, Δy_n begrenzte Fläche die *Biegungsfläche für die Richtung y*. Die der y-Achse parallelen Kräfte, deren Seilpolygon die Biegungslinie ist, bezeichnen wir mit $w_1, w_2, \ldots w_m, \ldots$; sie sind, wenn die Polweite $= 1$ gemacht, bestimmt durch:

$$(2) \qquad w_m = \frac{\Delta y_m - \Delta y_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{\Delta y_{m+1} - \Delta y_m}{\lambda_{m+1}}.$$

Differentiiren wir nun die Gleichung

$$y_{m-1} - y_m = s_m \sin \beta_m$$

und ersetzen (da es sich hier nur um verschwindend kleine Verschiebungen handelt) das Differentialzeichen durch das Zeichen Δ, so erhalten wir:

$$\Delta y_{m-1} - \Delta y_m = \Delta s_m \sin \beta_m + s_m \cos \beta_m \Delta \beta_m$$

und (nach Division durch $\lambda_m = s_m \cos \beta_m$):

$$\frac{\Delta y_m - \Delta y_{m-1}}{\lambda_m} = -\frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg} \beta_m - \Delta \beta_m.$$

Ebenso ergiebt sich:

$$\frac{\Delta y_{m+1} - \Delta y_m}{\lambda_{m+1}} = -\frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{tg} \beta_{m+1} - \Delta \beta_{m+1},$$

weshalb entsteht:

$$w_m = -\Delta \beta_m + \Delta \beta_{m+1} - \frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg} \beta_m + \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{tg} \beta_{m+1}.$$

Nun ist aber: $\qquad \beta_{m+1} + 180^\circ - \beta_m = \mathfrak{J}_m,$

mithin: $\qquad \Delta \beta_{m+1} - \Delta \beta_m = \Delta \mathfrak{J}_m,$

und es findet sich schliesslich

$$(3) \qquad w_m = \Delta \mathfrak{J}_m - \frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg} \beta_m + \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{tg} \beta_{m+1}.$$

Für $\beta_m = 90^\circ$ oder $\beta_{m+1} = 90^\circ$ wird w_m unendlich gross, und es leuchtet ein, dass die zu Anfang der Untersuchung hinsichtlich der Lage des Achsenkreuzes gemachte Einschränkung geboten ist, wenn alle w endlich sein sollen.

Bleiben die anfänglichen Stabtemperaturen ungeändert, ist also für jeden Stab: $\frac{\Delta s}{s} = \frac{S}{EF} = \frac{\sigma}{E}$, und besitzen sämmtliche Stäbe die

gleiche Elasticitätsziffer E, so ist es zweckmässig, die Biegungslinie als das Seilpolygon von Kräften

$$(4) \qquad w_m = E\Delta\vartheta_m - \sigma_m \operatorname{tg} \beta_m + \sigma_{m+1} \operatorname{tg} \beta_{m+1}$$

aufzufassen. Wählt man dann die Polweite E, so erhält man die Δy in demselben Maassstabe, in welchem der Stabzug gezeichnet ist. Will man die Δy in ν-mal grösserem Maassstabe darstellen, so mache man die Polweite $= \frac{E}{\nu}$. Es ist dieses Verfahren — bei überall gleichem E — auch dann zu empfehlen, wenn Temperaturänderungen berücksichtigt werden sollen; man muss dann aber die Spannungen $\sigma = \frac{S}{F}$ um $\varepsilon E t$ vergrössern. Vergl. den Schluss von No. 40.

Nach Aufzeichnung des Seilpolygons sind die Δy bestimmt, sobald die Schlusslinie AB gegeben ist, sobald also beispielsweise zwei Verschiebungen Δy bekannt sind.

Zahlenbeispiel (Figuren auf Tafel 2). Es sollen die senkrechten Seitenverschiebungen der Knotenpunkte der oberen Gurtung des in Fig. 84 abgebildeten Fischbauchträgers bestimmt werden. Die Belastung ist in Fig. 66 angegeben; den Kräfteplan zeigt Fig. 67*). Die Stablängen s und Querschnittsinhalte F sind in Fig. 68 zusammengestellt, die Spannkräfte S und Spannungen σ in Fig. 69. Die rothen Zahlen in Fig. 84 bedeuten die nach No. 40 ermittelten Werthe $E\Delta\alpha$ (*klgr* f. d. *qcm*) der Dreieckswinkel, aus denen sich die Winkel ϑ_2, ϑ_4, . . . zusammensetzen. Es ergiebt sich:

$E\Delta\vartheta_2 = +1719 + 1373 + 243 = 3335^k$ f. d. *qcm*; $E\Delta\vartheta_4 = 298 + 713 + 25 = 1036$; $E\Delta\vartheta_6 = 1371$; $E\Delta\vartheta_8 = 457$; $E\Delta\vartheta_{10} = 1246$; $E\Delta\vartheta_{12} = 581$; $E\Delta\vartheta_{14} - 1025$; $E\Delta\vartheta_{16} = 1150$; $E\Delta\vartheta_{18} = 3856$.

Da die Neigungswinkel sämmtlicher Obergurtstäbe gegen die wagerechte x-Achse gleich Null sind, so folgt aus Gleich. (4), Seite 102,

$$w_m = E\Delta\vartheta_m.$$

Die Gewichte w_m wurden im Maassstabe: 1000^k f. d. $qcm = 5^{mm}$ aufgetragen. Der Längenmaassstab der Trägerzeichnung ist 1 : 300, der für die Verschiebungen ist 600 mal so gross (nämlich 2 : 1), und es wurde daher die Polweite $\frac{E}{600} = \frac{1\,800\,000}{600} = 3000^k$ f. d. $qcm = 15^{mm}$ gewählt. Nach Aufzeichnung des Seilpolygons wurde die Schlusslinie AB mittels der Bedingungen festgelegt, dass die senkrechten Verschiebungen der Knoten 0 und 20 gleich Null sind. Die für die Durchbiegungen gefundenen Werthe wurden in die Figur eingeschrieben.

Im vorliegenden Falle lassen sich auch die wagerechten Verschiebungen der Knoten 2, 4, . . . der oberen Gurtung sehr schnell angeben. So erfährt

---

*) Vergl. No. 41; dort ist die Formänderung der unteren Gurtung dieses Trägers untersucht worden.

8 eine Verschiebung nach links, welche gleich der Summe der (in die Fig. 84 eingetragenen) Verkürzungen der Stäbe 0 — 2, 2 — 4, 4 — 6, 0 — 8 ist, also $= 1{,}09 + 1{,}12 + 1{,}16 + 1{,}17 = 4{,}54^{mm}$. Für den Knoten 18 erhält man die wagerechte Verschiebung: $10{,}32^{mm}$. Das ganze Verfahren ist sehr übersichtlich und liefert auch recht zuverlässige Ergebnisse.

Wir empfehlen dem Leser, zur Uebung auch die Biegungslinie der *unteren* Gurtung dieses Trägers durch ein Seilpolygon darzustellen. Zuerst müssen die den einzelnen Stäben entsprechenden Werthe $\sigma \operatorname{tg} \beta$ berechnet werden, wobei die Vorzeichen streng zu beachten sind. Für die Stäbe 0 — 1 bis 7 — 9 ist β negativ, für 11 — 13 bis 19 — 20 positiv (vergl. auch die Textfigur 83 auf S. 100). Man erhält mit den in der Fig. 68 angegebenen Höhenzahlen:

für den Stab 0 — 1: $\sigma \operatorname{tg} \beta = -478 \dfrac{1{,}268}{2{,}4} = -253$

„ „ „ 1 — 3: $\sigma \operatorname{tg} \beta = -492 \dfrac{2{,}546 - 1{,}268}{3{,}0} = -210$

für die folgenden Stäbe der Reihe nach:

$\sigma \operatorname{tg} \beta = -151;\ \ -98;\ \ -47;\ \ 0;\ \ +47;\ \ +98;\ \ +151;\ \ +219;\ \ +264.$

Die $E \Delta \mathfrak{S}$ sind für die Knoten 1, 3, 5, ... 19:

3096; 1400; 1159; 869; 850; 904; 679; 988; 1522; 3446,

und es ergeben sich mithin für die Gewichte w_m nach Gleichung (3) die Werthe (*klgr* f. d. *qcm*)

$w_1 = 3096 + 253 - 210 = 3139$	$w_{11} = 904 - 0 + 47 = 951$
$w_3 = 1400 + 210 - 151 = 1459$	$w_{13} = 679 - 47 + 98 = 730$
$w_5 = 1159 + 151 - 98 = 1212$	$w_{15} = 988 - 98 + 151 = 1041$
$w_7 = 869 + 98 - 47 = 920$	$w_{17} = 1522 - 151 + 219 = 1590$
$w_9 = 850 + 47 + 0 = 897$	$w_{19} = 3446 - 219 + 264 = 3491.$

Die Polweite wähle man wie vorhin $= 3000^k$ f. d. *qcm*; man erhält dann die senkrechten Verschiebungen im Maassstabe 2 : 1.

Will man die senkrechten Verschiebungen *sämmtlicher* Knotenpunkte des Trägers mit Hilfe *eines* Seilpolygons darstellen, so betrachte man den in Fig. 77 Seite 95) durch kräftige Linien dargestellten Stabzug. Dieser letztere Weg führt aber nur dann zum Ziele, wenn alle Füllungsstäbe (wie im vorliegenden Beispiele) eine gegen die Senkrechte geneigte Lage haben.

Wollte man die senkrechten Verschiebungen der Knotenpunkte *beider* Gurtungen des in Fig. 85 abgebildeten Trägers durch *ein* Seilpolygon darstellen, und zu diesem Zwecke den Stabzug 0 — 1 — 2 — 3 — 4 — 5 — . . . . 9 — 11 — 10 — 13 . . . . 16 untersuchen, so würde man unendlich grosse w-Kräfte erhalten, da den senkrechten Stäben Winkel $\beta = 90°$ entsprechen. Hat man aber für dieses Fachwerk die Biegungslinie der einen Gurtung ermittelt, so findet man diejenige der anderen sehr schnell mit Hilfe der Bedingung, dass sich die senkrechten Verschiebungen entsprechender Punkte (z. B. 1 und 0, 3 und 2, u. s. w.) um die Längenänderung des Verbindungsstabes unterscheiden. Verschiebt sich also beispielsweise 4 um δ_4 nach abwärts und verkürzt sich der Stab 5 — 4 um Δs, so ist $\delta_5 = \delta_4 + \Delta s$.

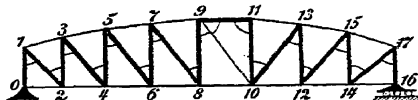



Fig. 85.

47. — Für das *einfache Dreiecknetz* möge noch eine andere Berechnungsweise der w gezeigt werden, wobei dahingestellt bleiben möge, ob dieses Fachwerk einem einfachen oder einem Gerber'schen Balken, einem Bogen mit drei Gelenken oder einer anderen Trägerart angehört. Wir unterscheiden drei Fälle.

I. Fall. Sämmtliche Stäbe schliessen mit der x-Achse Winkel ein, die kleiner oder grösser als $90°$ sind *(Strebenfachwerk)*. Gesucht sind die Verschiebungen Δy der Knotenpunkte beider Gurtungen.

Mit Bezugnahme auf die aus Fig. 86 zu ersehende Bezeichnung der Knotenpunkte sollen bedeuten:

o_m die Länge des einem Knotenpunkte m der unteren Gurtung gegenüberliegenden Obergurtstabes,
u_k die Länge des einem Knotenpunkte k der oberen Gurtung gegenüberliegenden Untergurtstabes,
d_m die Länge der Diagonale $(m - 1) - m$,
λ_m die Projektion von d_m auf die x-Achse,
β_m den Neigungswinkel von o_m gegen die x-Achse
γ_k " " " u_k " " " "
φ_m " " " d_m " " " "

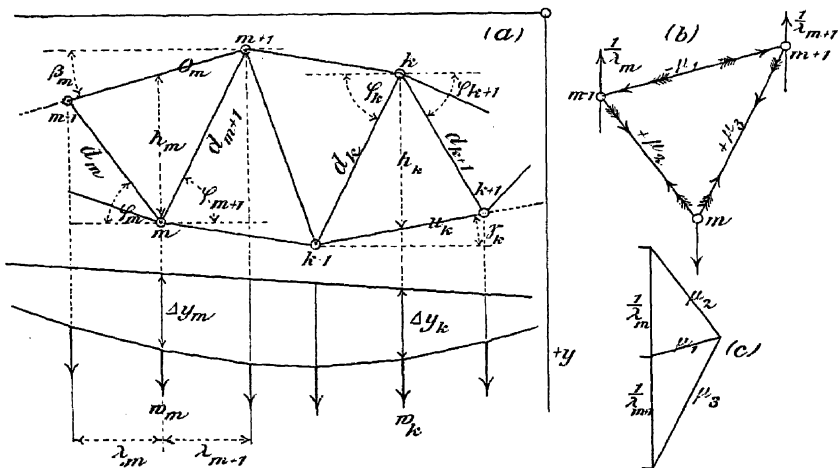



Fig. 86.

Wir denken uns das Dreieck $(m - 1) - m - (m + 1)$ in den Punkten $(m - 1)$ und $(m + 1)$ mit den im Sinne der $(-y)$ angenommenen Kräften $\frac{1}{\lambda_m}$ und $\frac{1}{\lambda_{m+1}}$ belastet, Fig. 86 b, und im Punkte m

gestützt, und wenden auf diesen Belastungszustand und den wirklichen Verschiebungszustand die auf Seite 11 der Einleitung entwickelte Arbeitsgleichung $\Sigma \bar{Q}\delta = \Sigma \bar{S}\Delta s$ an. Da sich $m-1$ gegen m im Sinne der $(+y)$ um $\Delta y_{m-1} - \Delta y_m$ verschiebt und $(m+1)$ gegen m um $\Delta y_{m+1} - \Delta y_m$, so ist die virtuelle Arbeit der äusseren Kräfte (mit Rücksicht auf Gleichung 2, Seite 101):

$$\Sigma \bar{Q}\delta = -\frac{1}{\lambda_m}(\Delta y_{m-1} - \Delta y_m) - \frac{1}{\lambda_{m+1}}(\Delta y_{m+1} - \Delta y_m) = w_m.$$

Die absoluten Werthe der in den drei Stäben o_m, d_m, d_{m+1} in Folge der gedachten Belastung entstehenden Spannkräfte seien $= \mu_1$, μ_2. μ_3; sie können auf die in Fig. 86c angegebene Weise ermittelt werden, worauf dann

$$(5) \qquad w_m = \Sigma \bar{Q}\delta = \Sigma \bar{S}\Delta s = -\mu_1 \Delta o_m + \mu_2 \Delta d_m + \mu_3 \Delta d_{m+1}$$

erhalten wird. Das erste Glied ist negativ, weil der Stab o_m durch μ_1 gedrückt wird.

Bezeichnet man nun mit h_m die parallel zur y-Achse gemessene Höhe des Fachwerks im Punkte m, so findet man:

$$\mu_1 : \frac{1}{\lambda_m} = \lambda_m \sec \beta_m : h_m \text{ und hieraus } \mu_1 = \frac{\sec \beta_m}{h_m},$$

$$\mu_2 : \frac{1}{\lambda_m} = d_m : h_m = \lambda_m \sec \varphi_m : h_m \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \mu_2 = \frac{\sec \varphi_m}{h_m},$$

ebenso:

$$\mu_3 = \frac{\sec \varphi_{m+1}}{h_m},$$

weshalb der oben für w_m angegebene Ausdruck übergeht in:

$$(6) \qquad w_m = \frac{-\Delta o_m \sec \beta_m + \Delta d_m \sec \varphi_m + \Delta d_{m+1} \sec \varphi_{m+1}}{h_m}.$$

Ganz ähnlich wird entwickelt:

$$(7) \qquad w_k = \frac{+\Delta u_k \sec \gamma_k - \Delta d_k \sec \varphi_k - \Delta d_{k+1} \sec \varphi_{k+1}}{h_k}.$$

Die Polweite ist $= 1$ (*Zahlen*einheit) oder $= \frac{1}{\nu}$ zu wählen, je nachdem die Δy in demselben oder im ν-fachen Maassstabe der Trägerzeichnung dargestellt werden sollen.

Es dürfte hier noch eine Bemerkung über die Vorzeichen der Winkel β, γ, φ am Platze sein.

Liegt die durch den Knoten r parallel zur y-Achse gezogene Gerade zwischen den Knoten $(r-1)$ und $(r+1)$, wo r eine beliebige

Ordnungsziffer bedeutet, so genügt die Festsetzung, dass unter β, γ, φ die *spitzen* Neigungswinkel der Stäbe gegen die x-Achse zu verstehen sind. Ob diese Winkel nach oben oder unten positiv gezählt werden, ist gleichgültig, weil die Ausdrücke für w_m und w_k nur die Sekanten enthalten und $\sec(-\alpha) = \sec(+\alpha)$ ist. — Anders in dem in Fig. 87 dargestellten, zuweilen bei Bogenträgern vorkommenden Falle. Bedeutet hier r einen Knotenpunkt der *unteren* Gurtung, so ist $\sec\varphi_r$ positiv oder negativ, je nachdem $r-1$ links oder rechts von r liegt, und $\sec\varphi_{r+1}$ positiv oder negativ, je nachdem sich $r+1$ rechts oder links von r befindet. Auch ist zu beachten, dass die w-Kräfte in der Reihenfolge $\ldots w_{r-1}, w_r, w_{r+1}, \ldots$ durch das Seilpolygon verbunden werden müssen, und dass h_r der in der Richtung der y gemessene Abstand des Knotens r von der Verlängerung des Stabes $(r-1)-(r+1)$ ist.

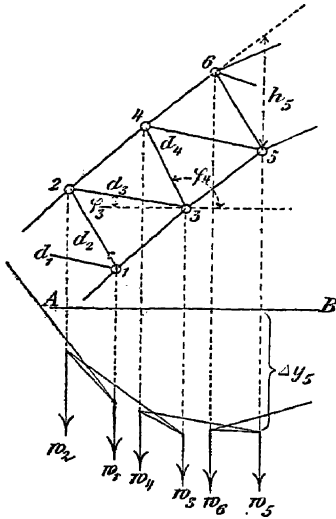



Fig. 87.

Zur Abkürzung führen wir die Bezeichnungen ein:

$$\Delta' o = \Delta o \sec\beta, \quad \Delta' u = \Delta u \sec\gamma, \quad \Delta' d = \Delta d \sec\varphi$$

und schreiben:

$$w_m = \frac{-\Delta' o_m + \Delta' d_m + \Delta' d_{m+1}}{h_m} \tag{8}$$

$$w_k = \frac{+\Delta' u_k - \Delta' d_k - \Delta' d_{k+1}}{h_k}. \tag{9}$$

Für das Fachwerk in Fig. 86 haben $\Delta' o$, $\Delta' u$, $\Delta' d$ dieselben Vorzeichen wie die Längenänderungen Δo, Δu, Δd; sie sind also positiv oder negativ, je nachdem die entsprechenden Stäbe gedehnt oder verkürzt werden. Wendet man aber die Gleichungen (8) und (9) auf das Fachwerk in Fig. 87 an, so hat (wenn r einen Knoten der unteren Gurtung bedeutet) $\Delta' d_r$ dasselbe oder das entgegengesetzte Vorzeichen wie Δd_r je nachdem $r-1$ links oder rechts von r liegt, und $\Delta' d_{r+1}$ dasselbe oder das entgegengesetzte Vorzeichen von Δd_{r+1}, je nachdem $r+1$ rechts oder links von r liegt.

Die $\Delta' o$, $\Delta' u$, $\Delta' d$ bestimme man durch Zeichnung und benutze hierzu ein in grossem Maassstabe angefertigtes Trägernetz.

II. Fall. Gesucht sind die senkrechten Verschiebungen der Knotenpunkte der *unteren* Gurtung eines (in senkrechter Ebene angenommenen) Fachwerks mit Vertikalen *(Ständerfachwerk)*.

Fig. 89. Fig. 90.

Wir bezeichnen (Fig. 89 und 90) mit

o_m die Länge des Obergurtstabes } im m^{ten} Felde,
u_m „ „ „ Untergurtstabes } im m^{ten} Felde,
d_m „ „ der Diagonale } im m^{ten} Felde,
h_m „ „ „ Vertikale mm,
β_m den Neigungswinkel von o_m gegen die Wagerechte,
γ_m „ „ „ u_m „ „ „
φ_m „ „ „ d_m „ „ „
λ_m die Feldweite.

Sodann führen wir (wie auf Seite 106) die Abkürzungen ein:

$$\Delta' o = \Delta o \sec \beta; \qquad \Delta' u = \Delta u \sec \gamma; \qquad \Delta' d = \Delta d \sec \varphi$$

und heben hervor, dass im vorliegenden Falle $\Delta' o$, $\Delta' u$, $\Delta' d$ stets dieselben Vorzeichen haben wie Δo, Δu, Δd.

Zunächst sei die in Fig. 91 dargestellte Anordnung der Füllungsstäbe (linkssteigende Diagonalen zu beiden Seiten der Vertikale mm) vorausgesetzt. Der Kräfteplan für den in der Fig. 91b angegebenen, gedachten Belastungsfall liefert für die Gurtstäbe o_m, u_{m+1}, und die Diagonalen d_m, d_{m+1} folgende Spannkräfte μ (ohne Vorzeichen):

$$\mu_1 = \frac{\sec \beta_m}{h_m}; \qquad \mu_2 = \frac{\sec \gamma_{m+1}}{h_m};$$

$$\mu_3 = \frac{\sec \varphi_m}{h_m}; \qquad \mu_4 = \frac{\sec \varphi_{m+1}}{h_m}.\text{*)}$$

---

*) Vergl. Seite 105.

Für die Spannkraft μ_5 der Vertikale mm erhält man

$$\mu_5 : \frac{1}{\lambda_{m+1}} = h'_{m+1} : h_m, \quad \text{also} \quad \mu_5 = \frac{h'_{m+1}}{\lambda_{m+1}\, h_m},$$

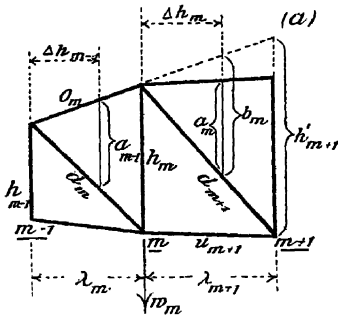
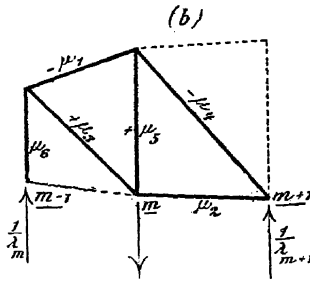
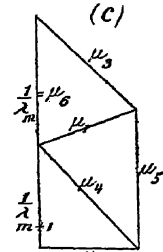



Fig. 91 a. Fig. 91 b. Fig. 91 c.

worin h'_{m+1} den Abstand des unteren Knotens $m+1$ von dem Punkte bedeutet, in welchem die $(m+1)^{\text{te}}$ Vertikale die Verlängerung des Stabes o_m schneidet. In der $(m-1)^{\text{ten}}$ Vertikale entsteht $\mu_6 = \frac{1}{\lambda_m}$. Die in der Fig. 91b durch gestrichelte Linien bezeichneten Stäbe sind spannungslos.

Mit Rücksicht auf die in die Fig. 91b eingetragenen Vorzeichen der Spannkräfte μ erhält man nun (nach Gleich. 5, Seite 105):

$$w_m = -\mu_1\,\Delta o_m + \mu_2\,\Delta u_{m+1} + \mu_3\,\Delta d_m - \mu_4\,\Delta d_{m+1} + \mu_5\,\Delta h_m - \mu_6\,\Delta h_{m-1},$$

d. i.

$$(10)\ \text{[Fig. 91.]} \quad \begin{cases} w_m = \frac{1}{h_m}\left[-\Delta' o_m + \Delta' u_{m+1} + \Delta' d_m - \Delta' d_{m+1} - a_{m-1} + b_m\right] \\ \text{worin} \quad a_{m-1} = \Delta h_{m-1}\,\frac{h_m}{\lambda_m} \quad \text{und} \quad b_m = \Delta h_m\,\frac{h'_{m+1}}{\lambda_{m+1}}. \end{cases}$$

Die Werthe a_{m-1}, b_m (welche dasselbe Vorzeichen haben, wie Δh_{m-1} bezieh. Δh_m) werden zweckmässig auf die in Fig. 91a angegebene Weise durch Zeichnung bestimmt; auch ist es häufig zweckmässig, die Multiplicationen der Längenänderungen mit den Sekanten zeichnerisch auszuführen und die Glieder des Klammerausdruckes mit dem Zirkel zu addiren. Nur achte man hierbei auf die Vorzeichen!

Durch Betrachtung des Spiegelbildes der Fig. 91 ergiebt sich für die in der Fig. 92 dargestellte Anordnung der Füllungsstäbe (und mit der dort für h'_{m-1} angegebenen Bedeutung):

$$(11)\quad \text{[Fig. 92.]}\quad \begin{cases} w_m = \dfrac{1}{h_m}\left[-\Delta' o_{m+1} + \Delta' u_m - \Delta' d_m + \Delta' d_{m+1} - a_{m+1} + b_m\right] \\ \text{worin} \quad a_{m+1} = \Delta h_{m+1} \dfrac{h_m}{\lambda_{m+1}} \quad \text{und} \quad b_m = \Delta h_m \dfrac{h'_{m-1}}{\lambda_m}. \end{cases}$$

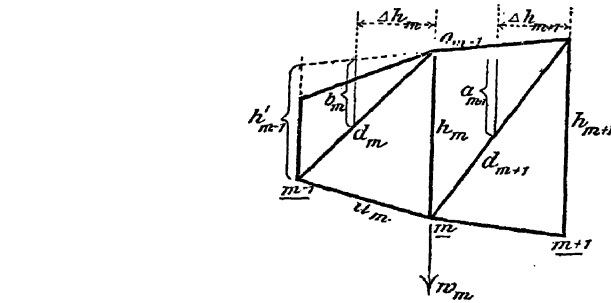



Fig. 92.

Ist links von der Vertikale mm eine linkssteigende Diagonale und rechts davon eine rechtssteigende angeordnet, Fig. 93, so erhält man:

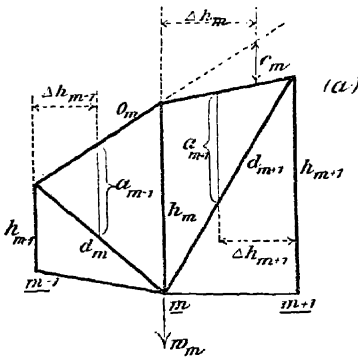
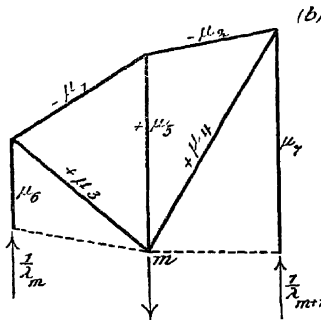
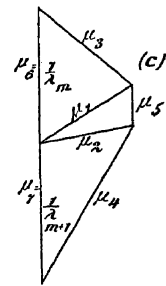



Fig. 93 a. Fig. 93 b. Fig. 93 c.

$$w_m = -\mu_1 \Delta o_m - \mu_2 \Delta o_{m+1} + \mu_3 \Delta d_m + \mu_4 \Delta d_{m+1} + \mu_5 \Delta h_m - \mu_6 \Delta h_{m-1} - \mu_7 \Delta h_{m+1},$$

$$\mu_1 = \frac{\sec \beta_m}{h_m}; \quad \mu_2 = \frac{\sec \beta_{m+1}}{h_m}; \quad \mu_3 = \frac{\sec \varphi_m}{h_m}; \quad \mu_4 = \frac{\sec \varphi_{m+1}}{h_m};$$

$$\mu_5 = \mu_1 \sin \beta_m - \mu_2 \sin \beta_{m+1} = \frac{1}{h_m}(\operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \beta_{m+1}); \quad \mu_6 = \frac{1}{\lambda_m};$$

$$\mu_7 = \frac{1}{\lambda_{m+1}}, \qquad \text{mithin:}$$

$$(12)\ \text{[Fig. 93.]}\quad \begin{cases} w_m = \dfrac{1}{h_m}[-\Delta' o_m - \Delta' o_{m+1} + \Delta' d_m + \Delta' d_{m+1} + c_m - a_{m-1} - a_{m+1}] \\ \text{worin} \quad c_m = \Delta h_m (\operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \beta_{m+1}); \quad a_{m-1} = \Delta h_{m-1} \dfrac{h_m}{\lambda_m}; \\ \qquad a_{m+1} = \Delta h_{m+1} \dfrac{h_m}{\lambda_{m+1}}. \end{cases}$$

Liegt der in Fig. 93a dargestellte Werth c_m unterhalb der Verlängerung von o_m (ist also $\beta_{m+1} > \beta_m$), so hat c_m das entgegengesetzte Vorzeichen von Δh_m.

Bei der in Fig. 94 abgebildeten Anordnung ergiebt sich für die m^{te} Vertikale die Spannkraft

$$\mu_5 = \mu_3 \sin \varphi_m + \mu_4 \sin \varphi_{m+1} = \frac{\sec \varphi_m}{h_m} \sin \varphi_m + \frac{\sec \varphi_{m+1}}{h_m} \sin \varphi_{m+1}$$
$$= \frac{\operatorname{tg} \varphi_m + \operatorname{tg} \varphi_{m+1}}{h_m}$$

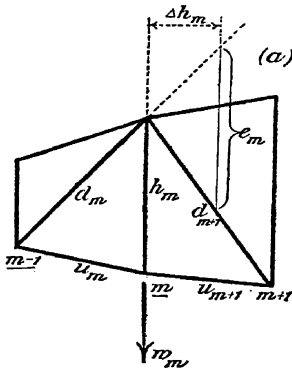
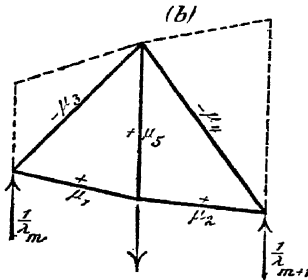
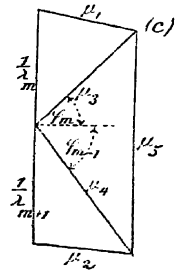



Fig. 94a.

Fig. 94b.

Fig. 94c.

und man findet deshalb:

$$(13)\ \text{[Fig. 94.]}\quad \begin{cases} w_m = \dfrac{1}{h_m}[+\Delta' u_m + \Delta' u_{m+1} - \Delta' d_m - \Delta' d_{m+1} + e_m] \\ \text{worin} \quad e_m = \Delta h_m (\operatorname{tg} \varphi_m + \operatorname{tg} \varphi_{m+1}). \end{cases}$$

III. Fall. *Ständerfachwerk;* gesucht sind die senkrechten Verschiebungen der Knotenpunkte der *oberen* Gurtung. Man gelangt auf dem vorhin eingeschlagenen Wege zu den folgenden, den in Fig. 95, 96, 97, 98, dargestellten Anordnungen der Füllungsstäbe entsprechenden Formeln:

$$(14)\ \text{[Fig. 95.]}\quad \begin{cases} w_m = \dfrac{1}{h_m}[-\Delta' o_m + \Delta' u_{m+1} + \Delta' d_m - \Delta' d_{m+1} - b_m + a_{m+1}] \\ \text{worin} \quad b_m = \Delta h_m \dfrac{h'_{m-1}}{\lambda_m}; \qquad a_{m+1} = \Delta h_{m+1} \dfrac{h_m}{\lambda_{m+1}}. \end{cases}$$

$$
(15)\ [\text{Fig. 96.}]\quad \begin{cases} w_m = \dfrac{1}{h_m}\left[-\Delta' o_{m+1} + \Delta' u_m - \Delta' d_m + \Delta' d_{m+1} + a_{m-1} - b_m\right] \\ \text{worin}\quad b_m = \Delta h_m \dfrac{h'_{m+1}}{\lambda_{m+1}}; \qquad a_{m-1} = \Delta h_{m-1} \dfrac{h_m}{\lambda_m}. \end{cases}
$$

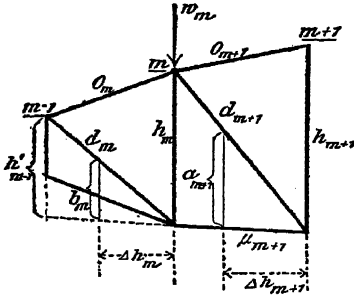



Fig. 95.

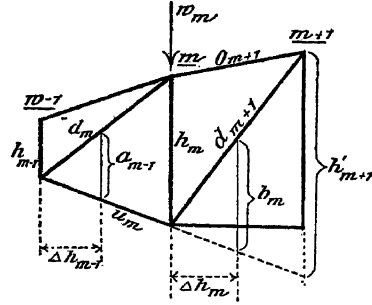



Fig. 96.

$$
(16)\ [\text{Fig. 97.}]\quad \begin{cases} w_m = \dfrac{1}{h_m}\left[-\Delta' o_m - \Delta' o_{m+1} + \Delta' d_m + \Delta' d_{m+1} - e_m\right] \\ \text{worin}\quad e_m = \Delta h_m (\operatorname{tg} \varphi_m + \operatorname{tg} \varphi_{m+1}) \end{cases}
$$

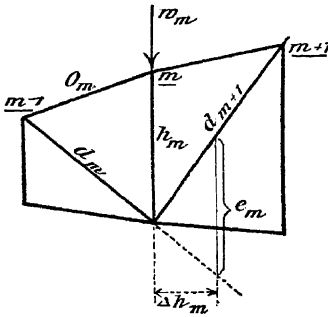
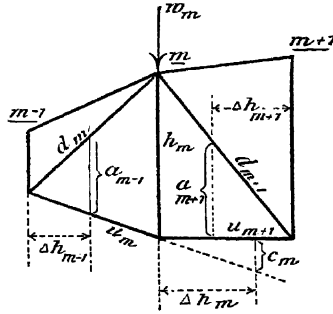



Fig. 97. Fig. 98.

$$
(17)\ [\text{Fig. 98.}]\quad \begin{cases} w_m = \dfrac{1}{h_m}\left[+\Delta' u_m + \Delta' u_{m+1} - \Delta' d_m - \Delta' d_{m+1} - c_m + a_{m-1} + a_{m+1}\right] \\ \text{wo}\quad c_m = \Delta h_m (\operatorname{tg} \gamma_m - \operatorname{tg} \gamma_{m+1}); \qquad a_{m-1} = \Delta h_{m-1} \dfrac{h_m}{\lambda_m}; \\ a_{m+1} = \Delta h_{m+1} \dfrac{h_m}{\lambda_{m+1}}. \end{cases}
$$

Hat man die Biegungslinie der einen Gurtung bestimmt, so findet man diejenige der anderen mittels der Bedingung, dass sich die beiden

senkrecht übereinander gelegenen Knotenpunkte m gegeneinander um Δh_m verschieben.

Ein Zahlenbeispiel findet sich in No. 49.

Die Berechnung der Werthe w_m mit Hilfe der Gleichungen (8)—(17) ist dem in No. 46 angegebenen Verfahren vorzuziehen, sobald die Aenderungen der Dreieckswinkel nicht ohnehin zu anderen Zwecken (z. B. Untersuchung von Nebenspannungen) berechnet werden müssen.

Anmerkungen zu No. 47.

1. — Liegt ein Fachwerk von der unter *Fall I* behandelten Art vor und wird nur die Biegungslinie der oberen Gurtung verlangt, so ist es zuweilen zweckmässig, die den Knoten der unteren Gurtung entsprechenden Gewichte w auf die benachbarten oberen Knotenpunkte zu vertheilen. Von w_m in Fig. 99 kommt auf den Knoten $(m-1)$ der Theil: $w_m'' = w_m \frac{\lambda_{m+1}}{a}$ und auf $(m+1)$ der Theil: $w_m' = w_m \frac{\lambda_m}{a}$. Die Vertheilung von w_r liefert:
$w_r'' = -w_r \frac{\lambda_{r+1}}{a}$ und $w_r' = +w_r \frac{\lambda_r}{a}$.
Nun wird w_m'' zu w_{m-1} addirt, w_m' zu w_{m+1} u. s. w., so dass sich z. B. für den oberen Knoten $(m-1)$ im ganzen ergiebt:

$$\overline{w}_{m-1} = w_m'' + w_{m-1} + w'_{m-2}.$$

Fig. 99.

Dieses Verfahren ist namentlich dann am Platz, wenn die durch einen Knoten r der unteren Gurtung parallel zur Verschiebungsrichtung gelegte Gerade nicht zwischen $r-1$ und $r+1$ liegt. Bei derartigen Fachwerken kann es vorkommen, dass einzelne Stabachsen mit der Verschiebungsrichtung zusammenfallen, wie beispielsweise d_5 in Fig. 100. Man berechne dann die Werthe w zunächst ohne Rücksicht auf diejenigen Füllungsstäbe, welche die Richtung der w haben und deren Einfluss auf die w dann nachträglich gesondert anzugeben ist. So findet man für das Fachwerk in Fig. 100 unter der vorläufigen Annahme $\Delta d_5 = 0$ die Werthe:

Fig. 100.

$$w_2 = \frac{1}{h_2}(-\Delta' o_2 + \Delta' d_2 + \Delta' d_3); \qquad w_3 = \frac{1}{h_3}(+\Delta' u_3 - \Delta' d_3 - \Delta' d_4)$$

$$w_4 = \frac{1}{h_4}(-\Delta' o_4 + \Delta' d_4); \qquad w_5 = \frac{1}{h_5}(+\Delta' u_5 - \Delta' d_6)$$

$$w_6 = \frac{1}{h_6}(-\Delta' o_6 + \Delta' d_6 + \Delta' d_7) \qquad \text{u. s. w.}$$

sodann: $\overline{w}_3 = w_2' + w_3$; $\overline{w}_5 = w_4 + w_5 + w_6''$; $\overline{w}_7 = w_6' + w_7 + w_8''$; u. s. w. wobei zu beachten ist, dass $\Delta' d_3$ das entgegengesetzte Vorzeichen von Δd_3 hat, weil der Knoten 3 links von der Senkrechten durch 2 liegt (vgl. Seite 106). Der Einfluss von Δd_5 auf $\overline{w}_5$ ist $= -\mu_4 \Delta d_5$, worin μ_4 den mittels des Kräfteplanes in Fig. 100c bestimmten Werth bedeutet. $\overline{w}_7$ ist unabhängig von Δd_5 und der Einfluss von Δd_5 auf $\overline{w}_3$ ist $= + \frac{\Delta d_5}{a_1}$, weshalb schliesslich erhalten wird;

$$\overline{w}_3 = w_2' + w_3 + \frac{\Delta d_5}{a_1}; \quad \overline{w}_5 = w_4 + w_5 + w_6'' - \mu_4 \Delta d_5; \quad \overline{w}_7 = w_6' + w_7 + w_8''.$$

Aehnlich wird verfahren, wenn die Biegungslinie der *unteren* Gurtung gesucht wird. Die den oberen Knoten entsprechenden Gewichte w_m werden in den angeführten Sonderfällen zweckmässig auf die Knotenpunkte der unteren Gurtung vertheilt.

2. — Es verdient hervorgehoben zu werden, dass die Spannkräfte μ durch parallele äussere Kräfte erzeugt werden und sich in Folge dessen auch mit Hilfe der im ersten Bande (IX. Abschnitt) für den einfachen Fachwerkbalken entwickelten Formeln berechnen lassen. So sind z. B. die Spannkräfte in den Stäben o_m, d_m, d_{m+1} des in der Fig. 86 dargestellten Fachwerks, falls auf dieses nur äussere Kräfte, welche die Richtung der w haben, wirken:

$$O_m = -\frac{M_m \sec \beta_m}{h_m}; \quad D_m = \left(\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}\right) \sec \varphi_m;$$

$$D_{m+1} = \left(\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m+1}}{h_{m+1}}\right) \sec \varphi_{m+1},$$

und es ergeben sich (da die gedachten Lasten $\frac{1}{\lambda_m}$ und $\frac{1}{\lambda_{m+1}}$ die Momente: $M_{m-1} = 0$, $M_m = 1$ $M_{m+1} = 0$ erzeugen) für die Spannkräfte μ_1, μ_2, μ_3 die Werthe:

$$\mu_1 = -\frac{\sec \beta_m}{h_m}; \quad \mu_2 = +\frac{\sec \varphi_m}{h_m}: \quad \mu_3 = +\frac{\sec \varphi_{m+1}}{h_m}.$$

Auch leuchtet ein, *dass die Glieder des Ausdrucks:*

$$w_m = -\frac{\Delta o_m \sec \beta_m}{h_m} + \frac{\Delta d_m \sec \varphi_m}{h_m} + \frac{\Delta d_{m+1} \sec \varphi_{m+1}}{h_m} = -\frac{\Delta' o_m}{h_m} + \frac{\Delta' d_m}{h_m} + \frac{\Delta' d_{m+1}}{h_m}$$

als diejenigen Spannkräfte gedeutet werden dürfen, welche in den Stäben o_m, d_m, d_{m+1} entstehen, wenn $M_{m-1} = 0$ und $M_{m+1} = 0$ angenommen werden, während M_m der Reihe nach die Werthe Δo_m, Δd_m, Δd_{m+1} beigelegt werden.

Bestimmt man nun diese Spannkräfte mit Hilfe des im § 36 des ersten Bandes mitgetheilten Zimmermann'schen Verfahrens, so gelangt man zu der in Fig. 101 angegebenen Darstellung der Glieder von w_m. Es wurde auf der durch den Knoten 2 in der Richtung von w_2 gelegten Geraden abgetragen:

$$\overline{2h} = \frac{\Delta o_2}{\lambda_2}; \quad \overline{2i} = \frac{\Delta d_2}{\lambda_2}; \quad \overline{2k} = \frac{\Delta d_3}{\lambda_3};$$

sodann wurden durch h, i, k zum Obergurtstabe o_2 die Parallelen hh', ii', kk' gezogen und erhalten:

$$\overline{hh'} = \frac{\Delta' o_2}{h_2}; \quad \overline{2i'} = \frac{\Delta' d_2}{h_2}; \quad \overline{2k'} = \frac{\Delta' d_3}{h_2}.$$

Trägt man an Stelle der Werthe $\frac{\Delta o_2}{\lambda_2}$, $\frac{\Delta d_2}{\lambda_2}$, $\frac{\Delta d_3}{\lambda_3}$ die Werthe $\Delta o_2 \frac{e}{\lambda_2}$, $\Delta d_2 \frac{e}{\lambda_2}$, $\Delta d_3 \frac{e}{\lambda_3}$ auf, wo e eine beliebige, aber für alle Knotenpunkte gleich gross angenommene Strecke bedeutet, und zeichnet man das Seilpolygon der Kräfte:

$$w_m = e\left[-\frac{\Delta' o_m}{h_m} + \frac{\Delta' d_m}{h_m} + \frac{\Delta' d_{m+1}}{h_m}\right]$$

$$w_k = e\left[+\frac{\Delta' u_k}{h_k} - \frac{\Delta' d_k}{h_k} - \frac{\Delta' d_{k+1}}{h_k}\right] \quad \text{(vergl. Fig. 86),}$$

so geben die Ordinaten desselben die mit e mutiplicirten Verschiebungen an. Sind die Strecken λ_1, λ_2, λ_3, ... gleich gross $(= \lambda)$ oder hat die Mehrzahl derselben die gleiche Grösse λ, so wähle man $e = \lambda$. Die schliesslich nöthig werdende Division der Ordinaten des Seilpolygons durch e bezieh. λ kann natürlich auch durch Wahl einer geeigneten Polweite umgangen werden.

Fig. 101.

Aehnliche Untersuchungen lassen sich auch für das Fachwerk mit Vertikalen durchführen. So folgt z. B. aus der für die Vertikale mm in Fig. 93 bei unten angreifender Belastung gefundenen Formel

$$V_m = \frac{M_m}{h_m}(\operatorname{tg}\beta_m - \operatorname{tg}\beta_{m+1})$$

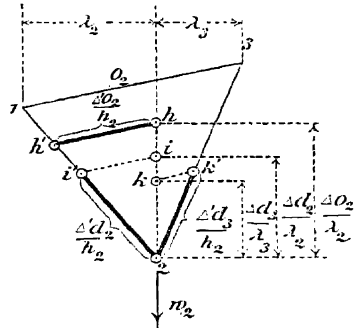
ohne weiteres, dass die Längenänderung Δh_m dieser Vertikalen nur auf das Gewicht w_m Einfluss besitzt, und dass die Grösse dieses Einflusses; $\frac{\Delta h_m}{h_m}(\operatorname{tg}\beta_m - \operatorname{tg}\beta_{m+1})$ ist. Es lässt sich dieser Werth als diejenige Spannkraft deuten, welche in der fraglichen Verikalen entsteht, sobald das Moment $M_m = \Delta h_m$ wird.

Für die Vertikale mm in Fig. 95 wurde bei oben angreifender Belastung gefunden:

$$V_m = \frac{M_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{M_m}{\lambda_m}\left[1 - \frac{\lambda_m(\operatorname{tg}\beta_m + \operatorname{tg}\gamma_{m+1})}{h_m}\right],$$

ein Ausdruck, der sich leicht umformen lässt in:

$$V_m = \frac{M_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{M_m h'_{m-1}}{\lambda_m h_m}$$

und aus dem dann gefolgert werden kann, dass der Einfluss von Δh_m auf den Werth w_{m-1} gleich $\frac{\Delta h_m}{\lambda_m}$ ist und auf w_m gleich $\left(-\frac{\Delta h_m}{\lambda_m}\frac{h'_{m-1}}{h_m}\right)$.

48. Bestimmung der Längenänderung einer Stabzugsehne. Wir betrachten einen Stabzug $0 - 1 - 2 - \ldots\ldots - n$, der in einer senkrechten Ebene liegen möge, und dessen Sehne $0n$ mit der Wagerechten den Winkel α bildet. Die senkrechten Seitenverschiebungen seien mit Hilfe eines Seilpolygons gefunden, dessen Gewichte w_m nach No. 47 *(also ohne Zuhilfenahme der Winkeländerungen)* berechnet worden sind. Gesucht sei die Aenderung Δl der Länge l der Sehne $\overline{0n}$. Bedeutet:

η_m die Länge des vom Knoten m auf die Sehne $0n$ gefällten Lothes,

φ_m den Neigungswinkel des Stabes s_m gegen $0n$,

so ist nach Seite 98:

$$\Delta l = \sum_1^{n-1} \eta_m \Delta \vartheta_m + \sum_1^n \Delta s_m \cos \varphi_m,$$

und diese Beziehung wird zweckmässig so umgeformt, dass Δl durch die bereits bei Ermittelung der Biegungslinie benutzten Werthe w ausgedrückt wird. Dazu führen wir ein:

$$\Delta \vartheta_m = w_m + \frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg} \beta_m - \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{tg} \beta_{m+1} \text{ (nach Gleich. (3) auf S. 101)},$$

$$\eta_m = y_m \cos \alpha, \quad \varphi_m = \beta_m - \alpha,$$

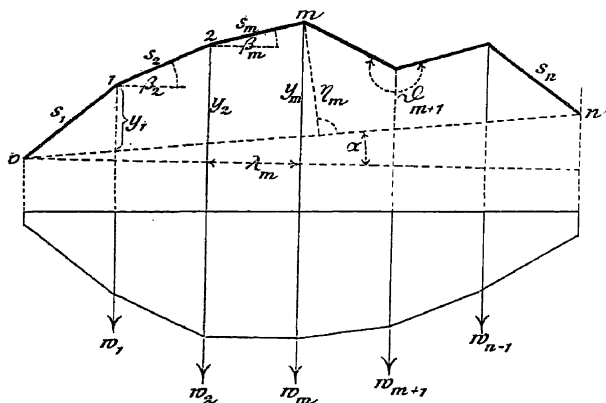



Fig. 102

wo β_m den Neigungswinkel des Stabes s_m gegen die Wagerechte,

y_m den in senkrechter Richtung gemessenen Abstand des Knotens m von der Geraden $0n$

bedeutet, und erhalten:

$$\Delta l = \cos \alpha \left[\sum_1^{n-1} y_m w_m + c \right], \quad \text{worin}$$

$$c = \sum_1^{n-1} y_m \left(\frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg} \beta_m - \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{tg} \beta_{m+1} \right) + \sum_1^n \frac{\Delta s_m \cos(\beta_m - \alpha)}{\cos \alpha}.$$

Der Stab s_m liefert zu dem Werthe c die drei Glieder:

$$-y_{m-1}\frac{\Delta s_m}{s_m}\operatorname{tg}\beta_m,\quad +y_m\frac{\Delta s_m}{s_m}\operatorname{tg}\beta_m,\quad +\frac{\Delta s_m\cos(\beta_m-\alpha)}{\cos\alpha}$$

deren Summe $\left[\text{wegen } y_m - y_{m-1} = \lambda_m(\operatorname{tg}\beta_m - \operatorname{tg}\alpha) = \frac{s_m\sin(\beta_m-\alpha)}{\cos\alpha}\right]$ gleich

$$\frac{\Delta s_m}{\cos\alpha}[\operatorname{tg}\beta_m\sin(\beta_m-\alpha)+\cos(\beta_m-\alpha)] = \Delta s_m\sec\beta_m$$

ist, weshalb sich ergiebt: $e = \sum_1^n \Delta s_m \sec\beta_m$ und

$$\Delta l = \cos\alpha\left(\sum_1^{n-1} y_m w_m + \sum_1^n \Delta s_m\sec\beta_m\right). \tag{18}$$

Diese Formel ist ausserordentlich bequem, weil sowohl die w als auch die $\Delta s \sec\beta$ bereits zur Bestimmung der Biegungslinie berechnet worden sind.

Gleichung (18) setzt voraus, dass keiner der Winkel β gleich $90°$ ist. Will man nun die Aenderung Δl der Sehne AB des in der Fig. 103 dargestellten Fachwerks mit Endvertikalen, für dessen *obere* Gurtung die Biegungslinie bereits nach No. 47 bestimmt sei, durch die Werthe w ausdrücken — eine für die Folge wichtige Aufgabe —, so

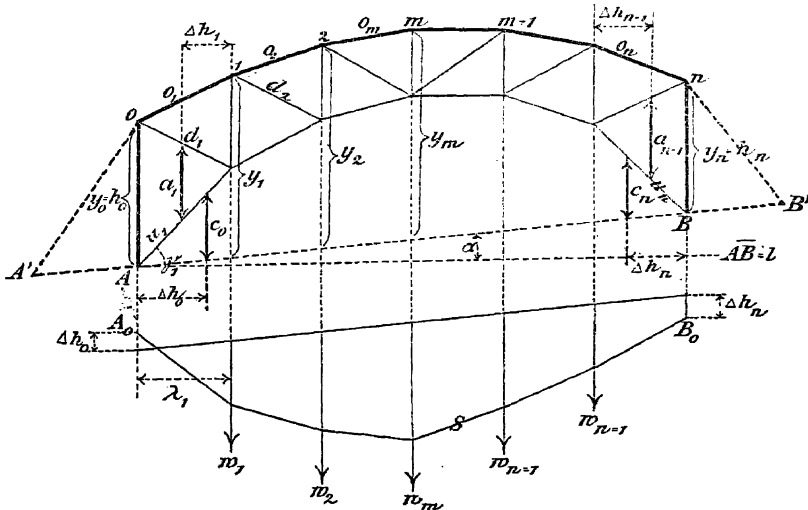



Fig. 103.

denke man sich die *starren* Stäbe $0A'$, $A'A$, nB', $B'B$ hinzugefügt. $A'A$ und $B'B$ erhalten die Richtung AB, und es ergiebt sich dann

$$\Delta l = \Delta(AB) = \Delta(A'B'),$$

so dass die Aufgabe zurückgeführt ist auf die Bestimmung der Aenderung

der Länge der Sehne $A'B'$ eines Stabzuges $A'012 \ldots m \ldots nB'$, dessen Anfangspunkt und Endpunkte in der fraglichen Sehne liegen. Man erhält

$$(19) \qquad \Delta l = \sum_0^n y_m w_m + \sum_1^n \Delta' o_m,$$

worin $\Delta' o_m = o_m \sec \beta_m$, vergl. Seite 106.

Für den in der Fig. 103 dargestellten Fall, welcher der Fig. 98, Seite 112, entspricht, ist:

$$(20) \qquad \begin{cases} w_0 = \frac{1}{h_0}(\Delta' u_1 - \Delta' d_1 - c_0 + a_1) \\ w_n = \frac{1}{h_n}(\Delta' u_n - \Delta' d_n - c_n + a_{n-1}) \end{cases}$$

worin: $c_0 = \Delta h_0 (\operatorname{tg} \gamma_1 - \operatorname{tg} \alpha)$ (wenn γ_1 nach oben positiv gezählt wird) und $a_1 = \Delta h_1 \frac{h_0}{\lambda_1}$. Vergl. Fig. 103, in welcher c_0, a_1, c_n, a_{n-1} beziehungsweise dieselben Vorzeichen haben, wie Δh_0, Δh_1, Δh_n, Δh_{n-1}.

Hinzugefügt werde, dass w_0 und w_n nur zur Berechnung von Δl, nicht aber bei Aufzeichnung der Biegungslinie $A_0 S B_0$ gebraucht werden, und dass die Schlusslinie durch die Aenderungen Δh_0 und Δh_n der Längen der Endvertikalen bestimmt ist. In Fig. 103 wurde Δh_0 positiv, Δh_n negativ angenommen; es erfährt dann bei ruhenden Punkten A und B der Knoten 0 eine Verschiebung nach oben, Knoten n eine solche nach unten.

Hat man die senkrechten Verschiebungen der Knotenpunkte beider Gurtungen des in Fig. 104 abgebildeten Fachwerks, dessen Füllungs-

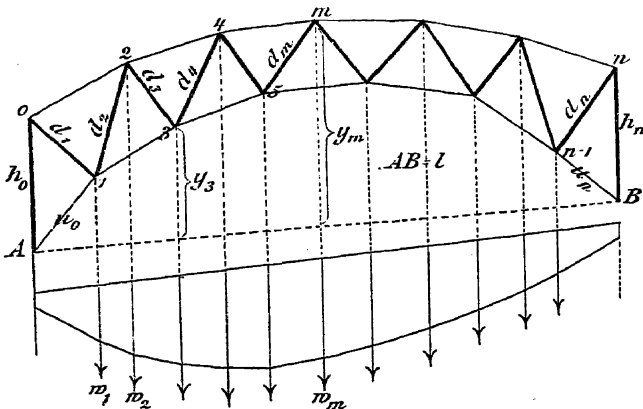



Fig. 104.

stäbe mit Ausnahme der Endvertikalen schräg stehen, nach No. 47, Fall I, ermittelt, also w_1 bis w_{m-1} nach Gleich. (8) und (9) berechnet,

so bestimmt man Δl mit Hilfe der Gleichung:

$$\Delta l = \sum_0^n y_m w_m + \sum_1^n \Delta' d_m, \tag{21}$$

worin zu setzen ist:

$$w_0 = \frac{1}{h_0} (\Delta' u_0 - \Delta' d_1 - c_0)$$

$$w_n = \frac{1}{h_n} (\Delta' u_n - \Delta' d_n - c_n).$$

c_0 und c_n haben die in Fig. 103 angegebene Bedeutung. Die Summe $\Sigma \Delta' d_m$ erstreckt sich über alle schrägen Füllungsstäbe (d_1 bis d_n).

Aufgabe. Es soll die Biegungslinie der unteren Gurtung des in der Fig. 105 dargestellten Fachwerkträgers bestimmt werden. Bei (0) hat der Träger ein festes, bei (5) ein bewegliches Auflagergelenk. Letzteres wird auf einer unter dem Winkel ψ geneigten Geraden geführt.

Nachdem die Gewichte w_1 bis w_4 mittels Formel (10) berechnet worden sind, wird mit der Polweite 1 das Seilpolygon *I II III IV V* gezeichnet und die Schlusslinie eingetragen. Diese Linie ist durch die Bedingungen bestimmt, dass der Knoten (5) die senkrechte Verschiebung $\delta_5 = - \Delta l \sin \psi$ erfährt, wo Δl die Aenderung der Stabzugsehne

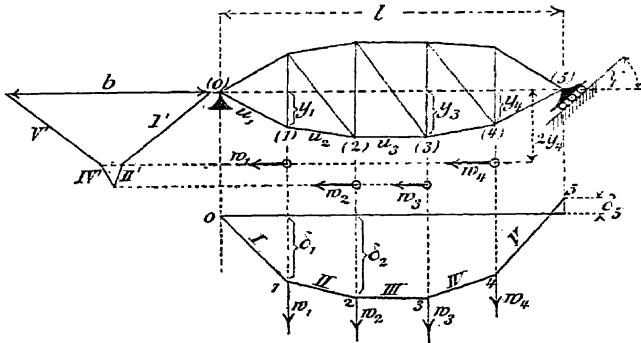



Fig. 105.

0 — 5 bedeutet, und dass ferner $\delta_5 = 0$ ist. Für Δl aber ergiebt sich, wenn 0 — 5 als Sehne des Stabzuges 0 — 1 — 2 — 3 — 4 — 5 aufgefasst wird, der Werth:

$$\Delta l = - \sum_1^4 y_m w_m + \sum_1^5 \Delta' u_m, \text{*)}$$

und zwar ist das erste Glied negativ, weil die Knoten 1, 2, 3, 4 unter-

*) Die Bedeutung von $\Delta' u$ ist auf Seite 106 erklärt.

halb der Sehne 0 — 5 liegen. Werden nun w_1, w_2, w_3, w_4 als wagerechte Kräfte betrachtet, die von 0 — 5 beziehungsweise die Abstände αy_1, αy_2, αy_3, αy_4 haben, wo α eine beliebige Zahl bedeutet,*) und wird zu diesen wagerechten Kräften mit der Polweite 1 ein Seilpolygon gezeichnet, so besteht zwischen der Strecke b, welche die äussersten Seiten dieses Polygons auf der Verlängerung von 0 — 5 abschneiden, und den Gewichten w die Beziehung:

$$1 \cdot b = \sum_1^4 \alpha y_m w_m, \text{ und hieraus folgt: } \sum_1^4 y_m w_m = \frac{b}{\alpha}.$$

Da dem Seilpolygon $I\ II \ldots$ und $I'\ II' \ldots$ dieselbe Polweite entspricht, so ist $I' \perp I$, $II' \perp II$, ... In Fig. 105 wurde $\alpha = 2$ gewählt, weshalb sich schliesslich

$$\delta_5 = -\Delta l \sin \psi = \sin \psi \left(\tfrac{1}{2} b - \sum_1^5 \Delta' u_m\right)$$

ergiebt. Fig. 105 setzt voraus, dass δ_5 negativ ist, dass sich also Punkt (5) nach oben verschiebt.

Werden die δ in ν-facher Vergrösserung dargestellt (werden also die Polweiten 1 durch die Polweiten $1 : \nu$ ersetzt), so müssen in die Formel für δ_5 natürlich auch die ν-fachen Werthe $\Delta' u$ eingeführt werden.

49. Auffassung der Biegungsfläche als Momentenfläche. Berechnung der Durchbiegungen. Es sei $0'\ 1'\ 2' \ldots m' \ldots n'$ (Fig. 106) die Biegungslinie des Stabzuges $0 - 1 - 2 - \ldots m \ldots n$ für die Verschiebungsrichtung AA' und AB die Schlusslinie. Die Durchbiegung an der Stelle m sei δ_m, und der zwischen dem Seilpolygon und der Geraden $0'n'$ gelegene Theil von δ_m möge mit η_m bezeichnet werden. Den Stabzug denken wir uns in einer senkrechten Ebene.

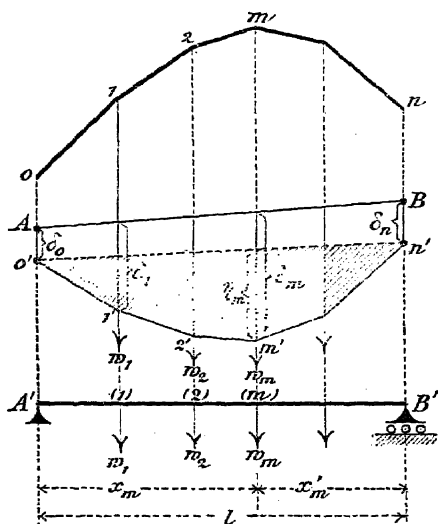



Fig. 106.

Die von der Biegungslinie und der Geraden $0'n'$ eingeschlossene Fläche lässt sich als die *Culmann*'sche Momentenfläche eines einfachen Balkens $A'B'$ deuten, dessen bewegliches Auflagergelenk auf einer zu AA'

*) Je flacher der Stabzug ist, desto grösser muss α gewählt werden, damit eine deutliche Figur erhalten wird.

rechtwinkligen Bahn geführt wird, dessen Stützpunkte auf den durch 0 und n zur Verschiebungsrichtung gezogenen Parallelen liegen und der mit $w_1, w_2, \ldots w_m, \ldots w_{n-1}$ belastet ist. Sind die w mittels einer der Gleichungen (3) oder (6) bis (17) berechnet worden, so ist die Polweite des Seilpolygons gleich der Zahl 1, und es besteht dann zwischen dem Biegungsmomente $M_{w \cdot m}$ des Balkenquerschnitts m und der Verschiebung η_m die Beziehung:

$$(22) \qquad 1 \cdot \eta_m = M_{w \cdot m}.$$

Wurde m_m aus Gleich. (4), Seite 102, gefunden, so ist die Polweite $= E$, und es ergiebt sich:

$$(23) \qquad \eta_m = \frac{M_{w \cdot m}}{E}.$$

Hiermit ist die Bestimmung der Durchbiegungen η auf die Berechnung der Biegungsmomente eines einfachen Balkens zurückgeführt. Sind die Verschiebungen δ_0 und δ_n bekannt, so findet man nach Ermittelung der η die δ mit Hilfe von:

$$\delta_m = \eta_m + \delta_0 \frac{x_m'}{l} + \delta_n \frac{x_m}{l}.$$

Die Berechnung der Momente ist namentlich dann sehr einfach (und meistens schneller zum Ziele führend als die Aufzeichnung des Seilpolygons), wenn der Balken $A'B'$ symmetrisch belastet wird und die w-Kräfte in gleichen Abständen λ wirken. Man beachte dann die Regeln auf Seite 261 und 262 des ersten Bandes und berechne zuerst die Verhältnisse $M_w \mid \lambda$.*)

Zahlenbeispiel. Für den auf Seite 107 (Fig. 88) untersuchten Fachwerkbalken wurde erhalten:

$w_1 = 0{,}0975$; $w_2 = 0{,}1830$; $w_3 = 0{,}1030$; $w_4 = 0{,}2575$; $w_5 = 0{,}1310$,

und zwar entsprechen diese Werthe den 180-fachen Längenänderungen der Stäbe. Die w wurden mittels der Gleichungen (8) und (9) berechnet, weshalb nach (22):

$$\eta_m = \frac{M_{w \cdot m}}{180} = \frac{\lambda (M_{w \cdot m} \mid \lambda)}{180}.$$

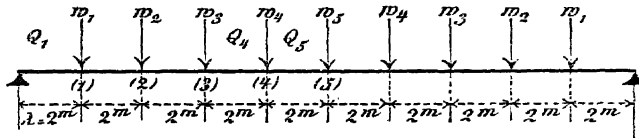



Fig. 107.

und mit $\lambda = 2000^{mm}$:

$$\eta_m = \frac{100}{9} (M_{w \cdot m} \mid \lambda) \textit{ Millimeter}.$$

---

*) $M \mid \lambda = \frac{M}{\lambda}$.

Die Berechnung der Querkräfte Q und der $(M_w \mid \lambda)$ geschieht nun nach folgendem Ansatz:

$Q_5 = \frac{1}{2} w_5 = 0{,}0655$	$(M_{w\cdot 1} \mid \lambda) = Q_1 = 0{,}7065$
$+\, 0{,}2575 = w_4$	$+\, 0{,}6090 = Q_2$
$Q_4 = 0{,}3230$	$(M_{w\cdot 1} \mid \lambda) = 1{,}3155$
$+\, 0{,}1030 = w_3$	$+\, 0{,}4260 = Q_3$
$Q_3 = 0{,}4260$	$(M_{w\cdot 3} \mid \lambda) = 1{,}7415$
$+\, 0{,}1830 = w_2$	$+\, 0{,}3230 = Q_4$
$Q_2 = 0{,}6090$	$(M_{w\cdot 4} \mid \lambda) = 2{,}0645$
$+\, 0{,}0975 = w_1$	$+\, 0{,}0655 = Q_5$
$Q_1 = 0{,}7065$	$(M_{w\cdot 5} \mid \lambda) = 2{,}1300.$

Hierauf erhält man (da $\delta_0 = 0$ und $\delta_n = 0$ ist, vergl. Fig. 106) die Durchbiegungen:

$$\delta_1 = \eta_1 = \frac{100}{9} \cdot 0{,}7065 = 7{,}85^{mm}; \quad \delta_2 = \frac{100}{9} \cdot 1{,}3155 = 14{,}6^{mm};$$

$$\delta_3 = 19{,}35^{mm}; \quad \delta_4 = 22{,}9^{mm}; \quad \delta_5 = 23{,}7^{mm};$$

dieselben stimmen mit den in Fig. 88 durch Zeichnung ermittelten Verschiebungen überein.

50. Aufgaben. Die folgenden Beispiele zeigen die Anwendung der in No. 45—48 entwickelten Gesetze auf die Ermittelung der Biegungslinien der wichtigsten statisch bestimmten Träger. Die Form der Lösungen wählen wir so, dass auch die rechnerische Bestimmung der Durchbiegungen erledigt wird, indem wir angeben, in welcher Weise die Biegungslinien am zweckmässigsten als Momentenlinien gedeutet werden.

Fig. 108.

Wir setzen voraus, dass die Werthe w mittels der Gleichung (3) oder mit Hilfe von (6) bis (17) berechnet worden sind. Wird Gleichung (4) angewendet, so liefern die folgenden Regeln die E-fachen Durchbiegungen.

1. Beispiel. Gesucht sind die Durchbiegungen δ_2, δ_3, ... des in Fig. 108 dargestellten *Freiträgers.*

Man zeichne das Seilpolygon der gedachten Kräfte w_1 bis w_7 (welche in Fig. 108 negativ, also nach oben gerichtet angenommen wurden) und mache die erste Seite desselben zur Schlusslinie. Der neben δ_5 stehende Pfeil giebt die

Richtung der positiven Verschiebungen an. Die schraffirte Biegungsfläche lässt sich als Momentenfläche eines Balkens AB deuten, der bei B eingespannt, sonst aber frei und mit w_1, w_2, ... belastet ist. Hat man also die Momente M_{w1}, M_{w2}, ... dieses Balkens berechnet, so findet man:

$$\delta_m = M_{w.m}.$$

2. Beispiel. Gesucht sind die senkrechten Verschiebungen der Knotenpunkte der unteren Gurtung des in der Fig. 109 abgebildeten *Fachwerkbalkens mit überstehenden Enden.* Ob A oder B auf einer wagerechten Bahn verschiebbar ist, ist [illegible].

Man bestimme (durch Zeichnung oder Rechnung) die Momentenlinie $C'A'NB'D'$ eines bei C' und D' frei aufliegenden Balkens, auf welche die Lasten w_1, w_2, ... (welche in Fig. 109 theils positiv, also abwärts wirkend, theils negativ, mithin aufwärts gerichtet, angenommen wurden) wirken, bringe hierauf die Auflagersenkrechten in A' und B' mit der Momentenlinie zum Schnitte und lege durch diese beiden Punkte die Schlusslinie. Die in der Figur schraffirte Fläche ist die verlangte Biegungsfläche. Beispielsweise sind die Senkungen der Knotenpunkte 0 und 5 gleich δ_0 bezieh. δ_5.

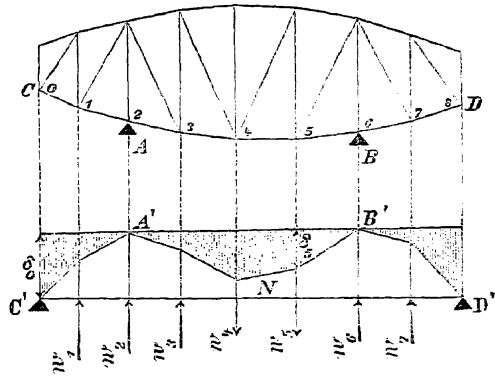



Fig. 109.

3. Beispiel. Es soll die Biegungsfläche der oberen Gurtung des *Gerber*'schen Balkens in Fig. 110 ermittelt werden. Die Vertheilung der auf wagrechten Bahnen beweglichen Auflagergelenke ist gleichgültig.

Nach Berechnung der w, welche theils positiv, theils negativ ausfallen, werden die folgenden Momentenlinien aufgetragen:

$C'ND'$ für den einfachen Balken $C'D'$ mit den Lasten w_1 bis w_3,
$D'LE'$ „ „ „ „ $D'E'$ „ „ „ w_4 „ w_{12},
$E'RF'$ „ „ „ „ $E'F'$ „ „ „ w_{13} „ w_{15}.

Hierauf werden die Senkrechten durch die Punkte A und B mit der Momentenlinie $D'LE'$ in A' und B' zum Schnitte gebracht, die Strecken:

$$\overline{A'A''} = \delta' = \text{Senkung des Punktes } A,$$
$$\overline{B'B''} = \delta'' = \text{„ „ „ } B$$

abgetragen und schliesslich der durch A'' und B'' gehende Linienzug $C'D''E''F'$, dessen Ecken senkrecht unter D und E liegen, eingezeichnet.

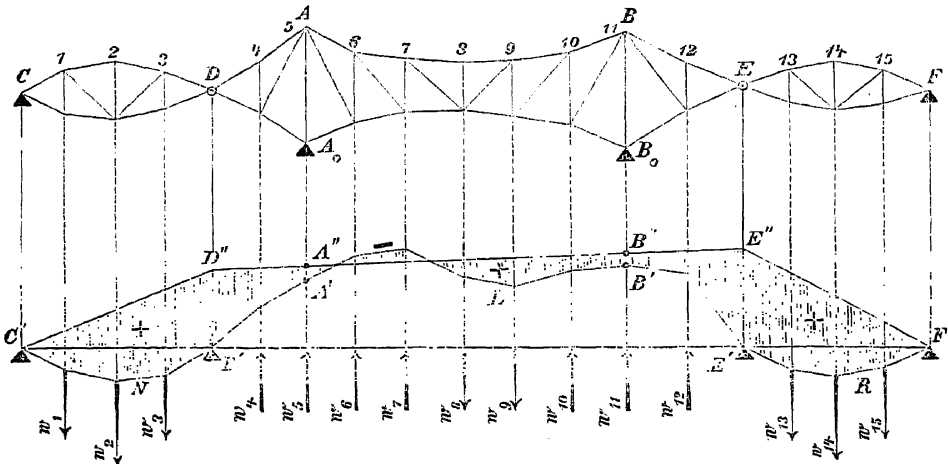



Fig. 110.

Die Fläche zwischen diesem Linienzuge und den Momentenlinien ist die gesuchte Biegungsfläche.

Bei starren Stützen A_0 und B_0 sind δ' und δ'' beziehungsweise gleich den Längenänderungen der Vertikalen AA_0 und BB_0. Erleiden diese Stäbe Verkürzungen, so liegen A'' und B'' oberhalb A' und B', sonst unterhalb.

4. Beispiel. Gesucht ist die Biegungslinie für die obere Gurtung des in Fig. 111 dargestellten *Fachwerkbogens mit drei Gelenken.* Die Werthe w_1 bis w_3 und w_5 bis w_7 seien nach No. 46 mit Hilfe der Winkeländerungen $\Delta\vartheta$ berechnet worden. Ist auch w_4 bekannt, so lässt sich die Momentenlinie des durch die Lasten w beanspruchten einfachen Balkens $A'B'$ ermitteln, worauf die Durchbiegungen $\delta_m = M_{w \cdot m}$ gegeben sind. Um w_4 berechnen zu können, muss man die Winkeländerung $\Delta\vartheta_4$ haben, und diese lässt sich wie folgt bestimmen.

Nach Gleich. (4), Seite 98 ist die durch die Aenderungen der Winkel ϑ und der Spannungen σ in den Gurtstäben bedingte Aenderung Δl der Stützweite AB zunächst für den Fall $t = 0$:

$$\Delta l = y_1 \Delta\vartheta_1 + y_2 \Delta\vartheta_2 + y_3 \Delta\vartheta_3 + y_4 \Delta\vartheta_4 + y_5 \Delta\vartheta_5 + y_6 \Delta\vartheta_6 + y_7 \Delta\vartheta_7 + \frac{\sigma_1}{E}\lambda_1 + \frac{\sigma_2}{E}\lambda_2 + \ldots + \frac{\sigma_8}{E}\lambda_8$$

und man erhält somit, bei gegebener Verschiebung Δl, für $\Delta\vartheta_4$ den Werth:

$$(24) \qquad \Delta \mathfrak{I}_4 = \frac{\Delta l - \sum\limits_1^3 y_m \Delta \mathfrak{I}_m - \sum\limits_5^7 y_m \Delta \mathfrak{I}_m - \sum\limits_1^8 \frac{\sigma_m}{E} \lambda_m}{y_4}.$$

Bei starren Stützen ist $\Delta l = 0$. Sind die Kämpfer A und B durch eine Zugstange vom Querschnitte F_0 verbunden, so ist Δl gleich der

Fig. 111.

Verlängerung dieser den Horizontalschub H des Bogens aufnehmenden Stange; es folgt dann $\Delta l = \frac{Hl}{EF_0}$. Sollen Temperaturänderungen berücksichtigt werden, so sind die Spannungen σ in Gleich. (24) zu er-

Fig. 112.

setzen durch die Werthe $\sigma_m + \varepsilon E t_m$, während für Δl der Werth $\frac{Hl}{EF_0} + \varepsilon t_0 l$ einzuführen ist. Hierbei bedeutet t_m die Temperatur-

änderung für den Stab s_m der oberen Gurtung und t_0 die Temperaturänderung für die Stange AB.

Will man die Biegungslinie ermitteln, ohne die Winkeländerungen zu berechnen, so bestimmt man w_1 bis w_6 (Fig. 112) und w_8 bis w_{13} mit Hilfe der in No. 47 entwickelten Formeln und wendet dann die Beziehung:

$$\Delta l = \sum_1^6 y_m w_m + y_7 w_7 + \sum_8^{13} y_m w_m + \sum_1^{14} \Delta' d_m{}^{*)}$$

an. Man erhält:

$$w_7 = \frac{\Delta l - \sum_1^6 y_m w_m - \sum_8^{13} y_m w_m - \sum_1^{14} \Delta' d_m}{y_7}.$$

Zahlenbeispiel. (Figuren auf Tafel 2). Es soll die Biegungslinie der unteren Gurtung des in Fig. 113 abgebildeten Fachwerkbogens mit drei Gelenken für den Fall bestimmt werden, dass auf den Träger nur eine im Scheitelgelenk angreifende Einzellast 1000^k wirkt.

Sämmtliche Stäbe sind aus Winkeleisen zusammengesetzt; die Inhalte ihrer Querschnitte (ohne Abzug für Nietlöcher) sind in der folgenden Tabelle sowie in Fig. 113 zusammengestellt worden.

	Form des Querschnitts	Winkeleisenkaliber	Inhalt des Querschnitts
Obere Gurtung	⅂┌	$80 \cdot 80 \cdot 10^{mm}$	30^{qcm}
Untere „	┘└ / ⅂┌	$90 \cdot 90 \cdot 11$ „	74 „
Endvertikale	⅂┌	$90 \cdot 90 \cdot 11$ „	37 „
Vertikale bei (1)	⅂┌	$80 \cdot 80 \cdot 10$ „	30 „
„ „ (2) (3) (4)	⅂┌	$60 \cdot 60 \cdot 10$ „	22 „
1te Diagonale	⅂┌	$90 \cdot 90 \cdot 11$ „	37 „
2te und 5te Diagonale	⅂┌	$80 \cdot 80 \cdot 10$ „	30 „
3te Diagonale	⅂┌	$70 \cdot 70 \cdot 10$ „	26 „
4te „	⅂┌	$60 \cdot 60 \cdot 10$ „	22 „

Die in die linke Hälfte des Trägernetzes (Fig. 113) eingeschriebenen Zahlen geben die Spannkräfte (in *kilogr.*) an; dieselben können u. A.

*) Die Stäbe $A1$, 6—7, 7—8 und $13B$ werden hier zweckmässig mit d_1, d_7, d_8, d_{14}, bezeichnet.

sehr schnell mit Hilfe eines Cremona'schen Kräfteplanes erhalten werden. [Der vorliegende Träger wurde im ersten Bande, § 48, No. 198 und § 49 für verschiedene Belastungsweisen untersucht. Die in Fig. 113 angegebenen Spannkräfte stimmen mit den früher mit S_G bezeichneten überein und sind — in *Tonnen* ausgedrückt — in der Tabelle auf Seite 382, Band I, enthalten. Die dort fehlende Spannkraft im ersten Stabe des Untergurts findet man, indem man den Horizontalschub $H = 1875^k$ mit der Sekante des Stabneigungswinkels multiplicirt; es ergiebt sich der *Druck:* $1875 \frac{333}{300} = 2081^k$.]

Die schwarzen Zahlen in der rechten Hälfte des Trägernetzes (Fig. 113) bedeuten die Stablängen (in *cm*), während Fig. 114 eine übersichtliche Zusammenstellung der 10000-fachen Längenänderungen (aufgetragen im Maassstabe 1 : 40) bietet. Diese Werthe sind für $E = 1\,800\,000^k$ f. d. *qcm* (Stabeisen) berechnet worden, und es ergab sich beispielsweise für den ersten Stab der oberen Gurtung:

$$10000\,\Delta o_1 = \frac{10000 \cdot O_1 o_1}{EF} = + \frac{10000 \cdot 315 \cdot 300}{1800000 \cdot 30} = + 17{,}5^{cm} = + 175^{mm},$$

für die Diagonale des ersten Feldes:

$$10000\,\Delta d_1 = \frac{10000 \cdot D_1 d_1}{EF} = - \frac{10000 \cdot 509 \cdot 485}{1800000 \cdot 37} = - 37{,}1^{cm} = - 371^{mm},$$

und für die Endvertikale:

$$10000\,\Delta h_0 = \frac{10000 \cdot V_0 h_0}{EF} = + \frac{10000 \cdot 400 \cdot 525}{1800000 \cdot 37} = + 31.5^{cm} = + 315^{mm}.$$

Nach Berechnung dieser Längenänderungen wurden die 10000-fachen Werthe $\Delta' u$, $\Delta' d$ (vergl. Seite 108) durch Zeichnung ermittelt. Für den ersten Stab der unteren Gurtung wurde z. B. der durch eine kräftig ausgezogene, mit dem fraglichen Stabe zusammenfallende Linie dargestellte Werth $10000\,\Delta' u = - 638^{mm}$ gefunden, für die erste Diagonale: $10000\,\Delta' d = - 600^{mm}$. Die Gewichte w wurden mittels Gleichung (10), Seite **109**, bestimmt, da die Füllungsglieder die in der Fig. 91 dargestellte Anordnung haben. Es ist im vorliegenden Falle $\Delta' o = \Delta o$ und $b_m = a_m$, vergl. Fig. 91, also:

$$w_m = \frac{1}{h_m}(-\Delta o_m + \Delta' u_{m+1} + \Delta' d_m - \Delta' d_{m+1} - a_{m-1} + a_m).$$

Die 10000-fachen Werthe a sind ebenfalls in der Fig. 114 angegeben*). Man erhält (mit Weglassung des Faktors 10000)

---

*) Die Strecke, welche a_3 darstellt, wurde — weil sehr klein — nicht eingezeichnet.

$$w_1 = \tfrac{1}{3810}[-175 - 600 - 600 + 477 - 400 + 201] = -0{,}29$$
$$w_2 = \tfrac{1}{2690}[-372 - 633 - 477 + 300 - 201 + 77] = -0{,}49$$
$$w_3 = \tfrac{1}{1890}[-529 - 663 - 300 - 104 - 77 - 11] = -0{,}89$$
$$w_4 = \tfrac{1}{1410}[-473 - 616 + 104 - 601 + 11 - 53] = -1{,}15$$
$$\Sigma \Delta' u = -(577 + 600 + 633 + 663 + 616) \cdot 2 = -6178.$$

$$y_1 w_1 = -417{,}6^{mm}$$
$$y_2 w_2 = -1254{,}4$$
$$y_3 w_3 = -2990{,}4$$
$$y_4 w_4 = -4416{,}0$$
$$\sum_1^4 y w = -9078{,}4$$

Da nun im vorliegenden Falle:

$$\Delta l = 2 \sum_1^4 y w + y_5 w_5 + \Sigma \Delta' u$$

ist, so folgt

$$w_5 = -\frac{\left(\sum_1^4 y w\right) 2 + \Sigma \Delta' u}{y_5} = + \frac{9078{,}4 \cdot 2 + 6178}{4000} = + 6{,}08.$$

Die Ordinaten δ_1, δ_2, ... der gesuchten Biegungslinie sollen zunächst berechnet und zu diesem Zwecke als Biegungsmomente eines mit w_1, w_2, ... belasteten einfachen Balkens gedeutet werden. Für die Werthe $(M_w \mid \lambda)$ erhält man dann folgenden Ansatz:

$$\begin{array}{rl} Q_5 = \frac{1}{2} w_5 = & 3{,}04 \\ & -1{,}15 = w_4 \\ \hline Q_4 = & +1{,}89 \\ & -0{,}89 = w_3 \\ \hline Q_3 = & +1{,}00 \\ & -0{,}49 = w_2 \\ \hline Q_2 = & +0{,}51 \\ & -0{,}29 = w_1 \\ \hline Q_1 = & +0{,}22 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} (M_{w \cdot 1} \mid \lambda) = Q_1 = & 0{,}22 \\ & +0{,}53 = Q_2 \\ \hline (M_{w \cdot 2} \mid \lambda) = & +0{,}73 \\ & +1{,}00 = Q_3 \\ \hline (M_{w \cdot 3} \mid \lambda) = & +1{,}73 \\ & +1{,}89 = Q_4 \\ \hline (M_{w \cdot 4} \mid \lambda) = & +3{,}62 \\ & +3{,}04 = Q_5 \\ \hline (M_{w \cdot 5} \mid \lambda) = & +6{,}66 \end{array}$$

Da nun in die Formel für w die 10 000-fachen Längenänderungen eingeführt wurden, so ergiebt sich:

$$\delta_m = \frac{M_w}{10\,000} = \frac{\lambda\,(M_{wm} \mid \lambda)}{10\,000} = \frac{3\,000\,(M_{wm} \mid \lambda)}{10\,000}, \text{ also:}$$

$\delta_1 = 0{,}3 \cdot 0{,}22 = 0{,}066^{mm}$; $\delta_2 = 0{,}3 \cdot 0{,}73 = 0{,}219^{mm}$;
$\delta_3 = 0{,}3 \cdot 1{,}73 = 0{,}519^{mm}$; $\delta_4 = 0{,}3 \cdot 362 = 1{,}086^{mm}$;
$\delta_5 = 0{,}3 \cdot 6{,}66 = 1{,}998^{mm}$.

Will man diese Werthe durch Zeichnung finden und zwar im Maassstabe 25 : 1, so ist für das Seilpolygon der Gewichte w die Polweite $10\,000 \frac{1}{300} \cdot \frac{1}{25} = \frac{4}{3}$ anzunehmen, weil der Längenmaassstab der Trägerzeichnung = 1 : 300 ist. Die Werthe w und die Polweite sind Zahlen, für welche in Fig. 113 der Maassstab $1 = 12^{mm}$ gewählt wurde.

Nach Ermittelung der Biegungslinie der *unteren* Gurtung ist diejenige der *oberen* Gurtung durch die Bedingung bestimmt, dass sich der Abstand zweier senkrecht übereinander gelegenen Knotenpunkte m um die Strecke Δh_m ändert. Für den oberen Knotenpunkt 2 ergiebt sich hiernach eine senkrechte Verschiebung von $0{,}219 - \Delta h_2 = 0{,}219 - 0{,}012 = 0{,}207^{mm}$. In Fig. 113 sind die auf zwei Stellen abgerundeten Werthe der Durchbiegungen zusammengestellt worden.

51. Vollständige Bestimmung der Verschiebungen. Durch Aufzeichnung einer Biegungslinie erhält man zunächst nur die Projektionen der Verschiebungen der Knotenpunkte auf eine feste Richtung, nicht aber diese Verschiebungen selbst. Wird also die vollständige Bestimmung der Formänderung eines Fachwerks verlangt und will man diese Aufgabe mit Hilfe des Seilpolygons lösen, so muss man *zwei* Biegungslinien zeichnen. Wurde hierbei der Träger einmal auf ein Achsenkreuz (x_1, y_1), dann auf die Achsen (x_2, y_2) bezogen, Fig. 115, und sind mm_1 und mm_2 die für den Knoten m erhaltenen Ordinaten der für die Richtungen y_1 und y_2 ermittelten Biegungslinien, so ist die Verschiebung mm' des Punktes m bestimmt durch $m_1 m' \perp m_1 m$, $m_2 m' \perp m_2 m$. Es möge aber noch eine andere Darstellungsweise der Verschiebungen (die meistens den Vorzug verdienen wird) gezeigt werden, darin bestehend, dass nach Auftragung *einer* Biegungslinie das im § 2 gelehrte Stabzugverfahren zu Hilfe genommen wird. In Fig. 116 ist dieser Weg erläutert worden.

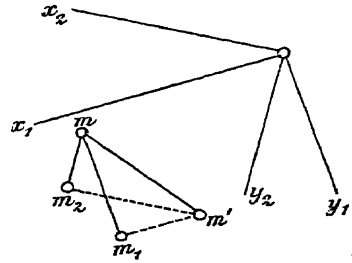



Fig. 115.

Gegeben seien die Verschiebungen Δy des auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz (x, y) bezogenen Stabzuges $0 - 1 - 2 - 3 - \ldots\ldots$; ausserdem sei die Verschiebung Δx irgend eines Knotens bekannt. Es werde die vollständige Darstellung der Verschiebungen sämmtlicher Knoten gefordert.

AB sei die Schlusslinie der Biegungslinie $0''\ 1''\ 2''\ 3''\ \ldots\ldots$ Die Punkte $0''$, $1''$, $2''$ ... projicire man durch Parallelen zu AB auf eine zur y-Achse parallele Gerade, welche von der Schlusslinie in A geschnitten werde, und ziehe durch A und durch die Projektionen $0'''$, $1'''$, $2'''$ ... der Punkte $0''$, $1''$, $2''$, ... Parallelen g_A, g_0, g_1, g_2, ... zur x-Achse. Auf der g_A nehme man den Pol O des verlangten Verschiebungsplanes beliebig an und bestimme nun zunächst die Verschiebung desjenigen Knotens, dessen Δx bekannt ist.

In Fig. 116 wurde Δx_2 gegeben angenommen und der Strahl $O2'$, welcher die Verschiebung des Punktes 2 nach Grösse, Richtung und Sinn darstellt, eingezeichnet; sein Endpunkt $2'$ liegt auf der Ge-

raden g_2 (weil die Projektion von $O2'$ auf die Richtung y gleich Δy_2 sein muss) und im (negativ vorausgesetzten) Abstande Δx_2 von der durch O parallel zur y-Achse gezogenen Geraden OO'.

Trägt man nun an $2'$ die dem Stabe s_2 parallele Strecke $\Delta 2$ an, welche gleich der Aenderung der Länge s_2 ist und den Sinn $2-1$ oder $1-2$ erhält, je nachdem der Stab s_2 gedehnt oder verkürzt

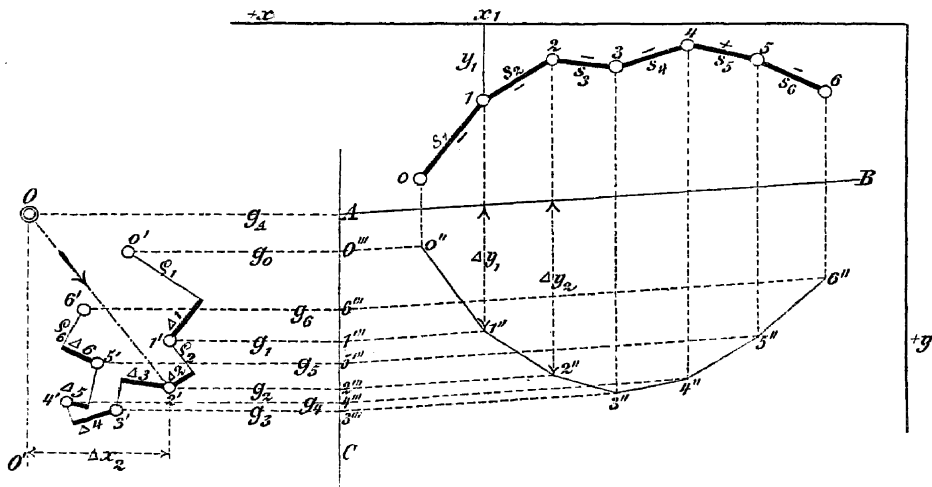



Fig. 116.

wird, und errichtet man im Endpunkte von $\Delta 2$ auf $\Delta 2$ ein Loth (ρ_2), welches die Gerade g_1 in $1'$ schneidet, so giebt der Polstrahl $O1'$ nach Grösse, Richtung und Sinn die Verschiebung des Knotenpunktes 1 an, wie ohne weiteres aus dem im § 2 gelehrten Stabzugverfahren hervorgeht. Auf dieselbe Weise wurde die Lage des Punktes $0'$ bestimmt und — wieder von $2'$ aus — der Reihe nach $3'$, $4'$, $5'$, $6'$ festgelegt. In Fig. 116 ist vorausgesetzt worden, dass alle Stäbe mit Ausnahme von s_5 Verkürzungen erleiden.

Will man die Δx durch Rechnung bestimmen, so differenzire man die Gleichung

$$s_m^2 = (x_{m-1} - x_m)^2 + (y_{m-1} - y_m)^2$$

und ersetze das Differentialzeichen durch das Zeichen Δ. Man erhält:

$$2s_m\,\Delta s_m = 2\,(x_{m-1} - x_m)\,(\Delta x_{m-1} - \Delta x_m) + 2\,(y_{m-1} - y_m)\,(\Delta y_{m-1} - \Delta y_m)$$

und hieraus

$$\Delta x_{m-1} - \Delta x_m = \Delta s_m \sec \beta_m - (\Delta y_{m-1} - \Delta y_m) \operatorname{tg} \beta_m,$$

wo β_m den Neigungswinkel des Stabes s_m gegen die x-Achse bedeutet. Kennt man also einen der beiden Werthe Δx_{m-1} und Δx_m, so kann man auch den anderen angeben, so dass es möglich ist, mit Hilfe der vorstehenden Formel und mittels des in Nr. 49 zur Bestimmung der Δy entwickelten Verfahrens sämmtliche Seitenverschiebungen Δx, Δy eines Stabzuges *durch Rechnung*

zu finden, sobald ein Werth Δx und zwei Werthe Δy bekannt sind. Ein anderes rechnerisches Verfahren lässt sich leicht durch Projiciren des im § 2 eingeführten, durch Aneinanderreihung der Δs und ρ entstandenen Linienzuges auf zwei rechtwinklige Achsen x und y ableiten.

52. Einführung stellvertretender Stabzüge. Die in der Fig. 116 gezeigte Darstellungsweise der Verschiebungen wird besonders übersichtlich, sobald sämmtliche $\Delta s = 0$ sind, weil der Verschiebungsplan dann aus einem Linienzuge $0' \, 1' \, 2' \ldots$ besteht, dessen Eckpunkte $0'$, $1'$, $2'$, ... in den Geraden $g_0, g_1, g_2, \ldots$ liegen, und dessen Seiten $0'-1'$, $1'-2'$, ... rechtwinklig zu den entsprechenden Stabrichtungen $0-1$, $1-2$, ... sind.*) Auch ist zu beachten, dass sich im Falle des Verschwindens des Δs für die Gewichte w (nach Gleich. 3, S. 101) die *von der Lage des Achsenkreuzes x, y unabhängigen* Werthe

$$w_m = \Delta \vartheta_m$$

ergeben, und es liegt daher der Gedanke sehr nahe, dass es zuweilen vortheilhaft sein dürfte, den *elastischen* Stabzug behufs Darstellung der Verschiebungen seiner Knotenpunkte durch einen aus *starren* Gliedern bestehenden zu ersetzen.**)

Zu einem solchen *stellvertretenden Stabzuge* gelangt man, indem man zwischen je zwei aufeinander folgenden Knotenpunkten $m-1$, m einen neuen Knoten m_0 annimmt und diesen sowohl mit $m-1$ als auch mit m durch starre (in Fig. 117 gestrichelt angegebene) Stäbe verbindet. Der neue Randwinkel bei m sei $\alpha_m = \vartheta_m + \omega_m + \varkappa_{m+1}$, der Randwinkel bei m_0 sei τ_m. Die Aenderungen von τ_m und α_m sind:

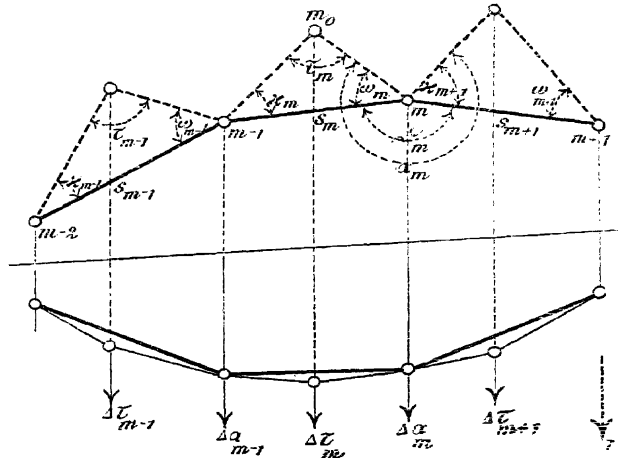



Fig. 117.

---

*) Vergl. auch Seite 96, Fig. 79. Dort wurde dieses Gesetz bereits auf anderem Wege abgeleitet.

**) Der Umstand, dass $w_m = \Delta \vartheta_m$ von der Lage des Achsenkreuzes (x, y) unabhängig ist, vereinfacht auch die Anwendung zweier Biegungslinien. Schliessen die beiden Richtungen, welche den Gewichten w zugeschrieben werden sollen,

$$\Delta\tau_m = \frac{\Delta s_m}{s_m}(\text{cotg}\,\varkappa_m + \text{cotg}\,\omega_m)$$

$$\Delta\alpha_m = \Delta\vartheta_m + \Delta\omega_m + \Delta\varkappa_{m+1} = \Delta\vartheta_m - \frac{\Delta s_m}{s_m}\text{cotg}\,\varkappa_m - \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}}\text{cotg}\,\omega_{m+1}.$$

Betrachtet man die $\Delta\tau$ und $\Delta\alpha$ als Kräfte, welche in der Richtung r wirken, und verbindet man dieselben durch ein Seilpolygon mit der Polweite *Eins*, so ist dieses Seilpolygon die Biegungslinie des aus starren Gliedern bestehenden Stabzuges für die Richtung r, und das eingeschriebene Polygon, dessen Ecken den Knoten ... $(m-2)$, $(m-1)$, m, $(m+1)$ ... entsprechen, ist die Biegungslinie des elastischen Stabzuges ... $(m-2)$ $(m-1)$ m $(m+1)$ ...

Die Punkte m_0 wird man so annehmen, dass die Cotangenten der Winkel $\varkappa$ und ω runde Zahlen sind. Wählt man z. B. $\omega_m = \varkappa_m = 45°$, so erhält man sehr einfach:

$$\Delta\tau_m = 2\frac{\Delta s_m}{s_m} \text{ und } \Delta\alpha_m = \Delta\vartheta_m - \frac{\Delta s_m}{s_m} - \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}}.{}^{*)}$$

Hat die Elastieitätsziffer E für alle Stäbe denselben Werth, so ersetze man die Gewichte $\Delta\tau$ und $\Delta\alpha$ durch die Gewichte $E\Delta\tau$ bezw. $E\Delta\alpha$ und die Polweite 1 durch die Polweite E. Sollen dann Temperaturänderungen unberücksichtigt bleiben, so treten in den vorstehen-

---

den Winkel ψ ein, so denke man das Kräftepolygon nach Aufzeichnung der ersten Biegungslinie um ψ gedreht, um einzusehen, dass jede Seite des zweiten Seilpolygons mit der entsprechenden Seite der ersten Biegungslinie den Winkel ψ bilden muss. Mit Rücksicht auf die käuflichen Winkelbrettchen wird man für ψ einen der Winkel: 30°, 60°, 45°, 90° wählen. Auf weitere Beziehungen zwischen den beiden Biegungslinien gehen wir nicht ein, da sich der Linienzug $0'1'2'3'$ ... ebenfalls schnell zeichnen lässt und die Verschiebungen sofort nach Grösse und Richtung liefert, so dass man die Zusammensetzung der Seitenverschiebungen (nach Fig. 115) spart.

*) Es ist darauf zu achten, dass keiner der hinzugefügten starren Stäbe die Richtung r erhalten darf, wenn ausser der Biegungslinie noch die vollständige Darstellung der Verschiebungen mit Hilfe des Linienzuges $0'1'2'$ ... (Fig. 116) ohne jede weitere Zwischenrechnung erfolgen soll. Diese Zwischenrechnung, welche, wie leicht einzusehen ist, in der Ermittelung des Werthes ρ für jeden in die Richtung r fallenden Stab bestehen würde, ist zwar nicht schwierig, immerhin aber umständlicher als die Annahme besonderer Winkel ω und $\varkappa$ für diese Stelle des Stabzuges. Wird nur die Biegungslinie für die Richtung r verlangt, so dürfen Stäbe von der Richtung r vorkommen, denn es entsprechen dann den beiden Endpunkten solcher Stäbe im Sinne r gleichgrosse Verschiebungen. Zu beachten ist auch, dass die Gewichte $\Delta\tau$ und $\Delta\alpha$ in der Reihenfolge ... $\Delta\tau_{m-1}$, $\Delta\alpha_{m-1}$, $\Delta\tau_m$, $\Delta\alpha_m$, $\Delta\tau_{m+1}$, $\Delta\alpha_{m+1}$ ... durch das Seilpolygon verbunden werden müssen.

den Formeln an die Stelle der Verlängerungsverhältnisse $\Delta s/s$ die Spannungen σ. Ist $\omega = \varkappa = 45°$, so erhält man:

$$E\Delta\tau_m = 2\sigma_m, \quad E\Delta\alpha_m = E\Delta\vartheta_m - \sigma_m - \sigma_{m+1}.^{*)}$$

Für die in der Fig. 118 angegebene Lage der eingeschalteten Punkte m_0 ergiebt sich:

$$\Delta\tau_m = -\frac{\Delta s_m}{s_m}(\operatorname{cotg}\varkappa_m + \operatorname{cotg}\omega_m)$$

$$\Delta\alpha_m = \Delta\vartheta_m + \frac{\Delta s_m}{s_m}\operatorname{cotg}\varkappa_m + \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}}\operatorname{cotg}\omega_{m+1}.$$

Welche der beiden Anordnungen (Fig. 117 oder Fig. 118) gewählt wird, ist für das Ergebniss gleichgiltig. Man strebe zur Erzielung übersichtlicher Kräftepolygone nach Möglichkeit gleiche Vorzeichen der Gewichte w an. Z. B. wird man bei einfachen Balkenbrücken in der Regel für die $\Delta\alpha$ der oberen und auch der unteren Gurtung positive Werthe erhalten und sich in Folge dessen bei Untersuchung einer oberen Gurtung für die in Fig. 118 gegebene Anordnung entscheiden, weil die Δs und σ der Obergurtstäbe negativ sind. Bei einer unteren Gurtung wird besser nach Fig. 117 verfahren.

Fig. 118.

Eine andere Behandlungsweise des stellvertretenden Stabzuges schliesst sich der auf Seite 104 bis 112 gelösten Aufgabe an: die Gewichte w_m zu bestimmen, ohne vorher die Winkeländerungen $\Delta\vartheta$ zu berechnen. Dieses Verfahren kommt natürlich nur dann in Frage, wenn die Winkeländerungen nicht ohnehin zu anderen Zwecken**) angegeben werden müssen; dasselbe möge an dem in Fig. 119 dargestellten Beispiele erläutert werden.

Gesucht sei die Biegungslinie (für die Richtung r) der Gurtung ... $(m-1)$ m $(m+1)$ ... eines einfachen Dreiecknetzes. Die den eingeschalteten Knoten m_0 entsprechenden Gewichte $\Delta\tau_m$ werden wie vorhin berechnet, das Gewicht w_m für einen Knoten m der Gurtung hingegen nach der auf Seite 105 bewiesenen Gleichung:

$$w_m = \Sigma\mu \cdot \Delta s.$$

*) Vergl. S. 102. Dem Einfluss von Temperaturänderungen t kann man auch Rechnung tragen, indem man σ ersetzt durch $\sigma + \varepsilon E t$.

**) Z. B. Bestimmung von Nebenspannungen. Vergl. auch Seite 95.

Hierin bedeutet μ die Spannkraft, welche in einem Stabe des in Fig. 119^I herausgetragenen Fachwerktheiles in Folge der drei unter sich im Gleichgewichte befindlichen parallelen äusseren Kräfte $\frac{1}{e}$, $\frac{1}{e'}$, $\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{e'}\right)$ entsteht, und Δs die Längenänderung des Stabes für denjenigen Belastungszustand, für welchen die Biegungslinie gesucht wird. e und e' sind die gegenseitigen Abstände jener 3 Kräfte, deren Richtung gelegentlich der früheren Ableitung der Gleichung $w_m = \Sigma \mu \Delta s$ parallel den w vorausgesetzt wurde, jetzt aber willkürlich gewählt werden darf, weil ja die Grösse der w eines aus starren Gliedern bestehenden Stabzuges unabhängig von der Richtung r ist. Die Summe Σ erstreckt

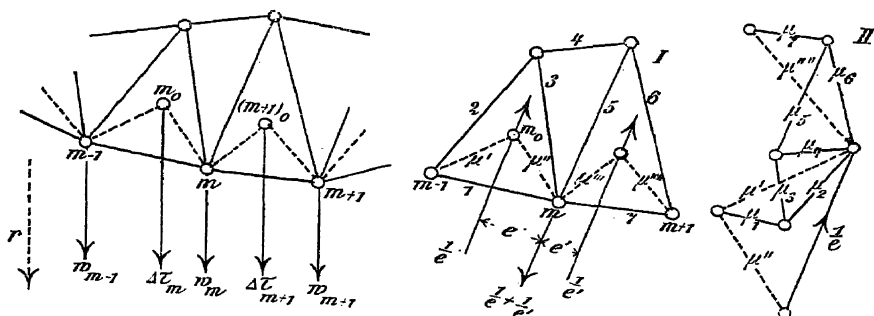



Fig. 119.

sich über die in der Fig. 119^I mit den Ziffern 1, 2, 3, ... 6, 7 bezeichneten Stäbe, deren Spannkräfte μ in Fig. 119^II mittels eines Cremona'schen Kräfteplanes dargestellt wurden. Für die Fachwerkstäbe 3 und 5 ergaben sich Zugkräfte μ, für die übrigen Druckkräfte. Sind also die Längenänderungen der Stäbe 1, 2, 3 ... bezieh. $= \Delta_1$, Δ_2, Δ_3, ..., so folgt:

$$w_m = -\mu_1 \Delta_1 - \mu_2 \Delta_2 + \mu_3 \Delta_3 - \mu_4 \Delta_4 + \mu_5 \Delta_5 - \mu_6 \Delta_6 - \mu_7 \Delta_7.$$

Es wird sich empfehlen, die Richtung der Kraft $\frac{1}{e}$ so zu wählen, dass e einen festen, durch eine runde Zahl ausdrückbaren Werth annimmt. Bei Ermittelung der verschiedenen w sind also verschiedene Kraftrichtungen anzunehmen.

Eine wichtige Anwendung der stellvertretenden Stabzüge findet sich in No. 35.

Uebungsaufgaben zu den §§ 1 bis 3.

1. Aufgabe. Es soll die Aenderung $\Delta \vartheta_b$ des Randwinkels ϑ_b des in Fig. 120 dargestellten Fachwerks mit Hilfe eines *Williot*'schen Verschiebungsplanes bestimmt werden.

Lösung. Man nehme den Punkt a und die Richtung des Stabes ab als festliegend an, ermittele nach No. 32 (S. 58) der Reihe nach die Verschiebungen Ob', Oc', Od', Oe' der Punkte b, c, d, e und denke hierauf die Verschiebung von e nach dem Stabzugverfahren bestimmt. Man erkennt dann, dass das Loth von e' auf $\Delta 7$ gleich $s_7 \Delta \vartheta_b$ ist und findet

$$\Delta \vartheta_b = \frac{\rho}{s_7}.$$

Der Drehungssinn von s_7 gegen s_1 ist in der Figur durch einen Pfeil angegeben worden; hiernach ist $\Delta \vartheta_b$ positiv. Wir setzen voraus, dass die Stäbe 2, 4, 5 gedehnt, die übrigen verkürzt werden.

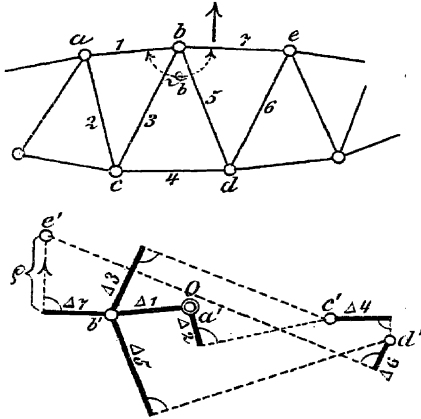
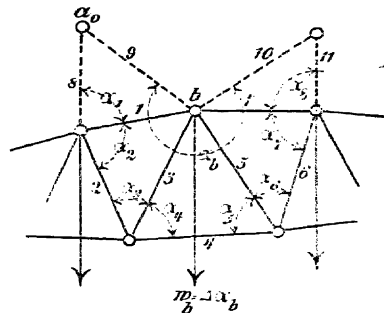



Fig. 120. Fig. 121.

2. Aufgabe. Behufs Darstellung der Biegungslinie der oberen Gurtung des in Fig. 121 abgebildeten Fachwerks soll das Gewicht w_b mit Hilfe eines Williot'schen Planes dargestellt werden und zwar ohne gesonderte Ermittelung von $\Delta \vartheta_b$.

Lösung. Man füge die zu w_b parallelen starren beliebig langen Stäbe 8 und 11 hinzu, ferner die starren Stäbe 9 und 10. Dann ist (wenn die Polweite 1 gewählt wird) $w_b = \Delta \alpha_b$, welcher Werth nun auf die soeben gezeigte Weise bestimmt wird. Man nehme hierbei a_0 und die Richtung des Stabes 9 als festliegend an.

3. Aufgabe. Mit Bezugnahme auf Fig. 121 beweise man, dass, sobald die Polweite $= E$ gewählt wird und $\frac{\Delta s}{s} = \frac{\sigma}{E}$ ist, das Gewicht w_b nach der Formel

$$w_b = \text{cotg}\, \alpha_1 (0 - \sigma_1)^{*)} + \text{cotg}\, \alpha_2 (\sigma_2 - \sigma_1) + \text{cotg}\, \alpha_3 (\sigma_2 - \sigma_3) + \text{cotg}\, \alpha_4 (\sigma_4 - \sigma_3)$$
$$+ \text{cotg}\, \alpha_5 (\sigma_4 - \sigma_5) + \text{cotg}\, \alpha_6 (\sigma_6 - \sigma_5) + \text{cotg}\, \alpha_7 (\sigma_6 - \sigma_7) + \text{cotg}\, \alpha_8 (0 - \sigma_7)$$

berechnet werden darf.

Lösung. Man gelangt zur vorstehenden Formel ohne weiteres, indem man nach Gl. (2) Seite 90 die Aenderungen der Dreieckswinkel, aus denen sich

*) Zur besseren Uebersicht wurden die Spannungen 0 der Stäbe 8 und 11 mit aufgeführt.

α_b zusammensetzt, bestimmt und dieselben addirt. Die Multiplikationen mit cotg. werden zweckmässig zeichnerisch ausgeführt. Man könnte auch den Ausdruck nach den Spannungen σ ordnen. Der Einfluss von σ_2 auf w_b ist dann $= \sigma_2 \frac{s_2}{r_2}$, wo s_2 die Länge des Stabes 2 und r_2 das Loth von b auf 2 bedeutet. Wie stellt man den Einfluss der Spannung eines von b ausgehenden Stabes, z. B. den von σ_3 am bequemsten dar?

4. Aufgabe. Gesucht sei die Biegungslinie (für die Richtung r) eines Stabzuges, dessen Δs und $\Delta \vartheta$ gegeben sind; einzelne Stäbe haben aber die Richtung r.

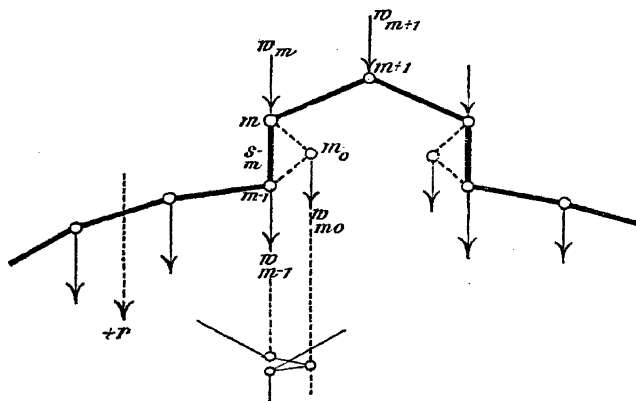



Fig. 122.

Lösung. Fällt s_m mit der Richtung r zusammen, so schalte man nach Fig. 122 zwischen $m - 1$ und m mittels starrer Stäbe, welche mit s_m Winkel von 45° einschliessen, einen neuen Knoten m_0 ein, dessen Gewicht $w_{m0} = -2 \frac{\Delta s_m}{s_m}$ ist. Für w_{m-1} und w_m erhält man:

$$w_{m-1} = \Delta \vartheta_{m-1} + \frac{\Delta s_m}{s_m}$$

$$w_m = \Delta \vartheta_m + \frac{\Delta s_m}{s_m}.$$

Ist Δs_m positiv, so ist w_{m0} im Sinne $(-r)$ anzunehmen. Figur 122 setzt also voraus, dass der Stab s_m gedrückt wird. Zu beachten ist, dass die Gewichte in der Reihenfolge w_{m-1}, w_{m0}, w_m durch das Seilpolygon verbunden werden müssen, wie dies in Fig. 122 angedeutet ist.

5. Aufgabe. Es soll der Verschiebungsplan für die untere Gurtung 0—2—4—6 des in der Fig. 123 dargestellten Trägers mit Hilfe eines stellvertretenden, aus starren Gliedern bestehenden Stabzuges 0—1—2—3—4—5—6 gezeichnet werden.

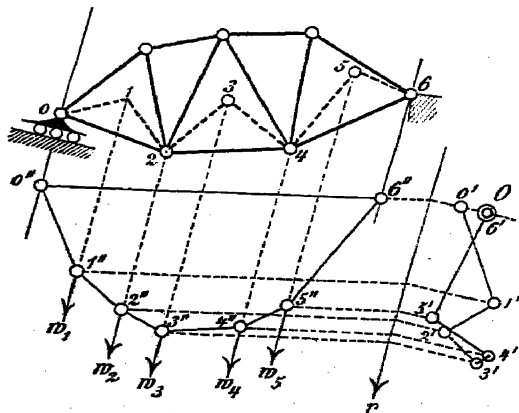



Fig. 123.

Die *Lösung* besteht darin, dass zuerst nach No. 52 die Biegungslinie für die zur Bahn des beweglichen Auflagers rechtwinklige Richtung r gezeichnet wird, weil dann die Schlusslinie 0''6'' sofort gegeben ist. Hierauf wird der Linienzug 6'5'4'3'2'1'0' nach No. 51 bestimmt. Die Strahlen OO', $O2'$, $O4'$ stellen nach Grösse, Richtung und Sinn die Verschiebungen der Punkte

0, 2, 4 dar. — Von den drei für diesen Träger in diesem Buche mitgetheilten Verfahren (vergl. Fig. 38, 105, 123) ist das erste im Allgemeinen das einfachste. Die Lösung in Fig. 105 verdient den Vorzug, sobald die lothrechten Verschiebungen δ durch Rechnung bestimmt werden sollen, und die zuletzt angegebene (Fig. 123) wird vortheilhaft, sobald die Winkeländerungen noch zu anderen Zwecken (z. B. zur Ermittelung von Nebenspannungen) gebraucht werden.

6. Aufgabe. Ein Fachwerk sei in der Weise erzeugt, dass zu einem Stabdreieck abc zwei neue Stäbe gefügt werden, die in einem neuen Knoten d miteinander verbunden sind, hierauf an zwei beliebige Knoten dieses Stabgebildes wieder zwei Stäbe mit einem Knoten e angeschlossen werden u. s. f. Es sollen die Winkeländerungen dieses Fachwerks berechnet werden.

Die *Lösung* stützt sich auf die Gleichung

$$\Delta s_1 = h \Delta \alpha_1 + \Delta s_2 \cos \alpha_3 + \Delta s_3 \cos \alpha_2,$$

welche einen besonderen Fall der auf S. 98 für Δl abgeleiteten Formel darstellt, und durch welche die Aenderung der Seitenlänge s_1 eines Dreiecks (Fig. 125) bestimmt ist, sobald die Aenderungen des Gegenwinkels und der beiden anderen Dreieckseiten bekannt sind.

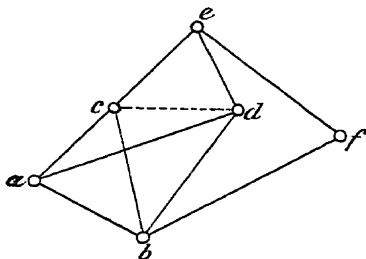
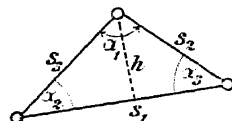



Fig. 124. Fig. 125.

Liegt beispielsweise das Fachwerk in Fig. 124 vor, so berechnet man auf die in No. 40 gezeigte Weise die Winkeländerungen der Dreiecke acb und abd und drückt hierauf die Aenderung der Entfernung cd durch die Längenänderungen $\Delta\overline{ac}$ und $\Delta\overline{ad}$ der Seiten ac und ad und durch die Winkeländerung $\Delta(cad) = \Delta(cab) - \Delta(dab)$ aus. Jetzt bestimmt man die Winkeländerungen der Dreiecke acd, cdb und cde, drückt $\Delta\overline{eb}$ durch $\Delta\overline{ce}$, $\Delta\overline{cb}$ und $\Delta(ecb)$ aus, u. s. w.

Auf diesem Wege lassen sich z. B. sämmtliche Winkeländerungen der in den Figuren 49 und 50 abgebildeten Fachwerke berechnen, wie denn überhaupt leicht einzusehen ist, dass sich mit Hilfe der Formel für Δs_1 und mittels der in No. 37 u. 38 durchgeführten allgemeineren Untersuchungen die in den §§ 2 u. 3 angegebenen Darstellungsweisen auf ähnliche Art erweitern lassen, wie dies im § 1 mit dem von Williot ursprünglich auch nur für einen sehr einfachen Fall gegebenen Verfahren geschehen ist.

§ 4.

Einflusslinien und Einflusszahlen für elastische Verschiebungen.

53. — Mit Hilfe der in den vorigen Paragraphen gelehrten Verfahren ist man im Stande, die Formänderung eines statisch bestimmten, irgendwie belasteten Fachwerks festzustellen. Es bedürfen aber diese Untersuchungen noch einer Ergänzung für den Fall, dass der Einfluss der am Fachwerk angreifenden Lasten P_1, P_2, ... auf irgend eine der

die Formänderung bestimmenden Grössen *gesondert* angegeben werden soll, etwa zu dem Zweck, die Grenzwerthe dieser Grösse (für welche natürlich das Gesetz von der Zusammenzählung der einzelnen Wirkungen gelten muss) zu ermitteln. Zwar könnte man diese Aufgabe in der Weise behandeln, dass man das Fachwerk zuerst nur mit P_1 belastet, dann nur mit P_2, u. s. w. und für jeden dieser Fälle einen Verschiebungsplan zeichnet; doch ist dieses Verfahren so umständlich, dass die Aufsuchung einer anderen Lösung geboten erscheint. Die Handhabe hierzu bietet der Maxwell'sche Satz von der Gegenseitigkeit der elastischen Formänderungen (S. 30), dessen Anwendung zunächst an zwei Beispielen gezeigt werden soll.

1. Aufgabe. Gesucht ist die Einflusslinie für die Senkung δ_m des Knotenpunktes m eines durch lothrechte Lasten P beanspruchten Fachwerkträgers.

Man nehme das gewichtslose Fachwerk nur mit einer in m angreifenden lothrechten Kraft *Eins* belastet an, ermittele die hierbei entstehenden Spannkräfte S und Längenänderungen Δs und bestimme (nach einem der in den §§ 1—3 angegebenen Verfahren) die diesen Δs entsprechende Biegungslinie derjenigen Gurtung (beispielsweise ACB), an welcher die Lasten P angreifen sollen. Ist nun die bei k gemessene Ordinate dieser Biegungslinie $= \eta_k$, so verschiebt die in m angreifende Last *Eins* den Knoten k im lothrechten Sinne um η_k, und es wird deshalb (nach dem Maxwell'schen Satze) eine in k angreifende Last *Eins* den Knotenpunkt m ebenfalls um η_k verschieben. Hieraus folgt aber, dass die gezeichnete Biegungslinie die Einflusslinie für δ_m ist.

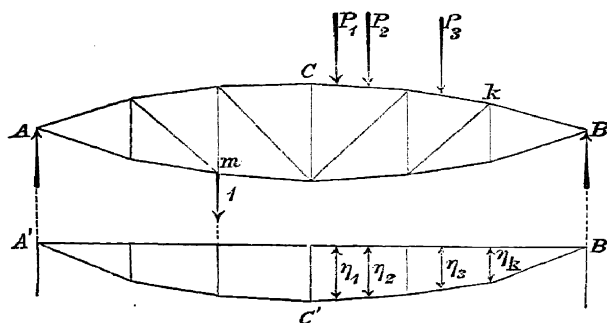



Fig. 126.

Die Lasten P_1, P_2, P_3, denen die Ordinaten η_1, η_2, η_3 entsprechen, verursachen beispielsweise bei m die Senkung

$$\delta_m = P_1\eta_1 + P_2\eta_2 + P_3\eta_3.$$

Beispiel. In Fig. 113 auf Tafel 3 wurden die senkrechten Verschiebungen der Knotenpunkte eines Bogenträgers mit drei Gelenken für den Fall aufgetragen, dass im Scheitelgelenk eine Last $1^t = 1000^k$ wirkt. Die für die untere und obere Gurtung erhaltenen Biegungslinien sind daher die Einflusslinien für die lothrechte Verschiebung δ des Scheitelgelenks; mit Hilfe des ersteren kann der Einfluss von Lasten festgestellt werden, welche in den unteren Knotenpunkten angreifen, mittels der zweiten der Einfluss der Belastung der oberen

Knoten. Ist die oben angreifende Verkehrslast: $p = 0{,}665^t$ f. d. Meter und $p\lambda = 0{,}665 \cdot 3{,}0 = 2^t$ f. d. Knotenpunkt, so folgt für volle Belastung (also mit Vernachlässigung der kleinen negativen Beitragsstrecken an den Trägerenden)

$$\delta_{max} = p\lambda\,[2{,}00 + 2\,(1{,}10 + 0{,}52 + 0{,}21 + 0{,}04)] = 11{,}5^{mm}.$$

Von der ständigen Belastung $g\lambda = 0{,}37 \cdot 3{,}0 = 1{,}11^t$ eines Feldes möge der Theil $g_u\lambda = 0{,}27$ (Gewicht der Hälfte eines Feldes des Hauptträgers) an der unteren Gurtung angreifend angenommen werden, der Theil $g_0\lambda = 0{,}84^t$ an der oberen Gurtung. Die Durchbiegung in Folge der ständigen Belastung beträgt dann:

$$\delta_g = g_u\lambda\,[2{,}00 + 2\,(1{,}09 + 0{,}52 + 0{,}22 + 0{,}07)]$$
$$+ g_0\lambda\left[2{,}00 + 2\,\left(1{,}10 + 0{,}52 + 0{,}21 + 0{,}04 - \frac{0{,}03^{*)}}{2}\right)\right] = 5{,}00^{mm}.$$

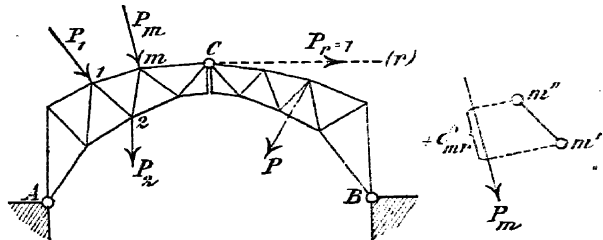
2. Aufgabe. Ein Fachwerk sei mit beliebig gerichteten Kräften P_1, P_2, ... belastet. Gesucht sei die Projektion δ_r der Verschiebung eines Knotens C auf eine feste Richtung r. Der Einfluss jeder Last P soll gesondert angegeben werden.

Man zeichne den Verschiebungsplan für den Fall, dass auf das Fachwerk nur eine Last $P_r = 1$ wirkt, welche in C angreift und die Richtung r hat. Für irgend einen Knoten m ergebe dieser Plan die Verschiebung $m''m'$, deren Projektion auf die Richtung von P_m mit $\pm\,\delta_{mr}$ bezeichnet werden möge,**) wobei das obere oder untere Vorzeichen gelten soll, jenachdem der Sinn jener Projektion mit dem Sinne von P_m übereinstimmt oder nicht.

Fig. 127.

Nun ist aber nach dem Maxwell'schen Satze die gesuchte Verschiebung δ_{rm}, welche Punkt C in der Richtung r und in Folge von $P_m = 1$ erfährt, ebenso gross wie die bereits dargestellte Verschiebung δ_{mr}, welche der Punkt m in der Richtung P_m und in Folge von $P_r = 1$ erleidet, und daraus folgt, dass der Einfluss von P_m auf die Verschiebung δ_r gleich $P_m\delta_{mr}$ ist. Auf die gleiche Weise findet man die Einflüsse der Lasten P_1, P_2, ..., so dass man schliesslich

$$\delta_r = P_1\delta_{1r} + P_2\delta_{2r} + \ldots + P_m\delta_{mr} + \ldots$$

---

*) Die Knotenpunkte an den Trägerenden sind nur mit $\frac{1}{2}\,g_0\lambda$ belastet.

**) Nach der auf Seite 31 eingeführten Bezeichnungsweise.

erhält. Die Grössen δ_{1r}, δ_{2r}, ... nennen wir kurz die den einzelnen Lasten P_1, P_2, ... entsprechenden *Einflusszahlen;* sie ergeben sich sämmtlich aus dem für $P_r = 1$ gezeichneten Verschiebungsplane.

54. — Das in den vorstehenden Beispielen angewandte Verfahren ist ein allgemeines und führt auch dann zum Ziele, wenn die δ nicht Verschiebungen und die P nicht Einzellasten bedeuten, sondern diese Buchstaben zur Bezeichnung der auf Seite 31 erklärten Begriffe „*Weg einer Belastung*“ und „*Belastung*“ dienen. Stets wird man die darzustellende Grösse

$$\delta_r = \delta_{ra} P_a + \delta_{rb} P_b + \cdots + \delta_{rm} P_m + \cdots$$

mittels des Maxwell'schen Satzes umformen in

$$\delta_r = \delta_{ar} P_a + \delta_{br} P_b + \cdots + \delta_{mr} P_m + \cdots$$

und dann die Einflusszahlen δ_{ar}, δ_{br}, ... δ_{mr}, ... einem für den Zustand $P_r = 1$ gezeichneten Verschiebungsplane (an dessen Stelle häufig eine Biegungslinie treten darf) entnehmen. Es verdient hervorgehoben zu werden, dass diese Regel auch für statisch unbestimmte Fachwerke gilt.

§ 5.

Das statisch unbestimmte Fachwerk.

a. Berechnung der statisch nicht bestimmbaren Grössen mittels des Maxwell'schen Satzes.

55. — Wir haben bereits in der Einleitung gezeigt, dass die Berechnung eines statisch unbestimmten Fachwerks in die Lösung zweier Aufgaben zerfällt. Erstens sind die Spannkräfte der Stäbe und die Stützenwiderstände mittels der Gleichgewichtsbedingungen durch die gegebenen Lasten P und gewisse statisch nicht bestimmbare Grössen X auszudrücken, und zweitens sind die Grössen X mit Hilfe von Gleichungen zu berechnen, welche man erhält, indem man die Formveränderung des statisch bestimmten Fachwerks, in welches das unbestimmte im Falle des Verschwindens sämmtlicher Grössen X übergeht, gewissen Bedingungen unterwirft.

Der einzuschlagende Weg ist meistens sehr leicht zu finden, wie die folgenden Aufgaben zeigen werden, bei deren Lösung wir von den in der Einleitung angestellten allgemeineren Untersuchungen zunächst nur den Maxwell'schen Satz zu Hilfe nehmen, während wir uns im übrigen lediglich auf die §§ 1—3 stützen. Denn es kommt uns besonders

darauf an, zu zeigen, dass die Berechnung eines gegebenen statisch unbestimmten Fachwerks für denjenigen eine sehr leichte Aufgabe ist, welcher sich mit der Darstellung der Formänderungen statisch bestimmter Fachwerke vertraut gemacht hat und den Maxwell'schen Satz kennt.*) Später werden wir auch die übrigen in der Einleitung angegebenen Verfahren verwerthen.

56. Untersuchung eines über zwei Oeffnungen gestreckten Balkens *ACB*, Fig. 128, welcher durch lothrechte Lasten P beansprucht wird.

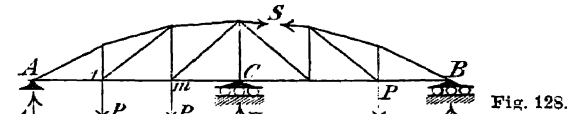
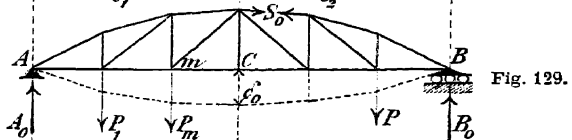
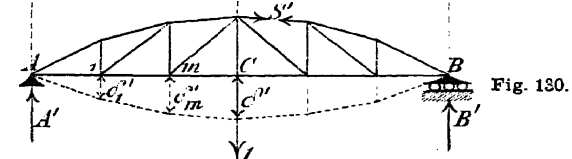
Der naheliegendste Rechnungsgang ist der folgende. Wäre der Widerstand X der Mittelstütze bekannt, so liessen sich die in A und B angreifenden Stützendrücke und sämmtliche Spannkräfte S des aus aneinandergereihten Dreiecken bestehenden Fachwerks angeben.

Nimmt man znnächst $X=0$ an, so entsteht ein einfacher Balken AB, dessen Stützenwiderstände $A_0 = \frac{\Sigma Pb}{l_1+l_2}$ und $B_0 = \frac{\Sigma Pa}{l_1+l_2}$ sind, und dessen Spannkräfte S_0 leicht gefunden werden können, beispielsweise mittels eines Cremona'schen Kräfteplanes. Dieser einfache Balken wird an der Stelle C eine lothrechte Durchbiegung δ_0 erfahren, dessen Grösse sich nach einem der in den §§ 1—3 gezeigten Verfahren ermitteln lässt.

Fig. 128.

Fig. 129.

Fig. 130.

(Das gestrichelte Polygon in Fig. 129 sei die Biegungslinie der Gurtung ACB). Denkt man jetzt die Kräfte P beseitigt und belastet den einfachen Balken AB nur mit einer in C angreifenden, nach *oben* gerichteten Last X, so wird der Punkt C im lothrechten Sinne um $\delta' X$

*) Die Untersuchung von Fachwerken, welche erst entworfen werden sollen, ist nur insofern umständlicher, als die statisch nicht bestimmbaren Grössen von den zunächst unbekannten Stabquerschnitten abhängen. Im allgemeinen wird man die Querschnittsgrössen zuerst schätzungsweise annehmen, hierauf die X und S ermitteln, die erforderlichen Querschnitte bestimmen und im Falle grösserer Unterschiede zwischen den gerechneten und den geschätzten Querschnitten das ganze Verfahren wiederholen. Vereinfachend wirkt hierbei der Umstand, dass der Einfluss der Belastung auf die Grössen X nur von dem gegenseitigen Verhältniss der Querschnitte abhängt. Vergl. auch No. 74.

gehoben, wobei δ' die mit Hilfe eines zweiten Verschiebungsplanes zu bestimmende lothrechte *Senkung* bedeutet, welche C erfährt, sobald der einfache Balken AB nur durch eine in C angreifende, lothrechte, *abwärts* gerichtete Last von der Grösse 1 beansprucht wird. Sind nun die Stützen des in Fig. 128 abgebildeten Trägers vollkommen starr, so muss die lothrechte Verschiebung von C gleich Null sein, und es folgt hieraus die Bedingung: $\delta_0 - \delta' X = 0$, aus welcher sich

$$X = 1 \frac{\delta_0}{\delta'}$$

ergiebt. Würde sich, bei nachgebenden Widerlagern, Punkt C gegen die relativ festliegend gedachte Gerade AB in lothrechter Richtung um δ_w nach unten verschieben, so wäre X aus der Gleichung $\delta_0 - \delta' X = \delta_w$ zu berechnen. Nach Bestimmung von X können die Spannkräfte S in den Stäben des Balkens ACB mittels der Formel

$$S = S_0 - S'X$$

gefunden werden, unter S' die Spannkraft für den in Fig. 130 dargestellten Belastungsfall $X = -1$ verstanden, und ganz ebenso erhält man die Stützenwiderstände: $A = A_0 - A' X'$, $B = B_0 - B' X'$.

Den Einfluss von Temperaturänderungen wird man stets gesondert bestimmen; man wird also die Verschiebung δ_0 des durch die Lasten P beanspruchten Balkens AB (Fig. 129) unter der Voraussetzung ermitteln, dass die Stäbe die Längenänderungen $\Delta s_0 = \frac{S_0 s}{EF}$ erfahren, und schliesslich wird man mit Hilfe eines dritten Verschiebungsplanes diejenige lothrechte Verrückung δ_t feststellen, welche der Punkt C des einfachen Balkens AB erfährt, sobald sich die Stablängen um $\Delta s_t = \varepsilon t s$ ändern. Der entsprechende Widerstand der Mittelstütze ist dann:

$$X_t = 1 \frac{\delta_t}{\delta'};$$

er erzeugt im Träger ACB (Fig. 128) die Spannkräfte: $S_t = - S' X_t$. Im Falle gleichmässiger Erwärmung sämmtlicher Stäbe ist $\delta_t = 0$, sobald die drei Punkte A, B, C in derselben Wagerechten liegen.

Unsere Aufgabe ist hiermit gelöst. Die Auflösung leidet aber noch an einer Weitläufigkeit, die darin besteht, dass δ_0 für jeden zu untersuchenden Belastungsfall von neuem bestimmt werden muss. Diese Schwierigkeit lässt sich nun durch Anwendung des Maxwell'schen Satzes leicht heben. Bezeichnet man nämlich mit δ'_m die dem Knoten m entsprechende Ordinate der in Fig. 130 für den Zustand $X = -1$ gezeichneten Biegungslinie, so darf man schliessen: Eine in C angreifende lothrechte Last *Eins* senkt den Punkt m um δ'_m, und es wird daher eine in m angreifende Last *Eins* den Punkt C ebenfalls um δ' senken

und eine Last P_m wird auf die Senkung δ_0 den Einfluss $\delta_0 = P_m \delta'_m$ ausüben. Daraus folgt aber

$$\delta_0 = P_1 \delta'_1 + P_2 \delta'_2 + \cdots + P_m \delta'_m + \cdots {}^{*)}$$

und es ist daher der Einfluss der Lasten P auf X

$$X = \frac{1}{\delta'} [P_1 \delta'_1 + P_2 \delta'_2 + \cdots + P_m \delta'_m + \cdots] = \frac{1}{\delta'} \Sigma P_m \delta'_m .$$

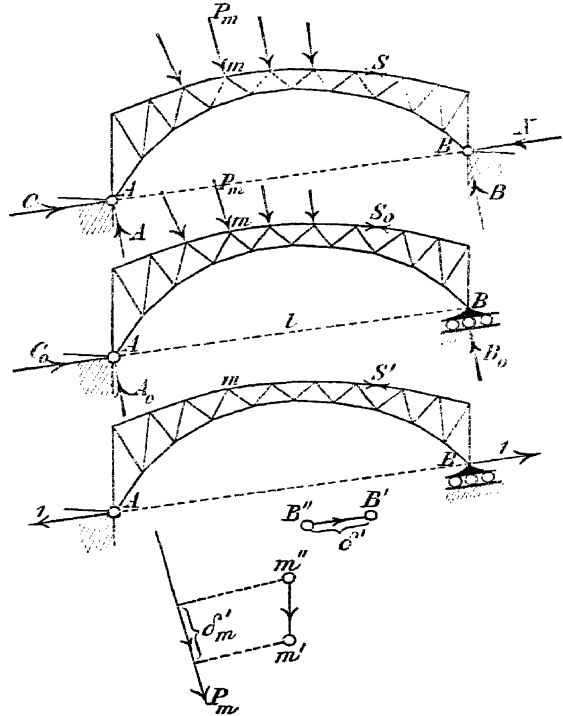
Man darf aussprechen:

Die für den Zustand $X = -1$ gezeichnete Biegungslinie der zur Aufnahme der Lasten bestimmten Gurtung ist die Einflusslinie für X. Der Multiplikator dieser Linie ist $= 1 : \delta'$.

57. Untersuchung eines Fachwerkbogens mit Kämpfergelenken und ohne Scheitelgelenk, Fig. 131. Der Träger sei durch beliebig gerichtete Lasten P beansprucht. Die an den festen Auflagergelenken A und B angreifenden Widerstände seien in die zur Geraden AB rechtwinkligen Seitenkräfte A und B und die in die Gerade AB fallenden Seitenkräfte C und X zerlegt.

Fig. 131—133.

Wird $X = 0$ angenommen, wird also das feste Auflagergelenk durch ein in der Richtung AB bewegliches Lager ersetzt, so geht das Fachwerk in ein statisch bestimmtes über (Fig. 132). Die Auflagerkräfte A_0, B_0, C_0 und die Spannkräfte S_0 lassen sich für diesen Zustand leicht angeben.

Um X zu ermitteln, wird das erhaltene statisch bestimmte Fachwerk mit einer Kraft $X = -1$ belastet (Fig. 133), welche die Spannkräfte S' und Aenderungen $(\Delta s)' = \dfrac{S' s}{EF}$ der Stablängen hervorruft; dann wird für diese Angriffsweise ein Verschiebungsplan gezeichnet.

*) Vergl. auch Seite 138.

Dieser Plan möge für den Punkt B die zu AB parallele Verschiebung $B''B' = \delta'$ liefern und für irgend einen Knotenpunkt m die Verschiebung $m''m'$. Bezeichnet δ'_m die Projektion der Strecke $m''m'$ auf die Richtung von P_m, so folgt:

Eine in B und im Sinne AB angreifende Kraft 1 verschiebt den Punkt m im Sinne von P_m um δ'_m, und es wird deshalb eine in m angreifende Last $P_m = 1$ eine Verlängerung der Stützweite $AB = l$ um δ'_m verursachen und eine Last P_m eine Verlängerung um $P_m \delta'_m$. Da nun eine von B nach A gerichtete Kraft X eine Verkürzung von AB um $X\delta'$ herbeiführt, so beträgt die Aenderung von l im ganzen:

$$\Delta l = \Sigma P_m \delta'_m - X\delta'.$$

Hieraus folgt aber für das Bogenfachwerk in Fig. 131 für den Fall unbeweglicher Widerlager (d. h. für $\Delta l = 0$):

$$X = \frac{\Sigma P_m \delta'_m}{\delta'}.$$

Geben die Widerlager nach und verschiebt sich hierbei B gegen A um δ_w, so ändert sich X um einen Werth ΔX, der durch die Gleichung

$$\delta_w = -\Delta X \delta'$$

gegeben ist. Den Einfluss X_t einer Temperaturänderung findet man, indem man die Aenderungen $\Delta s_t = \varepsilon t s$ der Stablängen berechnet, die hierdurch bedingte Vergrösserung δ_t der Strecke AB mit Hilfe eines Verschiebungsplanes bestimmt und die Bedingung $0 = \delta_t - X_t \delta'$ aufstellt. Es ergiebt sich:

$$\Delta X = -1 \frac{\delta_w}{\delta'} \text{ und } X_t = 1 \frac{\delta_t}{\delta'}.$$

Bei gleichmässiger Erwärmung ist $\delta_t = \varepsilon t l$.

Sobald X bekannt ist, können sämmtliche Spannkräfte S des Bogenfachwerks mittels der Formel

$$S = S_0 - S'X$$

berechnet werden. Für die Stützenwiderstände erhält man: $A = A_0$, $B = B_0$, $C = C_0 + X$.

58. Der Binder eines Freidaches (Fig. 134) sei bei B und C mittels fester Auflagergelenke und ausserdem noch durch eine Stange AD gestützt, welche bei D gelenkartig mit dem Widerlager verbunden ist.

Der Träger wird statisch bestimmt, sobald der Stab AC (dessen Spannkraft $= X$ sei) weggenommen wird. Für diesen Zustand $X = 0$ werden die Spannkräfte S_0 ermittelt und hierauf wird der Verschiebungsplan für den in Fig. 136 dargestellten Zustand $X = -1$, dem die

Spannkräfte S' entsprechen mögen, aufgezeichnet.*) Die Verschiebung von A sei dargestellt durch den Polstrahl OA', diejenige von m durch Om'. Die Projektion von OA' auf die Richtung von AD sei δ' (positiv im Sinne der in Fig. 136 angenommenen Kraft 1), diejenige von Om' auf P_m sei δ'_m (positiv im Sinne von P_m). Dann kann wie in der vorigen Aufgabe mittels des Maxwell'schen Satzes die Beziehung gefunden werden:

$$\Delta l = \Sigma P_m \delta'_m - X\delta'$$

wo l die Länge des Stabes AD bedeutet. Besitzt dieser Stab den Querschnitt F_1 und die Elasticitätsziffer E_1, so ist seine durch die Spannkraft X hervorgebrachte Längenänderung:

$$\Delta l = \frac{Xl}{E_1 F_1}$$

und man erhält schliesslich für X den Werth:

$$X = \frac{\Sigma P_m \delta'_m}{\delta' + \dfrac{l}{E_1 F_1}}.$$

Fig. 134—136.

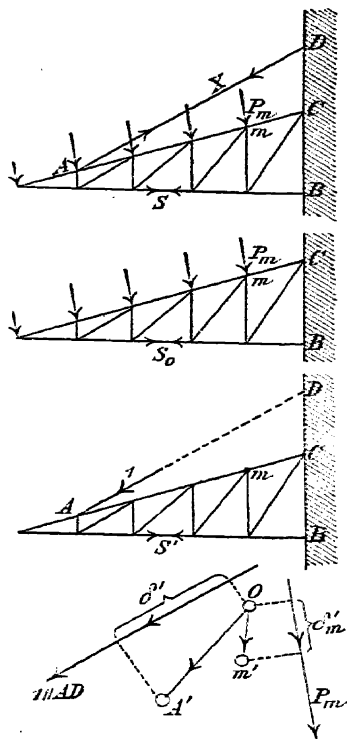
Wird noch der Einfluss einer Aenderung der Temperatur gesucht, so bestimmt man mit Hilfe eines zweiten Verschiebungsplanes die von den Aenderungen $\Delta s = \varepsilon ts$ herrührende gegenseitige Verschiebung δ_t des Punktpaares A, D und stellt die Bedingung auf:

$$\Delta l = \delta_t - X_t \delta'$$

in welche für Δl jetzt der Werth:

$$\Delta l = \frac{X_t l}{E_1 F_1} + \varepsilon_1 t_1 l$$

einzusetzen ist, unter ε_1 und t_1 die Ausdehnungsziffer und die Temperaturänderung des Stabes AD verstanden. Man findet:

$$X_t = \frac{\delta_t - \varepsilon_1 t_1 l}{\delta' + \dfrac{l}{E_1 F_1}}.$$

*) Beispielsweise nach dem in No. 32 angegebenen Verfahren.

59. Untersuchung des in Fig. 137 dargestellten Dachstuhls einer dreischiffigen Halle. Bei A ist ein festes, bei B ein auf wagerechter Bahn bewegliches Auflagergelenk angeordnet. CD und EF sind Säulen mit Kopf- und Fussgelenken (sogenannte Pendelsäulen oder Schwingstützen). Die lothrecht wirkenden Widerstände X_a und X_b der Säulen sollen als die statisch nicht bestimmbaren Grössen eingeführt werden; ihre Angriffspunkte erhalten die Ordnungsbuchstaben a und b.*)

Den Zustand $X_a = 0$, $X_b = 0$ (den wir kurz den Zustand $X = 0$ nennen wollen) zeigt Fig. 138; die Zustände $X_a = -1$ und $X_b = -1$ sind in den Figuren 139 und 140 dargestellt worden. In allen drei Fällen handelt es sich um die Untersuchung eines einfachen Fachwerkbalkens AB; die Stützenwiderstände und die Spannkräfte (S_0, S_a, S_b) lassen sich also leicht ermitteln. Ist dies geschehen, so werden die von den Spannkräften S_a und S_b sowie von Temperaturänderungen t hervorgerufenen Längenänderungen

$$\Delta s_a = \frac{S_a s}{EF}, \quad \Delta s_b = \frac{S_b s}{EF}, \quad \Delta s_t = \varepsilon t s$$

berechnet und die durch diese Δs verursachten Verschiebungen der Knotenpunkte ermittelt.

Der erste dieser Pläne liefert:

δ_{ma} = Verschiebung von m im Sinne von P_m**) in Folge $X_a = -1$
δ_{aa} = ,, ,, a ,, ,, ,, $X_a = -1$†) ,, $X_a = -1$
δ_{ba} = ,, ,, b ,, ,, ,, $X_b = -1$,, $X_a = -1$.

Der zweite Plan liefert:

δ_{mb} = Verschiebung von m im Sinne von P_m in Folge $X_b = -1$
δ_{ab} = ,, ,, a ,, ,, ,, $X_a = -1$,, $X_b = -1$
δ_{bb} = ,, ,, b ,, ,, ,, $X_b = -1$,, $X_b = -1$;

der dritte Plan endlich:

δ_{mt} = Verschiebung von m im Sinne von P_m in Folge der t
δ_{at} = ,, ,, a ,, ,, ,, $X_a = -1$,, t
δ_{bt} = ,, ,, b ,, ,, ,, $X_b = -1$,, t.

(Nach dem Maxwell'schen Satze muss sich $\delta_{ab} = \delta_{ba}$ herausstellen, eine Bedingung, die zur Prüfung der Zuverlässigkeit der Zeichnung benutzt werden kann.)

---

*) Wir wählen jetzt dieselben Bezeichnungen wie in der Einleitung.

**) Abgekürzte Ausdrucksweise an Stelle von: δ_{ma} = Projektion der Verschiebung von m auf die Richtung von P_m, positiv im Sinne von P_m. Zu beachten ist, dass der zweite Buchstabe des an δ gesetzten Doppelzeigers stets auf die Ursache der Verschiebung hinweisen soll und mit dem Zeiger der Belastung X übereinstimmt.

†) Diese Verschiebung wird also positiv gezählt im Sinne der in a (Fig. 139) angenommenen Last 1.

Die Gleichungen zur Berechnung der X ergeben sich nun wie folgt.

Die auf das Fachwerk AB wirkenden Belastungen P_m, X_a, X_b werden im Verein mit Temperaturänderungen t und etwaigen anderen Ursachen (z. B. Bewegungen der Widerlager A und B) die Punkte a und b im Sinne $X_a = -1$ und $X_b = -1$ um Strecken δ_a und δ_b verschieben, welche geradlinige Funktionen der P, X_a, X_b, t sind*) und sich auf die Form bringen lassen:

$$\delta_a = \Sigma P_m \delta_{am} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} + \delta_{at} + \delta_{aw},$$
$$\delta_b = \Sigma P_m \delta_{bm} - X_a \delta_{ba} - X_b \delta_{bb} + \delta_{bt} + \delta_{bw},$$

wobei die Grössen δ_{aw} und δ_{bw} den Einfluss jener „anderen Ursachen" zum Ausdruck bringen. Die Coefficienten der X sind bereits vorhin erklärt worden (δ_{aa} ist z. B. der Werth, den δ_a annimmt, wenn nur

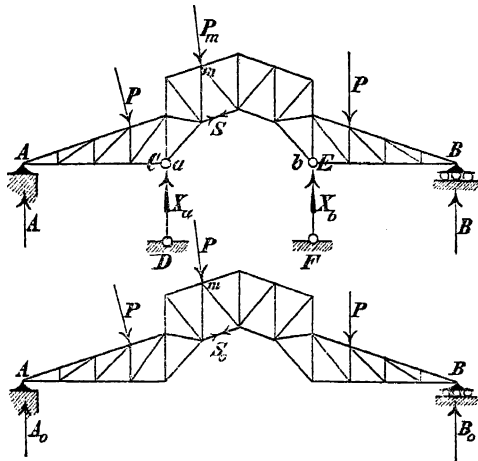
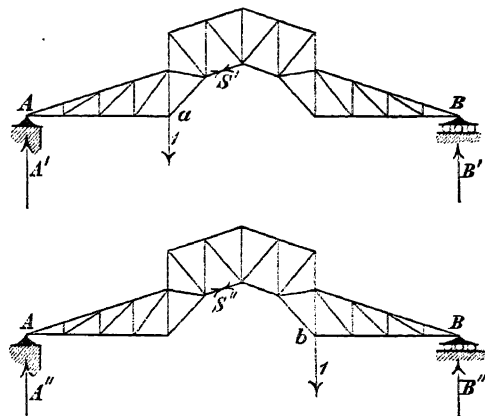



Fig. 137 u. 138. Fig. 139 u. 140.

die Ursache $X_a = -1$ wirkt) und ganz ebenso lassen sich die δ_{am} und δ_{bm} deuten, welche bezw. den Einfluss von $P_m = 1$ auf δ_a und δ_b darstellen.

Nun ist aber nach dem Maxwell'schen Satze die Verschiebung δ_{am}, welche a im Sinne $X_a = -1$ und in Folge der Last $P_m = 1$ erfährt, ebenso gross wie die Verschiebung δ_{ma} von m im Sinne von P_m, hervorgerufen durch $X_a = -1$, und in gleicher Weise ergiebt sich $\delta_{bm} = \delta_{mb}$, so dass obige Gleichungen übergehen in

$$\delta_a = \Sigma P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} + \delta_{at} + \delta_{aw}$$
$$\delta_b = \Sigma P_m \delta_{mb} - X_a \delta_{ba} - X_b \delta_{bb} + \delta_{bt} + \delta_{bw}.$$

*) Diese Eigenschaft ist in der Einleitung erörtert worden; sie folgt aber auch ohne weiteres aus den Untersuchungen in den §§ 1—3; denn zwischen den auf feste Richtungen projicirten Verschiebungen δ und Δs bestehen nur Beziehungen ersten Grades, ebenso zwischen den Δs und den Lasten.

Die auf der rechten Seite stehenden δ sind mit Ausnahme der δ_{aw} und δ_{bw} durch die vorhin angeführten drei Verschiebungspläne bereits bestimmt; für δ_a und δ_b sind die lothrechten Verschiebungen der Stützpunkte a und b einzuführen.

Setzen wir bei A und B starre Widerlager voraus, nehmen wir ferner an, dass weitere Ursachen, welche „Störungsglieder" δ_{aw}, δ_{bw} erzeugen, nicht vorhanden sind, so ist $\delta_{aw} = 0$, $\delta_{bw} = 0$. Vernachlässigen wir noch die Zusammendrückung der Grundpfeiler der Säulen und des Baugrundes, so ist δ_a gleich der Verkürzung der durch X_a auf Druck beanspruchten Säule CD, vermindert um die Verlängerung, welche diese Säule in Folge der Temperaturerhöhung erfährt.*)

Es ergiebt sich:

$$\delta_a = \frac{X_a h_a}{E_a F_a} - \varepsilon_a t_a h_a,$$

worin E_a, F_a, t_a, ε_a, h_a bezieh. die Elasticitätsziffer, den Querschnitt, die Temperaturerhöhung, die Ausdehnungsziffer für $t = 1°$ und die Länge der Säule CD bedeuten; und ebenso folgt:

$$\delta_b = \frac{X_b h_b}{E_b F_b} - \varepsilon_b t_b h_b.$$

Jetzt können die Grössen X_a, X_b aus den beiden für δ_a und δ_b abgeleiteten Gleichungen berechnet und hierauf die Spannkräfte:

$$S = S_0 - S_a X_a - S_b X_b$$

bestimmt werden.

60. Uebungsaufgaben. Der im vorstehenden Beispiele eingeschlagene Weg führt bei jedem statisch unbestimmten Fachwerke, welches sich durch Beseitigung von überzähligen Stäben und Auflagerbedingungen in ein statisch bestimmtes verwandeln lässt, zum Ziele. Treten mehrere statisch nicht bestimmbare Grössen X_a, X_b, X_c, . . . auf, so erhält man:

---

*) Es ist streng darauf zu achten, dass bei der Untersuchung des Einflusses der Bewegungen der Stützen auf die Glieder δ_{aw} und δ_{bw} nur die Widerlager des statisch bestimmten Trägers (hier der einfache Balken AB) in Betracht kommen; die X_a und X_b sind gewissermaassen Lasten, welche ausser den P auf diesen statisch bestimmten Träger wirken. Die Bewegungen der überzähligen Stützpunkte (C und D) werden bei Aufstellung der Bedingungen berücksichtigt, denen die Verschiebungen δ_a und δ_b schliesslich unterworfen werden. Als weitere Ursachen von Störungsgliedern δ_{aw} und δ_{bw} kommen in Wirklichkeit nur noch künstliche Anspannungen und unrichtige Ablängungen von Stäben in Betracht; diese lassen sich aber nach Seite 36 bei Wahl der Temperaturen t berücksichtigen. In der Regel werden die Glieder δ_{aw} und δ_{bw} gestrichen, da sie sich schwierig schätzen lassen. Vergl. auch Seite 22 den letzten Absatz.

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} \delta_a = \Sigma P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} - X_c \delta_{ac} - \dots + \delta_{at} + \delta_{aw} \\ \delta_b = \Sigma P_m \delta_{mb} - X_a \delta_{ba} - X_b \delta_{bb} - X_c \delta_{bc} - \dots + \delta_{bt} + \delta_{bw} \\ \delta_c = \Sigma P_m \delta_{mc} - X_a \delta_{ca} - X_b \delta_{cb} - X_c \delta_{cc} - \dots + \delta_{ct} + \delta_{cw} \\ \dots \end{cases}$$

Die als Coefficienten der P und X auftretenden δ sind bestimmt, sobald die den Belastungszuständen $X_a = -1$, $X_b = -1$, $X_c = -1 \dots$ entsprechenden Verschiebungen der Knotenpunkte ermittelt worden sind.

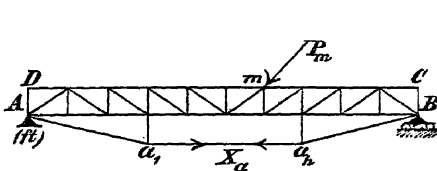
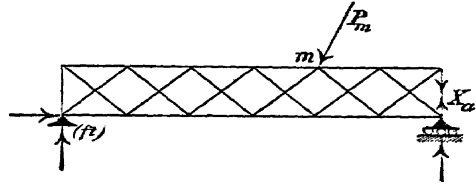



Fig. 141. Fig. 142.

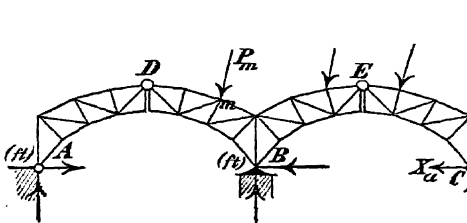



Fig. 143. Fig. 144.

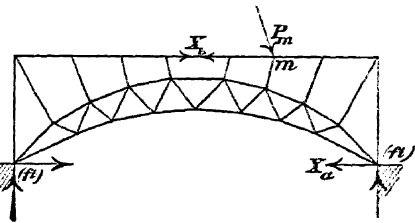
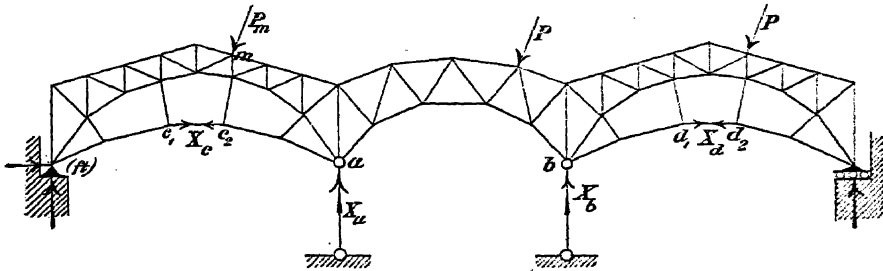



Fig. 145.

Die δ_{aw}, δ_{bw}, $\delta_{cw} \dots$ werden in der Regel $= 0$ gesetzt. Will man sie berücksichtigen, so beachte man, dass (nach Seite 35) $\delta_{aw} = -L_a$, $\delta_{bw} = -L_b, \dots$ ist, wobei L_a die virtuelle Arbeit der Stützenwiderstände des statisch bestimmten Hauptnetzes für den Belastungszustand $X_a = -1$ ist, L_b für den Zustand $X_b = -1$, u. s. w. Die δ_a, δ_b, $\delta_c \dots$ werden schliesslich gewissen Bedingungen unterworfen und hierauf werden die Gleichungen (I) aufgelöst. *Dem Leser wird empfohlen, an dieser Stelle das in der Einleitung vorgeführte Beispiel noch einmal an der*

Hand des Maxwell'schen Satzes durchzugehen und dann die in den Figuren 141 bis 145 abgebildeten Fachwerke in derselben Weise zu behandeln. Welche Grössen als statisch nicht bestimmbar einzuführen sind, ist in den Figuren angegeben worden. Feste Auflagergelenke sind mit (ft) bezeichnet.

61. Ueber die Wahl der Grössen X. In der Regel wird es nicht schwer fallen, diejenigen Spannkräfte und Stützenwiderstände eines statisch unbestimmten Fachwerks herauszufinden, welche zweckmässig zu den mit Hilfe von Elasticitätsgleichungen zu bestimmenden Grössen X gewählt werden. Vor allem wird man danach streben, dass das statisch bestimmte Fachwerk, welches durch Beseitigung der als überzählig bezeichneten Stäbe und Auflagerbedingungen gewonnen wird, möglichst einfach ist. So leuchtet z. B. ohne weiteres ein, dass die in No. 57 durchgeführte Verwandlung des Bogens mit zwei festen Gelenken in ein Fachwerk mit einem festen und einem beweglichen Gelenke zweckmässiger ist, als die Verwandlung in einen Bogenträger mit drei Gelenken, zu welcher man durch Wegnahme eines Gurtstabes gelangt wäre; denn die Darstellung der Formänderung ist für diesen Bogenträger etwas umständlicher als für das Fachwerk in Fig. 132.

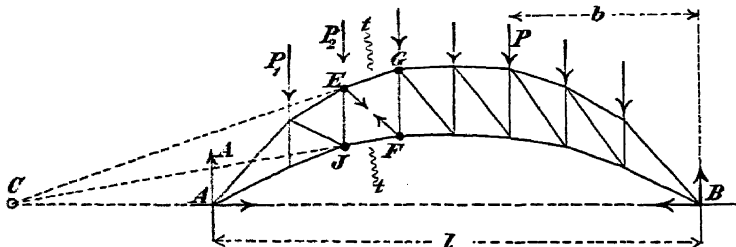



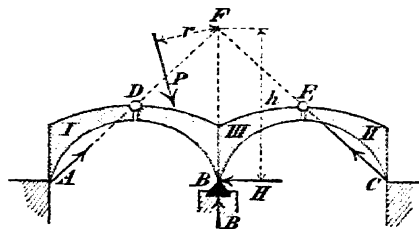
Fig. 146.

Sodann ist hervorzuheben, dass nicht jeder Stab und jede Auflagerbedingung eines statisch unbestimmten Fachwerks als überzählig bezeichnet werden dürfen. Wollte man z. B. bei dem in Fig. 146 abgebildeten sichelförmigen Bogenträger, dessen Gurtstäbe EG und JF sich in einem Punkte C der Geraden AB schneiden, die Spannkraft des Schrägstabes EF zur Grösse X wählen, so würde man mit $X = 0$ einen Bogenträger mit einem gedachten Mittelgelenke C (vergl. Bd. I, S. 200) erhalten, der zwar im Allgemeinen steif, im vorliegenden Sonderfalle aber von unendlich kleiner Beweglichkeit wäre, da die drei Gelenke A, C, B in dieselbe Gerade fallen. Dass EF ein nothwendiger Stab ist, mithin nicht entfernt werden darf, erkennt man auch, wenn man die Spannkraft D des Stabes EF mittels des Ritter'schen Ver-

fahrens berechnet, d. h. die Summe der auf den Drehpunkt C bezogenen Momente der am Trägertheile links vom Schnitte tt angreifenden Kräfte $= 0$ setzt. In dieser Gleichung kommen ausser D nur noch die Lasten P_1, P_2 und der Stützenwiderstand A vor, und für den letzteren findet man aus der Momentengleichung für den Punkt B den Werth $A = \frac{\Sigma Pb}{l}$, so dass für D ein nur von den Kräften P abhängiger Ausdruck erhalten wird, der nur bei ganz bestimmter Lastvertheilung verschwindet.

Ein besonders lehrreiches Beispiel bietet der Träger in Figur 147 *), welcher drei feste Auflagergelenke A, B, C und zwei Mittelgelenke D und E besitzt und einfach statisch unbestimmt ist. Er sei so geformt, dass sich die Geraden AD und CE in einem Punkte F der Senkrechten durch B schneiden.

Fig. 147.

Sind die Scheiben I und II unbelastet, so gehen die Widerstände der Stützen A und C beziehungsweise durch die Gelenke D und E. Zerlegt man nun den Widerstand der Mittelstütze in die senkrechte Seitenkraft B und in die wagerechte H, und belastet die Scheibe III mit einer Kraft P, so erhält man (mit den in die Figur eingetragenen Hebelarmen h und r) die Gleichgewichtsbedingung

$$Hh = Pr$$

und erkennt, dass H im allgemeinen nicht $= 0$ gesetzt werden darf; und in der That führt die Beseitigung der wagerechten Stützung des Punktes B zu einem Fachwerke, welches zwar die erforderliche Anzahl von Stäben und Auflagerbedingungen besitzt, trotzdem aber verschieblich ist, wie am sichersten und einfachsten mit Hilfe der im Band I, § 31, eingeführten Figur F' nachgewiesen werden kann. Zu diesem Zwecke ersetzen wir zunächst die steifen Scheiben I, II und III, deren Gestalt für die anzustellende Untersuchung gleichgiltig ist, durch einfacher geformte, nämlich I und II durch je einen Stab und III durch ein Dreieck (Fig. 148); sodann verbinden wir jedes feste Auflagergelenk durch *zwei* Stäbe und das bewegliche Auflagergelenk durch *einen* in die Richtung des Stützenwiderstandes B fallenden Stab mit dem die Gesammtheit der Widerlager vorstellenden Dreiecke HJK und erhalten auf diese Weise ein sehr leicht zu übersehendes Fachwerk. Dass sich

*) Vergl. auch Fig. 143, Seite 149.

nun für dieses Stabgebilde eine Figur (F') zeichnen lässt, welche der Fachwerksfigur (F) unähnlich ist, lehrt ein Blick auf die Abbildung 148*); und damit ist bewiesen, dass jenes Fachwerk beweglich ist. Die Beweglichkeit ist allerdings — starre Stäbe vorausgesetzt — eine unendlich kleine, der Träger ist aber in Folge dessen unbrauchbar.

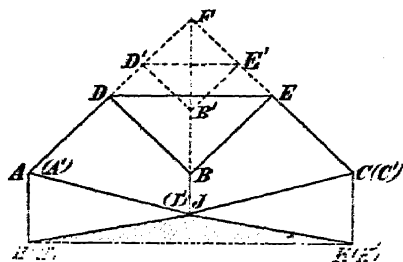
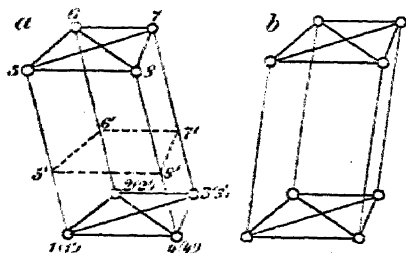
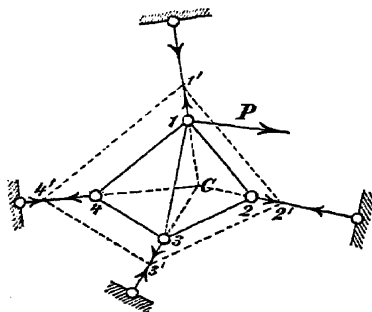



Fig. 148.

Es möge schliesslich noch darauf hingewiesen werden, dass im allgemeinen ein statisch unbestimmtes Fachwerk mit Hilfe der Figur F' auf Beweglichkeit untersucht werden muss, noch ehe auf die Frage, welche Grössen mit X zu bezeichnen sind, eingegangen wird; denn es kann vorkommen, dass die Beweglichkeit nicht erst durch Beseitigung von Stäben oder Auflagerkräften herbeigeführt wird, sondern schon vorher besteht. Beispiele hierfür bieten die Figuren 149 und 150. Ersteres stellt ein ebenes Stabgebilde von endlicher Beweglichkeit vor, was leicht zu erkennen ist, weil das Gebilde aus der Form a in die Form b gebracht werden kann, und letztere zeigt ein ebenes

Fig. 149.

Fig. 150.

Fachwerk, welches selbst dann von unendlich kleiner Beweglichkeit sein würde, wenn sämmtliche Stäbe starr wären; denn die Scheibe 1—2—3—4 kann sich so lange um den Punkt C, in welchem die Achsen der an der Scheibe angreifenden Stäbe zusammentreffen, drehen, bis jene Achsen nicht mehr durch einen Punkt gehen, was nach einer unendlich kleinen Drehung der Scheibe der Fall sein wird. Bezüg-

*) Die Punkte A', C', H', J', K' wurden beziehw. mit A, C, H, J, K zusammenfallend angenommen.

lich der Stabgebilde von unendlich kleiner Beweglichkeit verweisen wir noch auf die in der Einleitung, Seite 37, angestellten Betrachtungen. Dort wurde gezeigt, dass bei solchen Fachwerken die Vernachlässigung der Längenänderungen der Stäbe nicht erlaubt ist, auch hervorgehoben, dass derartige Stabwerke als Träger ungeeignet sind.

b. Vereinfachung der mittels des Maxwell'schen Satzes abgeleiteten Elasticitätsgleichungen.

62. Allgemeines. Die Elasticitätsbedingungen I auf Seite 149 (s. auch Seite 35, Gleich. 35) lassen sich stets so umformen, dass in jeder Bedingung nur eine Unbekannte X vorkommt, welche dann ohne weiteres aus dieser Gleichung berechnet werden kann. Um dies zu erreichen, muss man die statisch nicht bestimmbaren Grössen so wählen, dass alle diejenigen Coefficienten δ der X verschwinden, welche einen aus zwei verschiedenen Buchstaben gebildeten Zeiger haben, nämlich: $\delta_{ab} = \delta_{ba}$, $\delta_{ac} = \delta_{ca}$, $\delta_{bc} = \delta_{cb}$, u. s. f.

Es ergeben sich dann die einfachen Beziehungen:

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_a = \Sigma P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} + \delta_{at} + \delta_{aw} \\ \delta_b = \Sigma P_m \delta_{mb} - X_b \delta_{bb} + \delta_{bt} + \delta_{bw} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Diese Umformung bezweckt nicht allein die Umgehung der an und für sich einfachen Aufgabe, Gleichungen mit mehreren Unbekannten aufzulösen, sondern auch die Vermeidung gröberer Fehler, die bei Anwendung der Bedingungen (I) meistens unausbleiblich sind, sobald die Verschiebungen δ auf *zeichnerischem* Wege ermittelt werden. Liegt beispielsweise ein zweifach statisch unbestimmtes Fachwerk vor, für welches der Einfluss einer Einzellast P_m auf die Grössen X_a und X_b angegeben werden soll, so hat man (wenn $\delta_a = 0$ und $\delta_b = 0$ sind):

$$0 = P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab}$$
$$0 = P_m \delta_{mb} - X_a \delta_{ba} - X_b \delta_{bb}$$

und hieraus:

$$\frac{X_a}{P_m} = \frac{\delta_{ma}\delta_{bb} - \delta_{mb}\delta_{ab}}{\delta_{aa}\delta_{bb} - \delta_{ab}^2} \qquad \frac{X_b}{P_m} = \frac{\delta_{mb}\delta_{aa} - \delta_{ma}\delta_{ba}}{\delta_{aa}\delta_{bb} - \delta_{ab}^2}.$$

Man erhält also, falls die Glieder, aus denen die vorstehenden Brüche bestehen, positiv sind, die $X:P$ als Verhältnisse von Unterschieden und kann schon bei geringen Zeichenfehlern zu ganz unrichtigen Ergebnissen gelangen. Wurden z. B. für Zähler und Nenner von $X_a : P_m$ die Werthe $151{,}87 - 149{,}12 = 2{,}75$ und $223{,}81 - 220{,}58 = 3{,}23$

anstatt der genaueren: $151{,}58 - 149{,}34 = 2{,}24$ und $224{,}67 - 220{,}68 = 3{,}99$ erhalten, so findet man

$$\frac{X_a}{P_m} = \frac{2{,}75}{3{,}23} = 0{,}85 \text{ statt } \frac{X_a}{P_m} = \frac{2{,}24}{3{,}99} = 0{,}56,$$

bekommt also trotz den geringen Fehlern in den einzelnen Zahlen einen um 52 % zu grossen Werth $X_a : P_m$.

Nach den Erfahrungen des Verfassers empfiehlt sich die Anwendung der Gleichungen (I) bei mehrfach statisch unbestimmten Fachwerken nur dann, wenn die Verschiebungen δ durch Rechnung ermittelt werden und zwar auf mehrere Decimalstellen, die erst nach Bestimmung der X zum Theil abzuwerfen sind. Meistens kommen nur parallele Lasten in Betracht, in welchem Falle nur die Berechnung von Biegungslinien nach dem in No. 49 gelehrten Verfahren verlangt wird.

Entscheidet man sich aber für die Anwendung von Verschiebungsplänen, so forme man die Gleichungen (I) auf die im folgenden gelehrte Weise in (II) um. Dabei wird sich zeigen, dass diese Umwandlung bei Fachwerken von niedrigerem Grade statischer Unbestimmtheit (und diese kommen ja fast allein vor) sehr einfach ist. Je grösser die Anzahl der X, desto umständlicher wird es, die Gleichungen (II) herbeizuführen.

Vorausgeschickt werde noch, dass in den nachstehenden Untersuchungen die X entweder Einzelkräfte oder Momente von an starren Scheiben angreifenden Kräftepaaren bedeuten. Im ersten Falle bezeichnet das zugehörige δ eine Verschiebung, im zweiten einen (im Bogenmaass ausgedrückten) Drehungswinkel. Ist also z. B. X_a eine im Punkte a angreifende Einzelkraft, so bedeutet δ_a die Projektion der Verschiebung von a auf die Richtung X_a. Stellt X_a das Moment eines an einer starren Scheibe $[a]$ angreifenden Kräftepaares vor, so giebt δ_a den Winkel an, um den sich die Scheibe $[a]$ dreht. Die δ_a, δ_b, ... werden in entgegengesetztem Sinne positiv gezählt wie die zugehörigen Grössen X. Bezüglich der übrigen Bezeichnungen verweisen wir auf Seite 35 (vgl. auch No. 59). Greifen zwei Einzelkräfte X_r, X_s an demselben Punkte an, so wählen wir für diesen den Buchstaben r oder s, je nachdem wir den Punkt als den Angriffspunkt von X_r oder von X_s besonders ins Auge fassen.

Schliesslich machen wir darauf aufmerksam, dass in den folgenden Beispielen bei unverschieblichen Widerlagern mit den Grössen δ_{aw}, δ_{bw}, ... auch stets die δ_a, δ_b, ... verschwinden, so dass sich für den Einfluss der Lasten P auf die Grössen X die Formeln ergeben:

$$\text{(III)} \qquad X_a = \frac{\Sigma P_m \delta_{ma}}{\delta_{aa}}; \quad X_b = \frac{\Sigma P_m \delta_{mb}}{\delta_{bb}}; \; \ldots\,.$$

und für den Einfluss von Temperaturänderungen die Ausdrücke:

$$\text{(IV)} \qquad X_{at} = 1\,\frac{\delta_{at}}{\delta_{aa}}; \quad X_{bt} = 1\,\frac{\delta_{bt}}{\delta_{bb}}; \ldots .$$

63. Das zweifach statisch unbestimmte Fachwerk. Als statisch nicht bestimmbare Grössen lassen sich hier stets zwei in einem und demselben Punkte angreifende Einzelkräfte X_a und X_b einführen. Die Gleichungen II gelten, sobald $\delta_{ba} = \delta_{ab} = 0$ ist. Um dies zu erreichen, nehme man die Richtung von X_a willkürlich an, bestimme die Verschiebung aa_1, welche a in Folge des Belastungszustandes $X_a = -1$ erleidet, und nehme X_b rechtwinklig zu aa_1 an. Dann wird $\delta_{ba} = 0$, denn es bedeutet δ_{ba} die Verschiebung, welche b in der Richtung X_b erfährt, wenn nur die Ursache $X_a = -1$ wirkt. Trägt man nun den Verschiebungsplan für den Zustand $X_b = -1$ auf, so muss sich bei sorgfältiger Zeichnung für den Punkt b eine zu X_a rechtwinklige Verschiebung bb_1 ergeben, denn sobald $\delta_{ba} = 0$ ist, muss auch $\delta_{ab} = 0$ sein, weil $\delta_{ba} = \delta_{ab}$ ist.

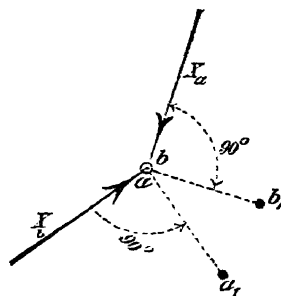



Fig. 151.

1. Beispiel. Der in Fig. 152 dargestellte, über drei Oeffnungen gespannte Bogenträger, welcher bei A und C feste, bei B ein bewegliches Auflagergelenk besitzt, ist zweifach statisch unbestimmt. Als Grössen X sollen die nach festen Richtungen wirkenden Seitenkräfte X_a und X_b des in A angreifenden Stützenwiderstandes eingeführt werden. Im Falle $X_a = 0$ u. $X_b = 0$ geht der Träger in einen statisch bestimmten Balken mit den Stützen B und C und einem auskragenden Arme BA über. Für diesen Balken wird nach willkürlicher Wahl der Richtung von X_a der dem Zustande $X_a = -1$ entsprechende Verschiebungsplan gezeichnet, welcher für a die Verschiebung aa_1 und für irgend einen Knoten m die Verschiebung mm_1 ergeben

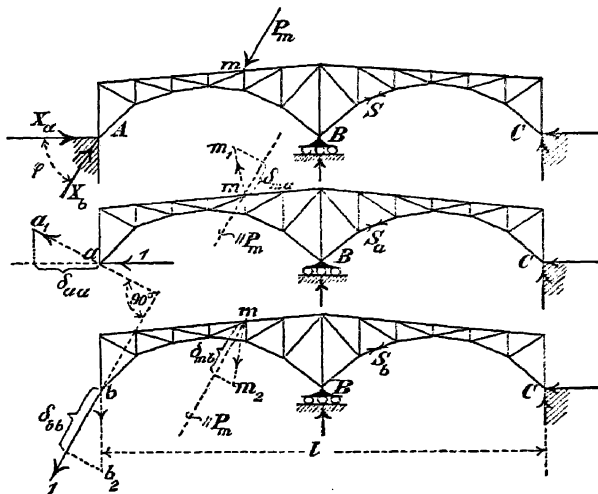



Fig. 152.

möge. Nun wird X_b rechtwinklig zu aa_1 angenommen und der Verschiebungsplan für $X_b = -1$ aufgetragen; derselbe liefert für den Punkt b eine zu X_a rechtwinklige Verschiebung bb_2 und für m die Verschiebung mm_2. Nach Bestimmung der in die Figur 152 eingetragenen Projektionen δ_{aa}, δ_{bb}, δ_{ma}, δ_{mb} (von denen δ_{ma} negativ ist), erhält man den Einfluss von P_m:

$$X_a = P_m \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}; \quad X_b = P_m \frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}}.$$

Wird sämmtlichen Stäben die gleiche Temperaturänderung t zugeschrieben, und liegen A, B, C in einer zur Bahn des Lagers B parallelen Geraden, so erfährt der Endpunkt A des Balkens ABC in Folge t eine wagerechte Verschiebung von der Grösse $\varepsilon t l$ (wo $l = \overline{AC}$), deren Projektionen auf die Richtungen von $X_a = -1$ und $X_b = -1$ beziehungsweise $\delta_{at} = \varepsilon t l$ und $\delta_{bt} = \varepsilon t l \cos \varphi$ sind (wo φ den Neigungswinkel von X_b gegen die Wagerechte bedeutet), und es ergiebt sich deshalb:

$$X_{at} = 1 \frac{\varepsilon t l}{\delta_{aa}}; \quad X_{bt} = 1 \frac{\varepsilon t l \cos \varphi}{\delta_{bb}}.$$

2. Beispiel. Der Fachwerkbogen in Fig. 153 ist bei A und B fest gelagert und besitzt einen überzähligen Stab CD; er ist also zweifach statisch unbestimmt. Wir verwandeln das feste Gelenk in ein bewegliches, denken uns aus dem Stabe CD ein Stück EF herausgeschnitten, führen die Punkte E und F in der Geraden CD, fügen die

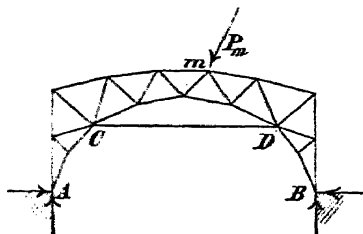
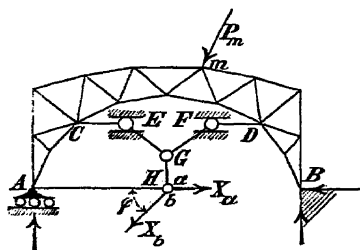



Fig. 153. Fig. 154.

starren Stäbe EG, FG, GH und AH hinzu und bringen in H zwei Kräfte X_a und X_b an, welche wir so bestimmen, dass die gegenseitige Verschiebung des Punktpaares CD ebenso gross wird, wie die Längenänderung des überzähligen Stabes, und dass ferner (unbewegliche Widerlager vorausgesetzt) die Verschiebung des Punktes A den Werth Null annimmt. Dann stimmen die Spannkräfte der Träger in den Figuren 153 und 154 miteinander überein. Die Spannkraft des Stabes AH giebt den wagerechten Widerstand des festen Auflagergelenks A an. Zu beachten ist,

dass $GH \perp CD$ und $\angle EGH = \angle FGH$ sein muss, damit sich für die Stäbe CE und FD gleich grosse Spannkräfte ergeben; auch empfiehlt es sich, den Stäben CE und FD Querschnitte F', F'' und Temperaturänderungen t', t'' zuschreiben, welche zur Folge haben, dass die Summe der Längenänderungen von CE und FD gleich der Längenänderung des überzähligen Stabes CD ist. Entsprechen dem letzteren daher die Werthe F, t und ist $\overline{CD} = s$, $\overline{CE} = s'$, $\overline{ED} = s''$, so muss sein:

$$\frac{s'}{F'} + \frac{s''}{F''} = \frac{s}{F} \text{ und } t's' + t''s'' = ts.$$

Es wird dann ausser der Verschiebung des Punktes A die gegenseitige Verschiebung des Punktpaares EF gleich Null gesetzt und hieraus $\delta_a = 0$, $\delta_b = 0$ gefolgert. Wählt man nun, nach willkürlicher Annahme der Richtung von X_a, die Kraft X_b rechtwinklig zu der Verschiebung, welche a in Folge von $X_a = -1$ erfährt, so gelten wie vorhin die Gleichungen:

$$X_a = P_m \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}; \quad X_b = P_m \frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}}.$$

Schreibt man sämmtlichen Stäben die gleiche Temperaturänderung t zu (mit Ausnahme der Stäbe CE und FD, für welche t' bezieh. t'' anzunehmen sind) so erhält man wie im vorigen Beispiele:

$$X_{at} = 1 \frac{\varepsilon t l}{\delta_{aa}}; \quad X_{bt} = -1 \frac{\varepsilon t l \cos \varphi}{\delta_{bb}}.$$

Das Minuszeichen ist erforderlich, weil X_b jetzt einen anderen Richtungspfeil besitzt.

3. Beispiel. Träger mit einem festen und drei beweglichen Auflagergelenken, Fig. 155. Das Verfahren ist in der Abbildung angegeben worden. Die Stäbe AE und CF sind rechtwinklig zu den Bahnen der Auflager A und C; ihre Endpunkte E und F werden in den Richtungen AE und CF geführt.

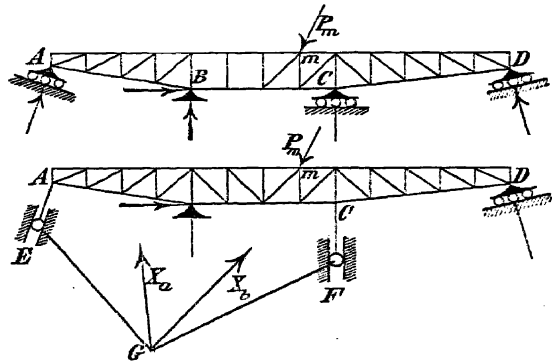
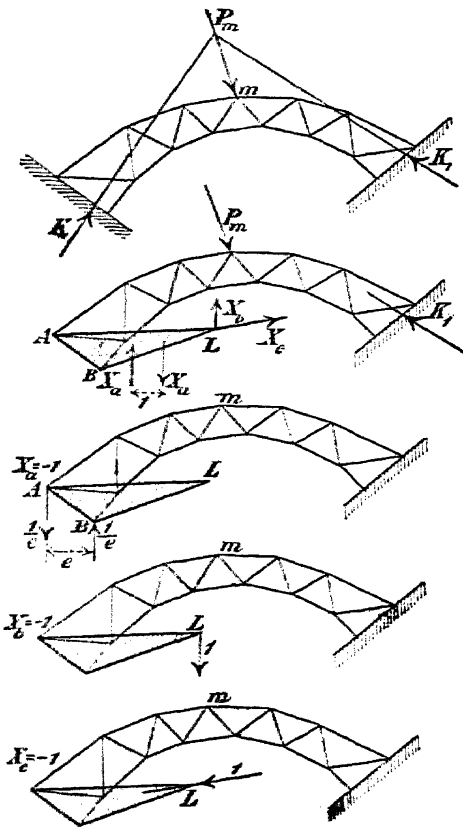



Fig. 155.

64. Das dreifach statisch unbestimmte Fachwerk. Man schliesse an das statisch bestimmte Fachwerk, in welches das unbestimmte in Folge Beseitigung der

überzähligen Stäbe und Auflagerbedingungen übergeht, auf irgend eine Weise eine starre Scheibe an und belaste diese mit einem Kräftepaare, dessen Moment $= X_a$ ist, ferner mit zwei in demselben Punkte (b, c) angreifenden Einzelkräften X_b und X_c. Hierauf nehme man die Werthe δ_a (Drehungswinkel der Scheibe), δ_b (Verschiebung von b im Sinne $X_b = -1$) und δ_c (Verschiebung von c im Sinne $X_c = -1$) so an, dass die an der Scheibe angreifenden Kräfte auf das statisch bestimmte Fachwerk genau dieselbe Wirkung ausüben, wie die beseitigten überzähligen Glieder. Wählt man nun den Pol, um den sich die Scheibe in Folge des Belastungsfalles $X_a = -1$ dreht, zum Angriffspunkte von X_b und X_c, so erzielt man, dass $\delta_{ba} = 0$ und $\delta_{ca} = 0$ wird, und es müssen sich dann bei sorgfältiger Zeichnung oder Rechnung die Drehungswinkel δ_{ab} und δ_{ac}, welche die Scheibe in Folge $X_b = -1$ und $X_c = -1$ erfährt, ebenfalls $= 0$ ergeben. Nimmt man schliesslich, bei willkürlich gewählter Richtung von X_b, die Richtung von X_c rechtwinklig zu der Verschiebung an, welche der Punkt (b, c) in Folge der Ursache $X_b = -1$ erfährt, so wird $\delta_{cb} = 0$ und damit auch $\delta_{bc} = 0$, und es gelten dann die Gleichungen II.

Fig. 156.

1. Beispiel. Liegt der in Fig. 156 dargestellte, in der Regel als *Fachwerkbogen mit eingespannten Enden* bezeichnete Träger vor, so ersetzt man das linke Widerlager durch die starre Scheibe ABL und den nach Lage und Grösse vorläufig unbekannten Kämpferdruck K durch ein Kräftepaar mit dem Momente X_a und durch zwei nach festen Richtungen wirkende Einzelkräfte X_b und X_c. Hierauf zeichnet man den Verschiebungsplan für den Belastungszustand $X_a = -1$, indem man in A und B zwei entgegengesetzt gleiche im Abstande e von einander wirkende, parallele Kräfte von der Grösse $\frac{1}{e}$

annimmt, bestimmt die Verschiebungen AA_1 und BB_1 von A und B und wählt hierauf den Angriffspunkt L von X_b und X_c so, dass $LA \perp AA_1$ und $LB \perp BB_1$ ist. Dann ist L der Drehpol der Scheibe für den Zustand $X_a = -1$; es ergiebt sich $\delta_{ba} = 0$, $\delta_{ca} = 0$ und in Folge dessen auch $\delta_{ab} = 0$, $\delta_{ac} = 0$.

Die Richtung von X_b wird willkürlich gewählt und die Richtung von X_c rechtwinklig zu der Verschiebung angenommen, welche L in Folge $X_b = -1$ erfährt, damit $\delta_{cb} = \delta_{bc} = 0$ werde. Schliesslich werden bei starren Widerlagern die Werthe δ_a, δ_b und $\delta_c = 0$ gesetzt und die Gleichungen (II) aufgelöst. Für den Einfluss von P_m gelten die Gleichungen III, für denjenigen von t die Gleichungen IV (S. 154 u. 155).

2. Beispiel. Soll der in Fig. 157 abgebildete, über 3 Oeffnungen gespannte Bogenträger mit den festen Auflagergelenken A, D und den beweglichen Auflagergelenken B, C untersucht werden, so ersetze man die Stützen A und C auf die in der Figur angegebene Weise durch eine starre Scheibe AF und einen zur Bahn des Auflagers C rechtwinkligen Stab CF, belaste die Scheibe mit einem Kräftepaare X_a und zwei in demselben Punkte L angreifenden Einzelkräften X_b, X_c und

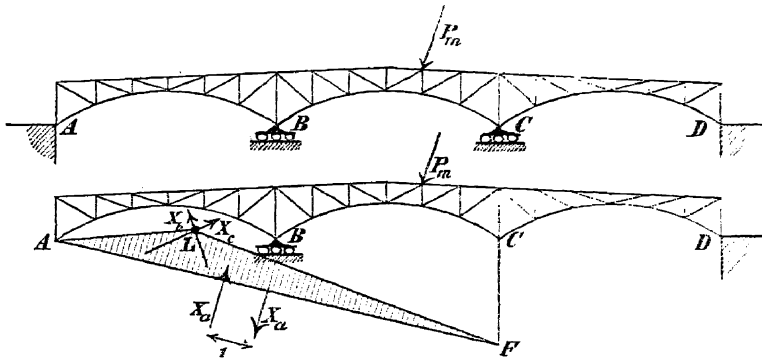



Fig. 157.

verfahre wie bei Lösung der vorigen Aufgabe. Behufs Bestimmung des Punktes L ermittele man für den Zustand $X_a = -1$ die Verschiebungen von A und C, hierauf die Verschiebung von F und trage AL und FL rechtwinklig zu den Bewegungsrichtungen der Punkte A bezieh. F ein. Bei starren Widerlagern sind δ_a, δ_b und δ_c gleich Null zu setzen.

65. Das vierfach statisch unbestimmte Fachwerk. Man lasse die Kräfte X_a, X_b, X_c, X_d auf eine aus zwei starren Scheiben I, II und zwei starren Stäben I', II' gebildete kinematische Kette (Fig. 158) wirken, welche mit dem statisch bestimmten Hauptsysteme so verbunden wird, dass sich die von den Ursachen $X_a = -1$, $X_b = -1$, $X_c = -1$,

$X_d = -1$ hervorgerufenen Spannkräfte S_a, S_b, S_c, S_d eindeutig und auf möglichst einfache Weise mittels der Gleichgewichtsbedingungen bestimmen lassen. Die Scheibe I belaste man hierbei mit den Einzelkräften X_a und X_b*), die Scheibe II mit den Einzelkräften X_c und X_d. Die ganze Anordnung wähle man so, dass man die Belastungszustände $X_a = -1$ und $X_b = -1$ vollständig erledigen kann, ohne die Lage der Scheibe II zu kennen.

Die Lage von X_a darf willkürlich angenommen werden; X_b muss durch den Pol I_a gehen, um den sich die Scheibe I in Folge der Belastung $X_a = -1$ dreht. Man erreicht dann: $\delta_{ba} = \delta_{ab} = 0$.

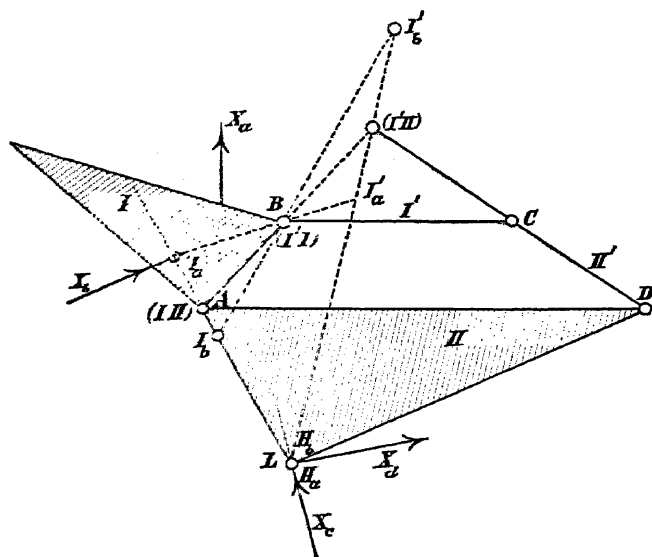



Fig. 158.

Nach Bestimmung der Verschiebungen in Folge der Ursache $X_b = -1$, welche für die Scheibe I den Pol I_b liefern möge, gebe man der Scheibe II eine solche Lage, dass die Pole II_a und II_b, um welche sich II bei Eintreten der Belastungszustände $X_a = -1$ und $X_b = -1$ dreht, zusammenfallen, und diesen gemeinschaftlichen (in der Fig. 158) mit L bezeichneten Pol wähle man zum Angriffspunkte der Kräfte X_c und X_d. Dann wird nämlich $\delta_{ca} = 0$, $\delta_{cb} = 0$, $\delta_{da} = 0$, $\delta_{db} = 0$ und in Folge dessen auch $\delta_{ac} = 0$, $\delta_{bc} = 0$, $\delta_{ad} = 0$, $\delta_{bd} = 0$. Schliesslich nehme man bei willkürlicher Wahl der Richtung von X_c die Kraft X_d rechtwinklig zu der Verschiebung an, welche Punkt L in Folge $X_c = -1$ erfährt, damit $\delta_{dc} = \delta_{cd} = 0$ werde. Die Gültigkeit der Elasticitätsgleichungen II ist hiermit erreicht.

Die Lage des Punktes L bestimmt man am schnellsten mit Hilfe des im I. Bande Seite 203, No. 136, abgeleiteten Satzes von den drei Polen. Die Pole $(I \cdot I')$ von I gegen I' und $(I' \cdot II)$ von I' gegen II

*) Die Kraft X_a darf auch durch ein Kräftepaar ersetzt werden.

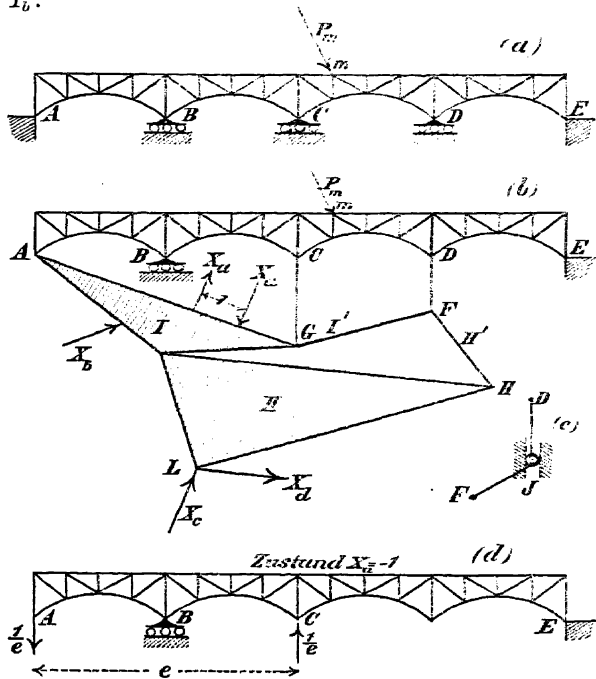
fallen mit Gelenk B bezieh. dem Schnittpunkte von AB und CD zusammen, Pol $(I \cdot II)$ mit A. Die durch I_a und $(I \cdot I')$, ferner durch I_b und $(I \cdot I')$ gelegten Geraden sind die Oerter der Pole I_a' und I_b', um welche sich I' in Folge von $X_a = -1$ bezw. $X_b = -1$ dreht, und welche mit $(I' \cdot II')$ in derselben Geraden liegen. Da nun weiter die 3 Pole $(I \cdot II)$, I_a, II_a in einer Geraden liegen müssen, desgleichen die Pole $(I \cdot II)$ I_b, II_b, so ergiebt sich die folgende Bestimmungsweise der gesuchten Kette.

Man nehme $(I \cdot II)$ in der Geraden $I_a - I_b$ an, wähle die Lage des Stabes BC nach Belieben, bestimme die Pole I_a' und I_b', um welche sich I' in Folge $X_a = -1$ und $X_b = -1$ dreht, bringe die Geraden $I_a' - I_b'$ und AB in $(I'\ II)$ zum Schnitt und stelle nun die (durch den Punkt $I' \cdot II$ gehende) Richtung des Stabes CD, dessen Länge willkürlich ist, fest. Schliesslich findet man L als Schnittpunkt der Geraden $I_a' - I_b'$ und $I_a - I_b$.

Beispiel. In Fig. 159 ist das beschriebene Verfahren auf einen über drei Oeffnungen gespannten Bogenträger mit den festen Gelenken A und E und den auf wagerechten Geraden beweglichen Gelenken B, C und D angewendet worden. Die Scheibe I wurde mit dem Kräftepaare X_a und der Einzelkraft X_b belastet. Die Einführung eines Kräftepaares X_a bietet den Vortheil, dass sich die Spannkräfte S_a und Längenänderungen Δs_a für den Zustand $X_a = -1$ angeben lassen, ohne dass über die Länge des Stabes CG etwas festgesetzt zu werden braucht, denn

Fig. 159.

wie lang auch CG gewählt wird, stets werden durch die Scheibe I in Folge $X_a = -1$ auf die Punkte A und C des statisch bestimmten Hauptsystems zwei entgegengesetzt gleiche lothrechte Kräfte $\frac{1}{e}$ über-

tragen, wobei e = dem wagerechten Abstande AC ist. Hat man nun für diesen Belastungszustand die Verschiebungen der Punkte A und C ermittelt, so kann man durch eine passende Wahl des Punktes G eine bequemere Lage des Poles erzielen, um den sich I dreht und durch den dann X_b gehen muss. Ist der Belastungsfall $X_a = -1$ erledigt, so untersucht man den Zustand $X_b = -1$. Hierbei braucht man die Lagen der Stäbe I' und II' noch nicht zu kennen und wird diese nachträglich so wählen, dass der Angriffspunkt L (d. i. der Pol II_a und zugleich der Pol II_b) günstig liegt, wobei zu beachten ist, dass man den Stab DF auch nach Fig. 159[c] durch zwei Stäbe DJ und FJ ersetzen darf, deren gemeinsames Gelenk J in lothrechter Richtung geführt wird. Bei starren Widerlagern wird schliesslich $\delta_a = 0$, $\delta_b = 0$, $\delta_c = 0$, $\delta_d = 0$ gesetzt.

66. Träger von höherem Grade statischer Unbestimmtheit. Ist die Anzahl der statisch nicht bestimmbaren Werthe X grösser als 4, so ist es möglich, das gesteckte Ziel durch wiederholte Lösung der in Fig. 158 behandelten Aufgabe zu erreichen: die Pole II_a und II_b miteinander zur Deckung zu bringen. Um dies an einem Beispiele zu zeigen, denken wir uns den Bogenträger in Fig. 159 rechts von E noch um mehrere Oeffnungen verlängert und nehmen an, dass über sämmtlichen Mittelstützen bewegliche Lager mit wagerechten Bahnen angeordnet sind, an beiden Enden hingegen feste Auflagergelenke. Die beweglichen Auflager seien beseitigt, an ihre Stelle mögen lothrechte Stäbe treten, an welche in gleicher Weise wie an die Stäbe CG und DF noch weitere starre Stäbe und Scheiben angereiht werden sollen. Ebenso wie nun die Scheibe II in Abb. 159 an den Stab DF und an die Scheibe I so angeschlossen wurde, dass sich II in Folge der beiden Belastungszustände $X_a = -1$ und $X_b = -1$ um denselben Pol L dreht, denken wir uns weitere Scheiben III, IV, V hinzugefügt, deren Anzahl mit derjenigen der rechts von E sich anreihenden Trägeröffnungen übereinstimmt, die sämmtlich mit I und mit je einem der von den beseitigten Stützpunkten ausgehenden lothrechten Stäben so verbunden sind, dass jeder Scheibe für die beiden Belastungszustände $X_a = -1$, $X_b = -1$ derselbe Drehpol entspricht, und zwar falle III_a mit III_b in M zusammen, IV_a mit IV_b in N usw. Es bleiben dann alle etwa noch an die Punkte L, M, N, . . . anzuschliessenden Stäbe und Scheiben bei Eintreten jener beiden Belastungszustände in Ruhe, und es folgt, wenn an diesen Gliedern Kräfte X_e, X_f, X_g, . . . angreifen: $\delta_{ea} = \delta_{ae} = 0$, $\delta_{fa} = \delta_{af} = 0$, . . . $\delta_{eb} = \delta_{be} = 0$, $\delta_{fb} = \delta_{bf} = 0$, . . . Gesetzt nun, es sei der Träger fünffach statisch unbestimmt, ein Fall, der vorliegt, wenn rechts von E in Fig. 159 noch eine Oeffnung hinzutritt. Dann kommen nur die Scheiben II und III in Betracht; man füge die in einem Gelenke T aneinander-

hängenden Glieder LT und TM hinzu, bestimme die Pole S_c und S_d, um welche sich die Scheibe $\mathsf{S} = TM$ in Folge von $X_c = -1$ bezieh. $X_d = -1$ dreht, und belaste S mit einer in die Gerade $\mathsf{S}_c\,\mathsf{S}_d$ fallenden Einzelkraft X_e. Dann ergiebt sich $\delta_{ec} = \delta_{ce} = 0$ und $\delta_{ed} = \delta_{de} = 0$, und es gelten die Gleichungen (5), weil sämmtliche δ, die in den Gleichungen 4 in Verbindung mit den X auftreten und deren Zeiger aus zwei ungleichen Buchstaben bestehen, verschwinden.

Wäre der Träger sechsfach statisch unbestimmt, so würde man an die Scheiben II, III, IV eine Scheibe S' auf irgend eine Weise so anzuschliessen haben, dass die Drehpole S'_c und S'_d sich decken, und hierauf würde man diesen gemeinschaftlichen Pol zum Angriffspunkte von zwei Einzelkräften X_e und X_f wählen, wobei die Richtung von X_f rechtwinklig zu der Richtung der Verschiebung sein muss, welche der Angriffspunkt dieser Kraft in Folge $X_e = -1$ erfährt. Die Möglichkeit nun, im Falle noch höheren Grades statischer Unbestimmtheit weitere Scheiben S'', S''', ... so anzureihen, dass S''_c mit S''_d zusammenfällt, S'''_c mit S'''_d usw., bildet die Handhabe zur planmässigen Ausbildung unseres Verfahrens; denn alle an die gemeinschaftlichen Pole angeschlossenen folgenden Stäbe und Scheiben bleiben nicht nur beim Eintreten der Zustände $X_a = -1$, $X_b = -1$, sondern auch in den Belastungsfällen $X_c = -1$ und $X_d = -1$ in Ruhe.

Der Verfasser hält übrigens bei in höherem Grade statisch unbestimmten Fachwerken die in No. 67 bis 70 durch Aufgaben erläuterte Berechnungsweise für unbedingt zweckmässiger, und hat sich aus diesem Grunde auch damit begnügt, von den verschiedenen möglichen Verfahren, die Gültigkeit der Gleichungen II auf Grund kinematischer Untersuchungen herbeizuführen, nur das eine anzugeben.

c. Anwendung der Elasticitätsgleichungen:

$$
(\mathrm{V})\begin{cases}
X'\Sigma S'^2\rho + X''\Sigma S'S''\rho + X'''\Sigma S'S'''\rho + \ldots = \Sigma P_m\delta_m' + \Sigma S'\,\varepsilon ts - L' \\
X'\Sigma S''S'\rho + X''\Sigma S''^2\rho + X'''\Sigma S''S'''\rho + \ldots = \Sigma P_m\delta_m'' + \Sigma S''\,\varepsilon ts - L'' \\
X'\Sigma S'''S'\rho + X''\Sigma S'''S''\rho + X'''\Sigma S'''^2\rho + \ldots = \Sigma P_m\delta_m''' + \Sigma S'''\,\varepsilon ts - L''' \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases}
$$

welche voraussetzen, dass sämmtliche Spannkräfte S und (nach festen Richtungen wirkenden) Stützenwiderstände C des statisch unbestimmten Fachwerks auf die Form gebracht worden sind:

$$S = S_0 - S'X' - S''X'' - S'''X''' - \ldots$$
$$C = C_0 - C'X' - C''X'' - C'''X''' - \ldots$$

wobei X', X'', X''' ... die statisch nicht bestimmbaren Grössen bedeuten.*)

---

*) Vergl. Seite 25 bis 27.

δ_m', δ_m'', ... sind die Verschiebungen, welche der Angriffspunkt m einer Last P_m erfährt, sobald auf das Fachwerk beziehungsweise nur die Ursache $X' = -1$ oder nur die Ursache $X'' = -1$ u. s. w. wirkt, während L', L'', ... die virtuellen Arbeiten der Stützenwiderstände C', C'' ... bedeuten. Alle in den obigen Gleichungen enthaltenen, von den S', S'', S''' ... abhängigen Summenausdrücke erstrecken sich über sämmtliche Stäbe des Fachwerks, über die nothwendigen *und* überzähligen. Der Werth ρ ist

$$\rho = \frac{s}{EF}.$$

Meistens werden die Widerlager starr angenommen und die virtuellen Arbeiten $L = 0$ gesetzt.

Die Anwendung der vorstehenden Gleichungen ist namentlich dann zu empfehlen, wenn die Werthe X', X'' ... durch Rechnung bestimmt werden sollen, was (wie schon auf Seite 153 hervorgehoben wurde) im allgemeinen geboten ist, sobald nicht jede Grösse X mittels einer einzigen Gleichung gefunden werden kann. In der Regel hat man es mit lothrechten Lasten zu thun; die δ_m', δ_m'', δ_m''', ... sind dann Ordinaten von *Biegungslinien*, deren Berechnung sich (nach No. 49) stets auf die Ermittelung von Angriffsmomenten einfacher Balken zurückführen lässt. Aber auch der Einfluss schräg gerichteter, nicht paralleler Kräfte P kann auf dem am Schluss von No. 51 angegebenen Wege leicht durch Rechnung erledigt werden, nachdem die den Zuständen $X' = -1$, $X'' = -1$, ... entsprechenden Biegungslinien für irgend eine Verschiebungsrichtung bestimmt worden sind. Wenn wir also in den folgenden Beispielen durchweg lothrechte Lasten annehmen, so geschieht dies nur der kürzeren Darstellungsweise wegen. Vergl. auch No. 75.

67. Untersuchung eines über drei Oeffnungen gespannten Bogenträgers, Fig. 160, mit Scheitelgelenken in den Seitenöffnungen, festen Kämpfergelenken und wagerechten Gleitlagern über den Mittelpfeilern.

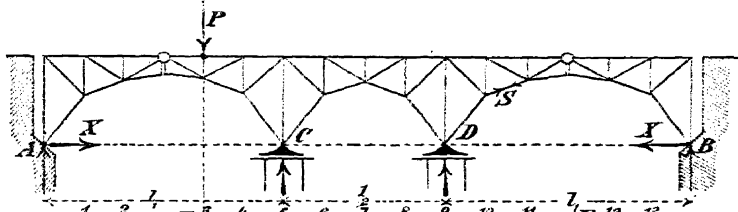
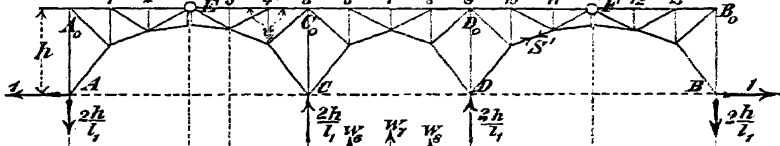
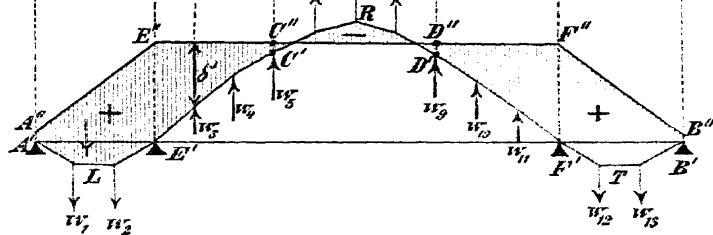
Der Träger ist einfach statisch unbestimmt; als statisch nicht bestimmbare Grösse wird zweckmässig der Horizontalschub X eingeführt. Die Spannkräfte S sollen in der Form

$$S = S_0 - S'X$$

dargestellt werden. Wird $X = 0$ gesetzt, so geht der Bogen in einen *Gerber*'schen Balken über, dessen Spannkräfte S_0 sich leicht bestimmen lassen. S' bedeutet den Werth, welchen S annimmt, sobald $X = -1$ gemacht wird. Diesen Belastungszustand zeigt Fig. 161. In A und B greifen die wagerechten, nach aussen gerichteten Kräfte 1 an; ausserdem müssen — damit sich die Bogentheile AE und BF nicht um die

Gelenke E und F drehen — die lothrechten, nach unten gerichteten Kräfte $\frac{2h}{l_1}$ angebracht werden. Letztere bedingen bei C und D gleich grosse, nach oben wirkende Widerstände.

Nachdem die Spannkräfte S' für sämmtliche Stäbe bestimmt worden sind (beispielsweise mit Hilfe eines Cremona'schen Kräfteplanes), kann X mit Hilfe der Elasticitätsbedingung

$$X \Sigma S'^2 \rho = \Sigma P_m \delta_m' + \Sigma S' \varepsilon t s - L'$$

berechnet werden. Am besten bestimmt man getrennt:

den Einfluss einer Last P: $X = \frac{P\delta'}{\Sigma S'^2 \rho}$

„ „ „ Temperaturänderung $X_t = \frac{\Sigma S' \varepsilon t s}{\Sigma S'^2 \rho}$

„ „ von Verschiebungen der Stützen $\Delta X = -\frac{L'}{\Sigma S'^2 \rho}$.

Die Werthe X_t und ΔX können bereits nach Ermittelung der S' ausgerechnet werden. L' bedeutet die virtuelle Arbeit der an den Stützpunkten A, B, C, D angreifenden äusseren Kräften des Zustandes $X = -1$. Wird z. B. der Einfluss einer Vergrösserung der Stützweite

AB um Δl gesucht, ferner der Einfluss von Senkungen der Punkte C und D um Strecken η' und η'', so hat man zu setzen:

$$L' = 1\,\Delta l - \frac{2h}{l_1}(\eta' + \eta'')$$

weil den in A und B angreifenden wagerechten Kräften 1 die positive virtuelle Arbeit $1 \cdot \Delta l$ entspricht und den nach oben gerichteten Kräften $\frac{2h}{l_1}$ die negative Arbeit $\left(-\frac{2h}{l_1}\eta' - \frac{2h}{l_1}\eta''\right)$.

Zur Bestimmung von X in Folge von P muss — da P an der oberen Gurtung angreift — die Biegungslinie dieser oberen Gurtung ermittelt werden, und zwar für den Zustand $X = -1$. Entscheidet man sich beispielsweise für den in No. 46 (Seite 100) angegebenen Weg, so berechne man die von den Spannungen $\sigma' = \frac{S'}{F}$ abhängigen Aenderungen $\Delta'\vartheta$ der Randwinkel ϑ, schreibe den Knoten $1, 2, 3, \ldots$ die Gewichte $w_1 = \Delta'\vartheta_1$, $w_2 = \Delta'\vartheta_2$, $w_3 = \Delta'\vartheta_3, \ldots$ zu (denn die obere Gurtung ist wagerecht und es verschwinden in Gleich. 3, Seite 101 die Glieder mit Δs) und verfahre im übrigen nach Beispiel 3 auf Seite 123. In Fig. 162 wurden die Gewichte w_1, w_2, w_{12}, w_{13} positiv, die anderen w negativ vorausgesetzt.

Die Linienzüge $A'LE'$, $E'C'RD'F'$ und $F'TB'$ sind die Momentenkurven einfacher Balken $A'E'$, $E'F'$ und $F'B'$, welche beziehw. belastet sind mit w_1, w_2, mit w_3 bis w_{11} und mit w_{12}, w_{13}. Der Schlusslinienzug $A''E''F''B''$ ist bestimmt durch die Längenänderungen der Vertikalen AA_0, CC_0, DD_0 und BB_0; es ist nämlich:

$$\overline{A''A'} = \Delta\overline{AA_0};\ \overline{C''C'} = \Delta\overline{CC_0};\ \overline{D''D'} = \Delta\overline{DD_0};\ \overline{B''B'} = \Delta\overline{BB_0}.$$

Diese Vertikalen werden gedrückt, und es liegen daher die Punkte A'', C'', D'', B'' oberhalb A', C', D', B'.*) Die in Fig. 162 schraffirte Fläche ist die gesuchte Biegungsfläche und gleichzeitig Einflussfläche für X (mit dem Multiplikator $1 : \Sigma S''^2\rho$); der mittlere Theil derselben ist negativ, weshalb Lasten, die in den Knoten 6 bis 8 angreifen, einen negativen Horizontalschub X hervorbringen.

Hinzuzufügen bleibt, dass der für X_t abgeleitete Ausdruck sich für den in der Regel vorausgesetzten Fall einer gleichmässigen Erwärmung des Bogens noch vereinfachen lässt. Zu diesem Zwecke schreiben wir den Stablängen s des bei B auf wagerechter Bahn verschiebbar gedachten Bogens die verschwindend kleinen Aenderungen $\Delta s = \omega s$ zu, wobei ω für alle Stäbe gleich sein soll, und wenden auf diesen Ver-

*) Wir erinnern daran, dass wir die lothrechten Verschiebungen stets nach *unten positiv* zählen.

schiebungszustand und auf den Belastungszustand $X = -1$ das Gesetz der virtuellen Verschiebungen an. Wir erhalten dann, da sich $l = l_2 + 2l_1$ um $\Delta l = \omega l$ ändert, die Beziehung

$$1 \cdot \omega l = \Sigma S' \omega s, \text{ d. h. } \Sigma S' s = l$$

und finden nun (falls neben t auch ε einen festen Werth besitzt)

$$X_t = \frac{\varepsilon t \Sigma S' s}{\Sigma S'^2 \rho} = \frac{\varepsilon t l}{\Sigma S'^2 \rho}.$$

68. Kette, versteift durch einen Gerber'schen Balken. Wir knüpfen an die im ersten Bande (Seite 417, No. 208) durchgeführte Untersuchung an, welche lehrte, dass eine über beliebig viele Oeffnungen gespannte Kette mit durchgehendem Versteifungsbalken ein statisch bestimmtes Tragwerk ist, sobald der Versteifungsbalken ebensoviel Mittelgelenke erhält als die Brücke Oeffnungen besitzt, und die Mittelgelenke so vertheilt sind, dass nach Weglassung irgend eines derselben (welches wir kurz das Gelenk G' nennen wollen) der Versteifungsbalken ein Gerber'scher wird.*) Wir zeigten auch, dass nach Bestimmung des Horizontalzuges H der Kette die Spannkräfte Z der Hängestangen sich mittels des Gesetzes leicht angeben lassen, dass die Kette das Seilpolygon der Kräfte Z ist, womit dann alle am Balken angreifenden Kräfte bestimmt sind; und schliesslich ermittelten wir H, indem wir das Angriffsmoment für den Balkenquerschnitt G' gleich Null setzten. Fehlt nun das Gelenk G', wird also die Kette durch einen Gerber'schen Balken versteift, so entsteht ein einfach statisch unbestimmtes Tragwerk, als dessen statisch nicht bestimmbare Grösse X am zweckmässigsten der Horizontalzug der Kette gewählt wird. Zur Berechnung von X dienen, wenn sämmtliche Spannkräfte S auf die Form

$$S = S_0 - S' X$$

gebracht worden, die Formeln:

Einfluss einer Einzellast: $X = \frac{P\delta'}{\Sigma S'^2 \rho}$.**)

„ „ Temperaturänderung: $X_t = \frac{\Sigma S' \varepsilon t s}{\Sigma S'^2 \rho}$.

„ von Verschiebungen der Stützen: $\Delta X = -\frac{L'}{\Sigma S'^2 \rho}$.

---

*) Wie beim Gerber'schen Balken die Gelenke über die verschiedenen Oeffnungen zu vertheilen sind, lehrt Abschnitt VI von Band I.

**) Es handelt sich hier nur um diejenigen Lasten, welche nach Ausführung der Versteifung der Kette aufgebracht werden, in der Regel also nur um die bewegliche Belastung. Vergl. Band I, § 51.

Das Verfahren möge an dem in Fig. 163 abgebildeten Träger erläutert werden. Der Versteifungsbalken besitzt hier zwei in der Mittelöffnung liegende Gelenke G und J. Um den Belastungszustand $X = -1$ zu erhalten, denke man in den Kettengliedern *Drücke* S_1', S_2', S_3', ... erzeugt, denen ein Horizontalschub von der Grösse *Eins* entspricht. Fig. 163[b] giebt an, wie diese Kräfte und die zugehörigen Drücke S_9', S_{10}', S_{11}' ..., in den Hängestangen dargestellt werden können, wobei es genügte, die linke Trägerhälfte zu behandeln. Die Drücke S_9', S_{10}', S_{11}' ... bilden die Belastungen des Versteifungsbalkens, dessen Stützenwiderstände A', B', C', D' nach Abschnitt VI, Band I, zu be-

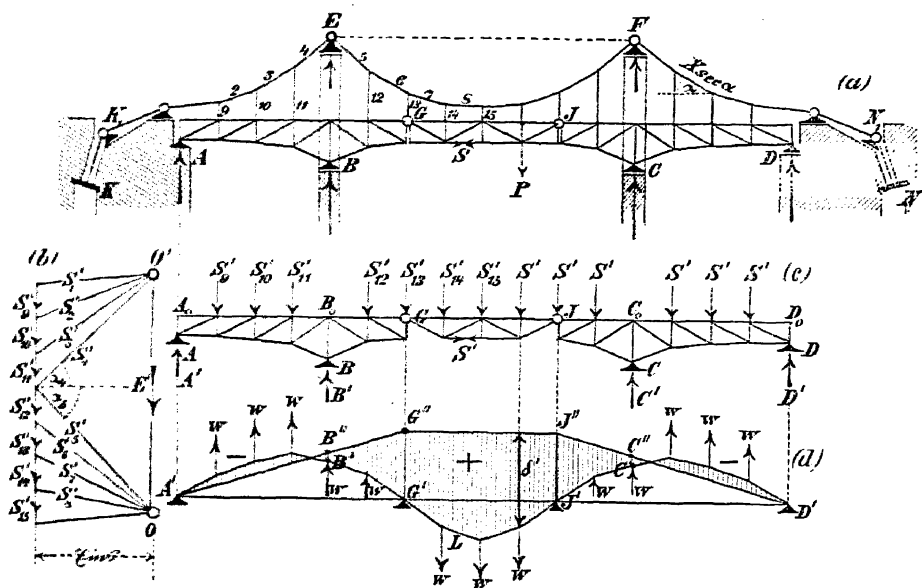



Fig. 163.

stimmen sind, worauf die Spannkräfte S' der Stäbe des Balkens mit Hilfe eines Cremona'schen Kräfteplanes gezeichnet werden können. Ist dies geschehen, so werden die Spannungen $\sigma' = \frac{S'}{F}$ oder die Längenänderungen $(\Delta s)' = \frac{S's}{EF}$ sämmtlicher Balkenstäbe berechnet, hierauf nach No. 46 oder No. 47 die Gewichte w ermittelt und die in Fig. 163[d] schraffirte Biegungsfläche der Gurtung $A_0 D_0$ bestimmt. Dieselbe ist **die Einflussfläche für X** $\left(\textbf{Multiplicator} = \frac{1}{\Sigma S'^2 \rho}\right)$ und wird begrenzt

durch die Momentenlinien $A'B'G'$, $G'L'J'$, $J'C'D'$ der mit den entsprechenden Gewichten w belasteten einfachen Balken $A'G'$, $G'J'$, $J'D'$ und den Schlusslinienzug $A'G''J''D'$, welcher bestimmt ist durch die Verkürzungen $\overline{B''B'}$ und $\overline{C''C'}$ der Vertikalen $\overline{B_0 B}$ und $\overline{C_0 C}$.*) Zu beachten ist, dass sich der Ausdruck $\Sigma S'^2 \rho$ auf sämmtliche Stäbe des Tragwerks (Balkenstäbe, Hängestangen, Glieder der Tragketten und Rückhaltketten) bezieht.

Bei der Berechnung von X_t wird meistens angenommen, dass sich die dem spannungslosen Anfangszustande entsprechenden Temperaturen sämmtlicher Stäbe um den gleichen Betrag t ändern. Es stellt sich dann heraus, dass der Einfluss der Temperaturänderungen der Balkenstäbe und Hängestangen ein verhältnissmässig sehr geringer ist, und dass es genügt, im *Zähler* des für X_t erhaltenen Ausdruckes nur die Glieder der Tragketten und Rückhaltketten zu berücksichtigen. Für ein unter α gegen die Wagerechte geneigtes Glied der Tragkette erhält man $S' = -1 \cdot \sec \alpha$, und für die Glieder der Rückhaltketten ergeben sich z. B. bei der in Fig. 164 veranschaulichten Anordnung die Werthe $S' = -1 \sec \alpha'$. Daraus folgt dann:

$$X_t = -\frac{\varepsilon t}{\Sigma S'^2 \rho} \left\{ \Sigma s \sec \alpha + 2 (s_a + s_b) \sec \alpha' \right\},$$

worin $s_a = \overline{KK_1}$ und $s_b = \overline{K_1 K_2}$. Die Summe $\Sigma s \sec \alpha$ erstreckt sich nur über die Glieder der Tragkette. In Folge einer Erhöhung der Temperatur wird der Horizontalzug der Kette verkleinert.

Verschiebungen der Widerlager bleiben meistens unberücksichtigt, obgleich Längenänderungen schlanker Mittelpfeiler und ein Nachgeben der Verankerungen von merklichem Einfluss auf X sein können. Es senke sich z. B. der Stützpunkt E um η_1, F um η_2, auch verschiebe sich der Stützpunkt K im Sinne KK_1 um η_3 und der entsprechende Stützpunkt des rechten Endpfeilers um η_4. In den Punkten E und K greifen beim Eintreten des Zustandes $X = -1$ die Stützenwiderstände an:

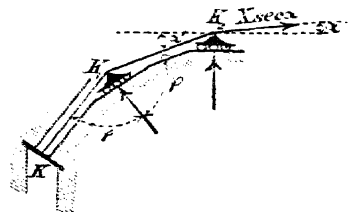



Fig. 164.

*) Die Vertikalen $A_0 A$ und $D_0 D$ des in der Fig. 163 abgebildeten Trägers sind für den Belastungszustand $X = -1$ spannungslos; ihre Längenänderungen sind also $= 0$.

$$E' = 1\,(\mathrm{tg}\,\alpha_4 + \mathrm{tg}\,\alpha_5), \text{ nach abwärts gerichtet}$$
$$K' = 1\,\sec\alpha' \quad , \quad \text{„ oben „} \quad {}^{*)}$$

und entsprechend gleiche Widerstände wirken bei F und N.

Die virtuelle Arbeit dieser Auflagerkräfte ist:

$$L' = (\mathrm{tg}\,\alpha_4 + \mathrm{tg}\,\alpha_5)(\eta_1 + \eta_2) + \sec\alpha'(\eta_3 + \eta_4)$$

und man erhält daher:

$$\Delta X = -\frac{1}{\Sigma S'^2\rho}\left[(\mathrm{tg}\,\alpha_4 + \mathrm{tg}\,\alpha_5)(\eta_1 + \eta_2) + \sec\alpha'(\eta_3 + \eta_4)\right].$$

69. Kette, über eine Oeffnung gespannt und durch einen Bogenträger mit 2 Kämpfergelenken versteift, Fig. 165. Dieses Tragwerk ist *zweifach* statisch unbestimmt. Als statisch nicht bestimmbare Grössen werden zweckmässig der Horizontalzug X' der Kette und der Horizontalschub X'' des Bogens eingeführt. Die Spannkräfte werden auf die Form $S = S_0 - S'X' - S''X''$ gebracht.

Fig. 168 zeigt den einfachen Balken AB, in welchen das Fachwerk im Falle $X' = 0$ und $X'' = 0$ übergeht, während die Figuren 166 und 167 diesen Balken im Belastungszustande $X' = -1$ bezieh. $X'' = -1$ darstellen.

Bei Eintreten des Zustandes $X' = -1$ greifen am Balken AB die lothrechten Lasten S_7', S_8', . . . an (d. h. die Drücke in den Hängestangen, welche genau so bestimmt werden wie im vorigen Beispiele), und im Belastungsfalle $X'' = -1$ befindet sich der Balken unter dem Einflusse zweier wagerechter Kräfte 1. Nach Berechnung der den Spannkräften S' und S'' entsprechenden Knotenpunktsgewichte w' und w'' werden die Biegungslinien (δ' und δ'') als Momentenlinien einfacher Balken AB ermittelt**) und schliesslich die Elasticitätsgleichungen aufgelöst:

$$X'\Sigma S'^2\rho + X''\Sigma S'S''\rho = P\delta' + \Sigma S'\varepsilon ts - L'$$
$$X'\Sigma S''S'\rho + X''\Sigma S''^2\rho = P\delta'' + \Sigma S''\varepsilon ts - L''.$$

---

*) Wir setzen voraus, dass bei K_1 und K_2 bewegliche Lager angeordnet sind. Der Widerstand des auf wagerechter Bahn geführten Stützpunktes K_2 ist lothrecht, der Widerstand bei K_1 halbire den Winkel KK_1K_2. Dann wird jedes der beiden Kettenglieder KK_1 und K_1K_2 durch eine Spannkraft $X\sec\alpha'$ beansprucht, wo α' den Neigungswinkel von K_1K_2 gegen die Wagerechte bedeutet. In K greift also ein von K_2 nach K_1 gerichteter *Widerstand* $X\sec\alpha'$ an und im Falle $X = -1$ ein von K_2 nach K_1 gerichteter von der Grösse $1\sec\alpha'$.

**) In Fig. 166 und 167 wurden die Längenänderungen der Endständer AA_0 und BB_0 vernachlässigt.

Man erhält den Einfluss der Belastung

$$X' = P(\omega''\delta' - \omega\delta'')$$
$$X'' = P(\omega'\delta'' - \omega\delta')$$

worin $\omega' = \frac{\Sigma S'^2\rho}{N}$, $\omega'' = \frac{\Sigma S''^2\rho}{N}$, $\omega = \frac{\Sigma S'S''\rho}{N}$

$$N = \Sigma S'^2\rho \cdot \Sigma S''^2\rho - (\Sigma S'S''\rho)^2,$$

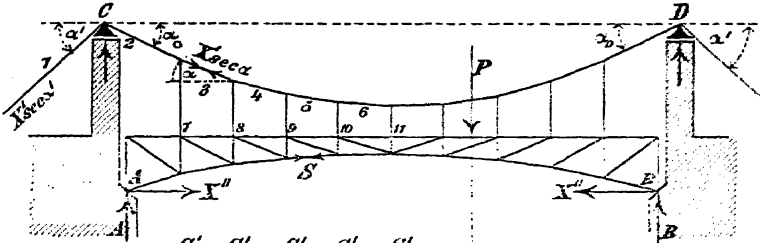



Fig. 165.

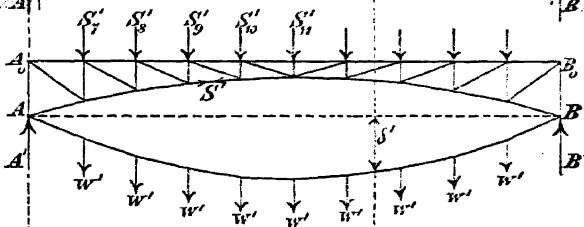



Fig. 166.

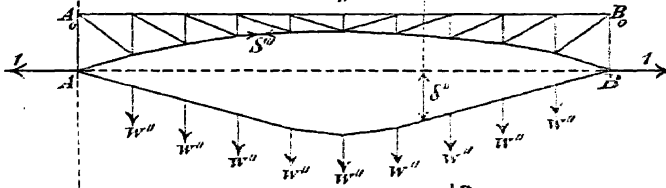



Fig. 167.

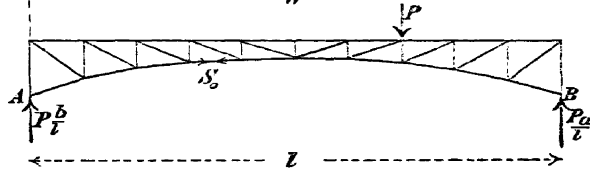



Fig. 168.

ferner den Einfluss einer Temperaturänderung:

$$X_t' = \omega''\Sigma S'\varepsilon ts - \omega\Sigma S''\varepsilon ts$$
$$X_t'' = \omega'\Sigma S''\varepsilon ts - \omega\Sigma S'\varepsilon ts$$

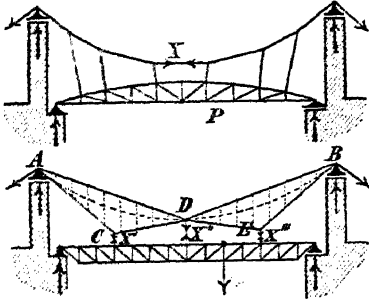
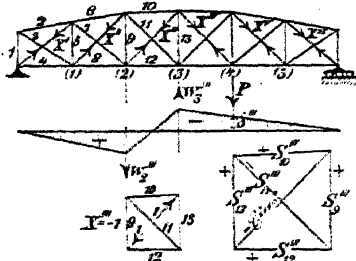
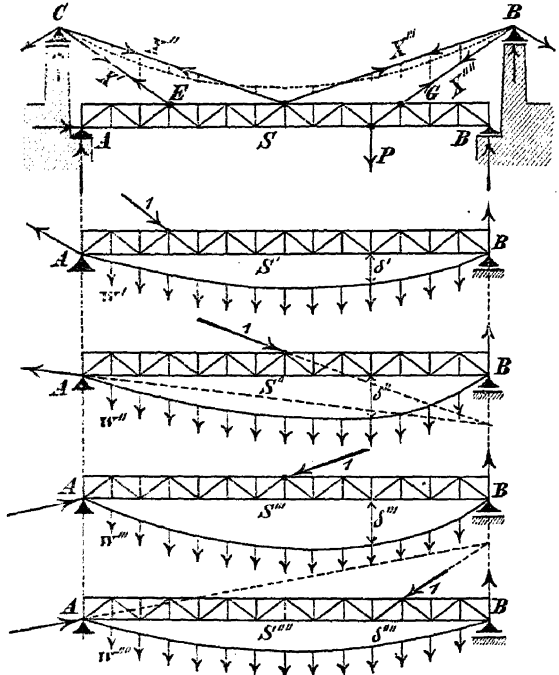
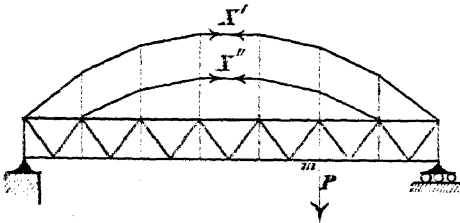
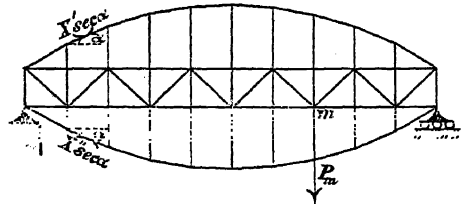
und den Einfluss einer Bewegung der Stützen:

$$\Delta X' = -\omega''L' + \omega L''$$
$$\Delta X'' = -\omega'L'' + \omega L'.$$

Die von S' abhängigen Summenausdrücke erstrecken sich über die Stäbe des Bogens, die Hängestangen, die Tragkette und die Rückhalt-

ketten, die von S'' abhängigen nur über den Bogen, da für die Kettenglieder und Hängestangen $S'' = 0$ ist.

Wird eine gleichmässige Temperaturänderung angenommen, so darf man, wie im vorigen Beispiele,

Fig. 169. Fig. 170. Fig. 171. Fig. 172. Fig. 173. Fig. 174.

$$\Sigma S' \varepsilon t s = \Sigma s \sec \alpha + 2 s' \sec \alpha'$$

setzen, worin sich $\Sigma s \sec \alpha$ nur über die Glieder der Tragkette erstreckt und s' die Länge einer Rückhaltkette (bis zur Ankerplatte gemessen!) bedeutet. Dabei ist vorausgesetzt, dass die Rückhaltkette entweder geradlinig oder, wenn gebrochen, derart mit Zwischenstützen versehen ist, dass die Spannkraft in der ganzen Kette gleich gross

ist. Vergl. Fig. 164. Weiter darf man (ähnlich wie beim ersten Beispiel, Fig. 160)

$$\Sigma S'' \varepsilon t s = \varepsilon t l$$

setzen.

Sollen $\Delta X'$ und $\Delta X''$ unter der Voraussetzung berechnet werden, dass sich die Stützpunkte C und D um η_1 bezieh. η_2 senken, dass ferner die Ankerplatten links und rechts in der Richtung der Rückhaltketten um η_3 bezieh. η_4 nachgeben und l sich um Δl ändert, so hat man zu setzen:

$$L' = 1 \cdot (\operatorname{tg} \alpha_0 + \operatorname{tg} \alpha') (\eta_1 + \eta_2) + 1 \cdot \sec \alpha' (\eta_3 + \eta_4)$$
$$L'' = 1 \cdot \Delta l. \qquad \text{(Vergl. das vorige Beispiel).}$$

70. Uebungsaufgaben. Die durch einen einfachen Balken versteifte Kette in Fig. 169 ist einfach statisch unbestimmt. Kennt man den Horizontalzug X, so kann man die Spannkräfte in den Hängestangen mittels der Bedingung finden, dass die Kette das Seilpolygon dieser Kräfte ist.

Figur 170 stellt ein dreifach statisch unbestimmtes Hängewerk (*System Ordish-Lefeuvre*) dar. Sind die Spannkräfte X', X'', X''' der lothrechten Hängestangen bekannt, so sind die in den Tragketten AC, CD, EB, ED, AD, DB und in den Rückhaltketten auftretenden Kräfte gegeben. Die durch eine gestrichelte Linie angedeutete Kette hat nur das Gewicht der Tragketten aufzunehmen. Bei symmetrischer Anordnung ist die Biegungslinie für $X''' = -1$ das Spiegelbild der Biegungslinie für $X' = -1$.

Ein ähnliches Hängewerk zeigt Figur 171; dasselbe ist 4-fach statisch unbestimmt. Die Belastungszustände $X' = -1$, $X'' = -1$, $X''' = -1$, $X'''' = -1$ des Versteifungsbalkens sind in der Figur dargestellt worden; es ist zu beachten, dass am festen Auflager A schräge Widerstände hervorgerufen werden.

Das Balkenfachwerk in Fig. 172 besitzt in jedem Felde zwei sich kreuzende Diagonalen, welche aber beide im Stande sind, Zug- und Druckkräfte zu übertragen. Hat das Fachwerk also n Felder, so ist es n-fach statisch unbestimmt. In der Figur ist der Kräfteplan für $X''' = -1$ vorgeführt worden; die Wirkung dieser Kraft erstreckt sich nur über die Stäbe 9, 10, 11, 12, 13, und es treten daher nur zwei Gewichte w auf, nämlich w_2''' und w_3''', welche am besten nach No. 47 Gleich. 10 berechnet werden. Man erhält für w_2''' einen positiven, für w_3''' einen negativen Werth und gelangt daher zu der in der Abbildung angedeuteten Biegungslinie (δ'''). Ebenso werden die Zustände $X' = -1$, $X'' = -1$, u. s. w. untersucht.

Die Figuren 173 und 174 zeigen zweifach statisch unbestimmte Tragwerke, welche in ähnlicher Weise behandelt werden, wie die versteiften Kettenbrücken in Fig. 163, 165, 169.

Wir heben zum Schluss noch einmal hervor, dass bei Anwendung der Gleichungen V auf Seite 163 die Summe Σ sich über sämmtliche Stäbe erstreckt, über die nothwendigen und überzähligen. So entsprechen beispielsweise dem überzähligen Stabe des ersten Feldes des Trägers in Fig. 171 die Werthe: $S' = -1$; $S'' = 0$; $S''' = 0$; $S'''' = 0$; u. s. w., dem des zweiten Feldes: $S' = 0$; $S'' = -1$; $S''' = 0$; $S'''' = 0$ u. s. w. Man vergl. auch Seite 26 der Einleitung.

d. Allgemeines über das Auftragen der Einflusslinien.

71. Sind die Einflusslinien für die Grössen X eines durch parallele Lasten P beanspruchten Fachwerks nach einem der in No. 56 bis 69 angegebenen Verfahren bestimmt worden, so lassen sich die Einflusslinien der Spannkräfte S und Stützenwiderstände C mittels der zwischen den S, C und X bestehenden Beziehungen ersten Grades darstellen. Soll beispielsweise die Einflusslinie für eine Spannkraft

$$S = S_0 - S_a X_a - S_b X_b - S_c X_c - \dots$$

aufgetragen werden, so nehme man zuerst sämmtliche $X = 0$ an, zeichne die S_0-Linie des statisch bestimmten Hauptsystems auf die im I. Bande gezeigte Weise und verkleinere die Ordinaten derselben um die Summe der beziehungsweise mit S_a, S_b, S_c, ... multiplicirten entsprechenden Ordinaten der Einflusslinien für X_a, X_b, X_c, ..., wobei es sich empfiehlt, die Multiplikationen mit Hilfe von Winkeln α, β, γ .... auszuführen, welche der Reihe nach durch

$$\operatorname{tg} \alpha = S_a, \quad \operatorname{tg} \beta = S_b, \quad \operatorname{tg} \gamma = S_c, \dots$$

bestimmt sind.*)

In Fig. 175 ist dieses allgemeine Verfahren an einem Bogenträger mit festen Kämpfergelenken (A, B) und auf wagerechter Bahn beweglichem Auflagergelenke C erläutert worden. Als statisch nicht bestimmbare Grössen sind eingeführt: der Horizontalschub X_a und der Widerstand X_b der Mittelstütze. Gesucht sei die Einflusslinie für die Spannkraft S im Stabe i—k der oberen Gurtung. Werden X_a und $X_b = 0$ gesetzt, so liegt ein einfacher Balken AB vor, und es besteht deshalb die S_0-Linie aus zwei Geraden AC und CB, welche nach Fig. 175c durch Auftragung von $AJ = -1 \frac{x_m}{r_m}$ bestimmt sind, wobei r_m das

*) Auch der Proportionalcirkel leistet gute Dienste.

Loth vom Knotenpunkt m auf den Stab ik bedeutet.*) Die den Belastungszuständen $X_a = -1$ und $X_b = -1$ entsprechenden Spannkräfte S_a und S_b stellen sich hier *negativ* heraus, während X_a und X_b nur positive Werthe besitzen; das Glied: $-(S_a X_b + S_b X_b)$ ist also positiv; addirt man dasselbe zu dem negativen Werthe S_0, so erhält man für $P = 1$:

$$S = S_0 - S_a X_b - S_b X_b = P\eta$$

und gelangt zu der in der Fig. 175[c] voll schraffirten Einflussfläche für S. Dieselbe ermöglicht für jeden Belastungszustand die Ermittelung von

$$S = \Sigma P\eta.$$

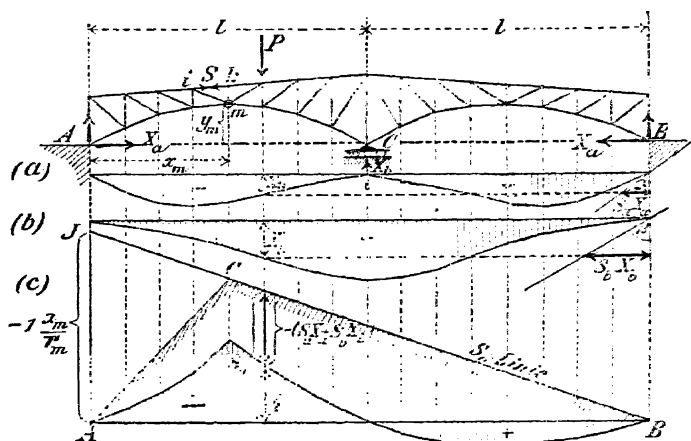



Fig 175.

72. Die ziemlich umfangreiche Arbeit, welche die Auftragung der Einflusslinien für sämmtliche Spannkräfte S eines mehrfach statisch unbestimmten Fachwerks verursacht, lässt sich durch Verwerthung der zwischen den einzelnen Grössen S stattfindenden statischen Beziehungen meistens erheblich abkürzen. In der Regel liegen Fachwerke vor, die aus aneinander gereihten Dreiecken bestehen; es ist dann zu empfehlen, die Spannkräfte in den Füllungsstäben durch die Gurtkräfte auszudrücken. Bei belasteter oberer Gurtung betrachte man einen unteren Knotenpunkt m (Fig. 176), nehme zuerst $U_{m-1} = +1$ und $U_{m+1} = 0$ an und bestimme mit Hilfe des in Fig. 176[a] dargestellten Kräftepolygons die entsprechenden Spannkräfte: $-\varkappa_m$ (Druck) und $+\varkappa_{m+1}$ (Zug) der Wandglieder D_m und D_{m+1}. Ganz ebenso ermittle man für den Zustand $U_{m-1} = 0$ und $U_{m+1} = +1$ die Spannkräfte $+\nu_m$ und $-\nu_{m+1}$

*) Vergl. Band I, Seite 271, Fig. 268.

jener Glieder, um hierauf die für jeden Belastungszustand gültigen Formeln zu erhalten:

$$D_m = -\varkappa_m U_{m-1} + \nu_m U_{m+1} = \nu_m \left(-\frac{\varkappa_m}{\nu_m} U_{m-1} + U_{m+1}\right)$$

$$D_{m+1} = +\varkappa_{m+1} U_{m-1} - \nu_{m+1} U_{m+1} = \nu_{m+1} \left(+\frac{\varkappa_{m+1}}{\nu_{m+1}} U_{m-1} - U_{m+1}\right).$$

Die Einflusslinien für die Klammerausdrücke wollen wir kurz die Einflusslinien für D_m beziehungsweise D_{m+1} nennen und die Faktoren ν_m und ν_{m+1} als *Multiplikatoren* dieser Linien bezeichnen. Die D_m-Linie erhält man, wenn man die mit $\varkappa_m : \nu_m$ multiplicirte U_{m-1}-Linie von der

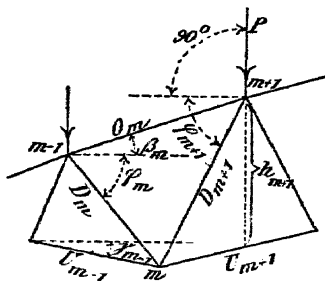
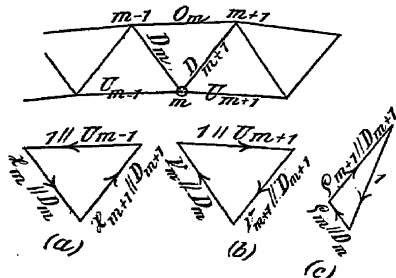



Fig. 176. Fig. 177.

U_{m+1}-Linie in Abzug bringt, und ganz entsprechend ergiebt sich die D_{m+1}-Linie. Zur Ausführung der Multiplikationen mit $\varkappa_m : \nu_m$ und $\varkappa_{m+1} : \nu_{m+1}$ benutze man Hilfswinkel oder den Proportionalcirkel.

Bei belasteter unterer Gurtung drücke man die Spannkräfte D durch die Spannkräfte O aus.

Die oben für D_m und D_{m+1} abgeleiteten Gleichungen gelten auch für den Fall belasteter unterer Gurtung, so lange im Knoten m keine Last angreift. Liegt die Lasteinheit bei m, so treten rechts noch Glieder ρ_m bezieh. ρ_{m+1} hinzu, die der Fig. 176[c] zu entnehmen sind. Hierauf ist zu achten, wenn beide Gurte belastet sind. Vergl. auch das ähnliche allgemeine Verfahren in Band I, No. 170 Seite 273.

Sind nicht nur die Lasten, sondern überhaupt alle äusseren Kräfte (also auch die Stützenwiderstände) einander parallel, ein Fall, der bei Balken auf mehreren Stützen, sowie bei den Versteifungsbalken von Kettenbrücken in der Regel vorliegen wird, so gehe man, falls sämmtliche Wandglieder gegen die Richtung der Lasten geneigt sind (Fig. 177), von den bereits im I. Bande benutzten Gleichungen aus:

$$D_m \cos \varphi_m = - U_{m-1} \cos \gamma_{m-1} - O_m \cos \beta_m$$
$$D_{m+1} \cos \varphi_{m+1} = - U_{m+1} \cos \gamma_{m+1} - O_m \cos \beta_m.$$

Sind dann mittels des in No. 71 beschriebenen Verfahrens die Einflusslinien für die $O \cos \beta$ und $U \cos \gamma$ gefunden worden, so sind auch die Einflusslinien für die $D \cos \varphi$ bestimmt.

Für das in Fig. 178 dargestellte von parallelen äusseren Kräften angegriffene Fachwerk, dessen Stäbe zum Theil in die Kraftrichtung fallen, gelten die Beziehungen:

$$-O_m \cos \beta_m = +U_{m+1} \cos \gamma_{m+1} = \frac{M_m}{h_m} \text{*)}$$

$$D_m \cos \varphi_m = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}$$

$$V_m = \frac{h'_{m-1}}{\lambda_m} \left[\frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} \cdot \frac{h_{m-1}}{h'_{m-1}} - \frac{M_m}{h_m} \right] \text{ Last am Obergurt}$$

$$V_m = \frac{h''_{m+1}}{\lambda_{m+1}} \left[\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} \cdot \frac{h_{m+1}}{h''_{m+1}} \right] \text{ Last am Untergurt;}$$

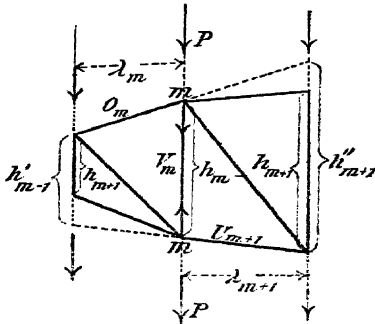



Fig. 178.

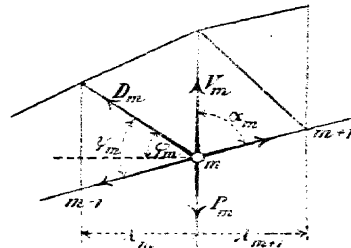



Fig. 179.

aus denen hervorgeht, dass es zweckmässig sein wird, zunächst die Einflussflächen für die Werthe $\frac{M}{h}$ darzustellen, um in dem Unterschiede zweier aufeinanderfolgenden $\frac{M}{h}$-Flächen eine $D \cos \varphi$-Fläche zu erhalten. Auch die V_m-Fläche ist durch zwei aufeinanderfolgende $\frac{M}{h}$-Flächen, von denen aber die eine mit einem Höhenverhältniss mul-

*) M_m bedeutet das Angriffsmoment für den Knoten m; dasselbe wird in der Form: $M_m = M_{0m} - M'_m X' - M_m'' X'' - \ldots$ dargestellt, wenn X', X'', ... die statisch nicht bestimmbaren Grössen sind. Die Formeln für O, D und V sind im I. Bande, Seite 275 u. 316 abgeleitet worden. Die Ausdrücke für die V wurden oben in anderer Form geschrieben wie früher. Die Formeln für O und U gelten bei beliebig gerichteten äusseren Kräften.

tiplicirt werden muss, bestimmt; ferner treten bei den V-Flächen Multiplicatoren auf.

Bei gerader Gurtung wird die Ermittelung der Kräfte V wesentlich einfacher. So findet man z. B. für den in Fig. 179 dargestellten Fall einer geraden unteren Gurtung die Gleichgewichtsbedingung:

$$(V_m - P)\sin\alpha_m + D_m \sin\psi_m = 0$$

und hieraus:

$$V_m = -\frac{D_m \sin\psi_m}{\sin\alpha_m} + P = \frac{\sin\psi_m}{\sin\alpha_m \cos\varphi_m}\left(-D_m \cos\varphi_m + \frac{P\cos\varphi_m \sin\alpha_m}{\sin\psi_m}\right).$$

So lange die über den Träger wandernde Lasteinheit ausserhalb der Felder λ_m und λ_{m+1} liegt, unterscheidet sich die Einflussfläche für den Klammerausdruck von der $D_m \cos\varphi_m$-Fläche nur durch das Vorzeichen; an der Stelle m ist zu der in entgegengesetztem Sinne zu nehmenden Ordinate der $D_m \cos\varphi_m$-Linie noch der Betrag: $\frac{1 \cdot \cos\varphi_m \sin\alpha_m}{\sin\psi_m}$ zu addiren. Ist die untere Gurtung rechtwinklig zur Richtung der Lasten, so wird $\frac{\sin\psi_m}{\sin\alpha_m \cos\varphi_m} = \operatorname{tg}\varphi_m$.*)

Besonders einfach wird die ganze Untersuchung für Parallelträger, deren äussere Kräfte rechtwinklig zu den Gurtungen sind. Hier kommt es nur darauf an, die Momente und Querkräfte zu bestimmen, aus denen sich dann sämmtliche Stabkräfte berechnen lassen.

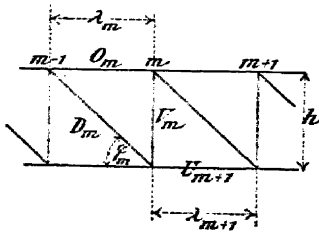
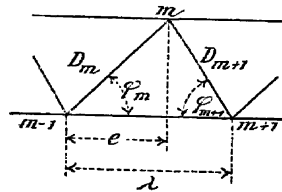



Fig. 180. Fig. 181.

Für das in Fig. 180 dargestellte Fachwerk ergiebt sich z. B., wenn Q_m die Querkraft für das m^{te} Feld bedeutet,

$$-O_m h = +U_{m+1} h = M_m; \qquad D_m \sin\varphi_m = Q_m$$
$$V_m = -Q_m, \text{ Last oben,}$$
$$V_m = -Q_{m+1} \text{ Last unten.}$$

*) Vergl. die ähnliche Untersuchung in Band I, Seite 223.

Da nun $Q_m = \frac{1}{\lambda_m}(M_m - M_{m-1})$ ist*), so kann man nach Ermittlung der M-Flächen jede $Q\lambda$-Fläche als den Unterschied zweier aufeinanderfolgender M-Flächen gewinnen, oder man zeichnet zuerst die $Q\lambda$-Flächen und benutzt hierauf die Beziehung

$$M_m = M_{m-1} + Q_m \lambda_m,$$

um aus der einen M-Fläche schrittweise alle übrigen abzuleiten.

Liegt das Fachwerk in Fig. 181 vor, und sind $m-1$ und $m+1$ Knotenpunkte der belasteten Gurtung, ferner Q die Querkraft für das Feld $(m-1)-(m+1)$, so beachte man die Beziehungen:

$$M_{m+1} = M_{m-1} + Q\lambda; \quad M_m = M_{m-1} + Qe.$$

$$O_{m-1} h = - M_{m-1}, \quad U_m h = + M_m, \quad O_{m+1} h = - M_{m+1}$$

$$D_m \sin \varphi_m = - D_{m+1} \sin \varphi_{m+1} = + Q.$$

73. Auf eine sehr übersichtliche Weise lassen sich die Einflussflächen für die Spannkräfte *einfach* statisch unbestimmter Träger gewinnen; denn hier erscheint S in der Form

$$S = S_0 - S'X = S'\left(\frac{S_0}{S'} - X\right),$$

und es ist daher möglich, wenn S' als Multiplikator herausgezogen wird, jede S-Fläche als den Unterschied der X-Fläche und einer meistens von nur wenigen Geraden begrenzten S_0/S'-Fläche (deren Aufzeichnung ebenso schnell vor sich geht, wie die der S_0-Fläche) darzustellen.

Wir werden die X und die $\eta' = S_0/S'$ (Figur 182[a]) meistens von derselben Geraden $N'N$ aus auftragen und erhalten dann die S-Fläche (deren Ordinaten mit η bezeichnet werden mögen) gewissermaassen auf die X-Linie als gebrochene Null-Achse bezogen. Giebt man aber der Einführung einer allen S-Flächen gemeinsamen geraden Null-Linie (die bei lothrechter Belastung meistens wagerecht gewählt wird) den Vorzug, so gelangt man zu der Darstellungsweise in Fig. 182[b], in welcher die Ordinaten η' von der X-Linie aus aufgetragen wurden, und aus welcher ohne weiteres das Gesetz abgelesen werden kann, dass innerhalb eines Gebietes, in welchem die S_0/S'-Linie der Fig. 182[a] geradlinig verläuft, entsprechende Seiten der S-Linie und X-Linie sich in Punkten einer Geraden schneiden, welche durch den Nullpunkt der S_0/S'-Linie geht und parallel zu P ist.**) Auf Grund dieser Eigenschaft

---

*) Vergl. Band I, Seite 258.

**) Die S-Linie ist also innerhalb eines von einer geraden S_0-Linie beherrschten Gebietes affin mit der X-Linie.

lässt sich die S-Linie aus der X-Linie ableiten, sobald eine Ordinate und die Nullpunkte der S_0/S'-Linie bekannt sind.*)

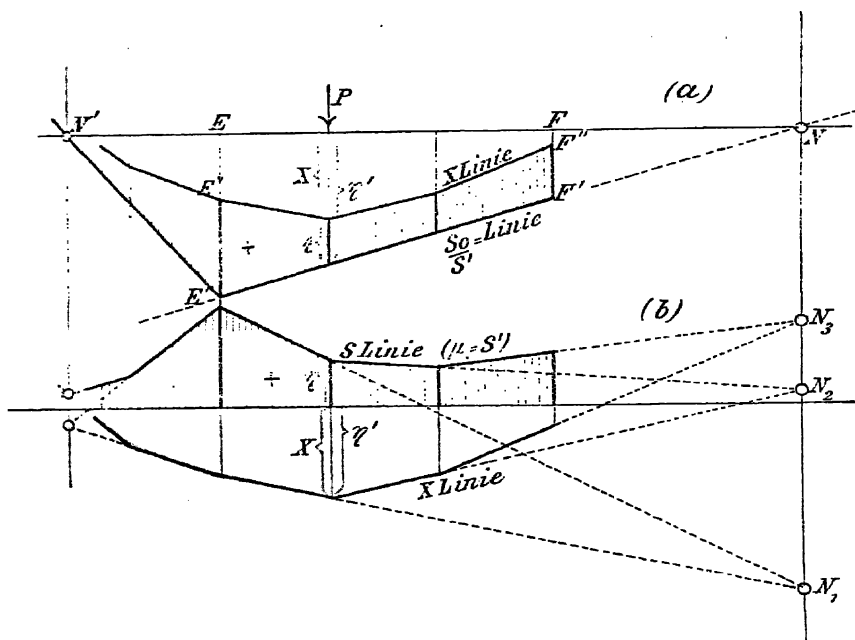



Fig. 182.

Beispiel. Für den in Fig. 183 abgebildeten, einfach statisch unbestimmten Bogenträger sei nach dem in No. 67 beschriebenen Verfahren die Einflusslinie für den Horizontalschub X ermittelt und von der geraden Nulllinie $A'B'$ aus aufgetragen worden.**) Es soll die Einflussfläche für die Spannkraft O des dem Knotenpunkte m gegenüberliegenden Stabes der oberen Gurtung gezeichnet werden.

Den Belastungszustand $X = -1$ zeigt Fig. 183[d]. In A und B wurden Kräfte (K') angebracht, deren wagerechte nach aussen gerichtete Seitenkräfte von der Grösse 1 sind und welche durch die Gelenke E und F gehen müssen, damit sich die Bogentheile AE und BF nicht um E bezieh. F drehen. Sodann wurden die einander gleichen Kräfte

*) Wir erinnern hier u. A. an die Ermittlung der Nullpunkte der S_0-Linien mit Hilfe von Polbestimmungen kinematischer Ketten. Band I, § 32.

**) In Figur 183 vernachlässigten wir die dem Zustande $X = -1$ entsprechenden Längenänderungen der von den Stützpunkten A, C, D, B ausgehenden lothrechten Füllungsstäbe. Vergl. Fig. 162, Seite 165.

(C') und (D') hinzugefügt, welche den (K') das Gleichgewicht halten. Der aus drei Geraden bestehende Linienzug A, C_1, D_1, B ist das Seilpolygon (Mittelkraftspolygon) der Kräfte K', C', D', K'.

Ein behufs Bestimmung der Spannkraft O' durch das Fachwerk geführter Schnitt tt trifft die Seilpolygonseite C_1, D_1, welche die Lage der Mittelkraft (R) der links von tt wirksamen äusseren Kräfte K' und

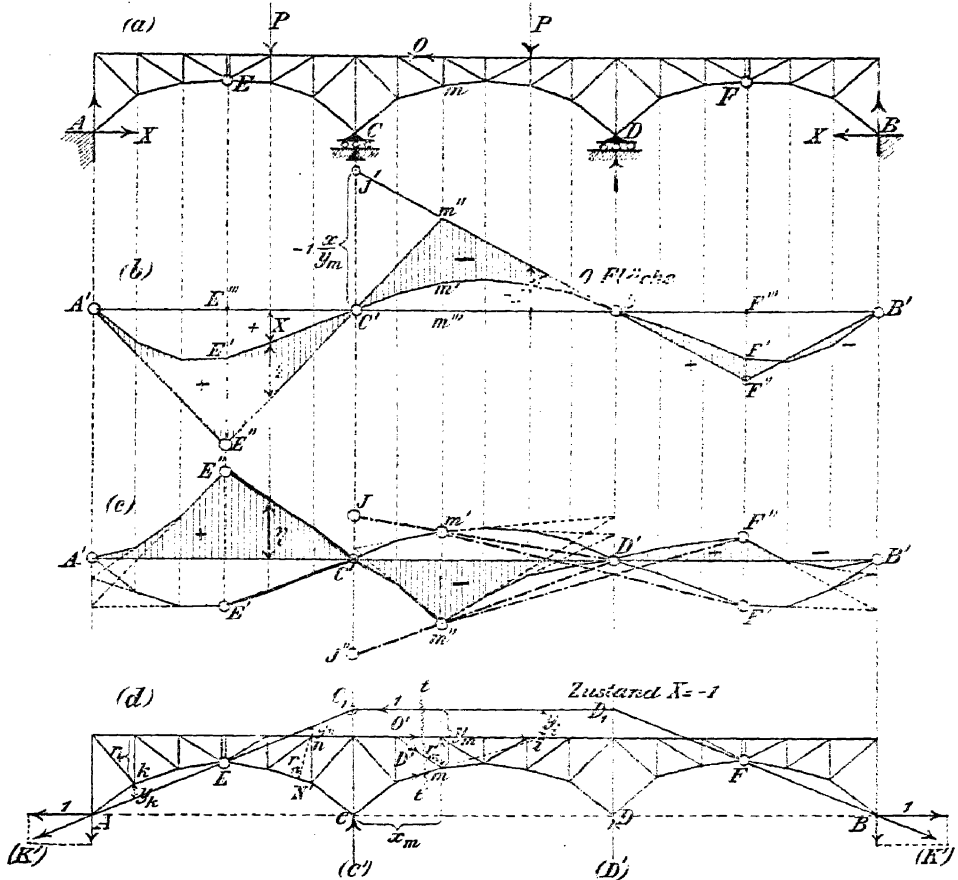



Fig. 183.

C' bestimmt. Misst man also den lothrechten Abstand y_m des Punktes m von der Seite $C_1 D_1$ und erwägt, dass die wagerechte Seitenkraft von R die Grösse 1 besitzt, so lautet die Ritter'sche Momentengleichung für den Drehpunkt m:

$$O' r_m - 1 \cdot y_m = 0, \text{ woraus } O' = +1 \frac{y_m}{r_m},$$

weshalb schliesslich

$$O = O'\left(\frac{O_0}{O'} - X\right) = \frac{y_m}{r_m}\left(\frac{r_m}{y_m}\,O_0 - X\right)$$

erhalten wird.

[Die vorstehende Beschreibuug der Bestimmungsweise der Spannkräfte S' berücksichtigt eine beliebige Neigung der vom Schnitte tt getroffenen Seite des Mittelkraftspolygons; sie liefert z. B. für den Obergurtstab des ersten Feldes: $O' = -1\,\frac{y_k}{r_k}$, für den Untergurtstab des 5^{ten} Feldes: $U' = -1 \cdot \frac{y_n}{r_n}$, für die vom Schnitte tt getroffene Diagonale: $D' = -1 \cdot \frac{y_i}{r_i}$, wo r_i das Loth von i auf D' bedeutet.]

Im Falle $X = 0$ geht der Träger in einen Gerber'schen Balken über, und es besteht deshalb (nach Band I, § 44) die Einflusslinie für $\frac{r_m}{y_m}\,O_0$ aus 4 Geraden $A'E''$, $E''C'm''$, $m''D'F''$ und $F''B'$ (Fig. 183[b]), deren Nullpunkte den Auflagergelenken entsprechen und deren Schnittpunkte in den Senkrechten durch E, m, F liegen. Die Gerade $D'm''$ muss auf der Senkrechten durch C die Strecke:

$$\overline{C'J'} = \frac{r_m}{y_m}\left(-\frac{x_m}{r_m}\right) = -\frac{x_m}{y_m}$$

abschneiden. Bringt man nun von der $\frac{r_m}{y_m} \cdot O_0$-Fläche die X-Fläche in Abzug, so erhält man die in Fig. 183[b] durch Schraffirung hervorgehobene O-Fläche; der Multiplikator derselben ist $= y_m/r_m$. Lothrechte Lasten P erzeugen:

$$O = \frac{y_m}{r_m}\,\Sigma P\eta.$$

In Fig. 183[c] ist die O-Fläche noch einmal, auf eine wagerechte Null-Linie bezogen, dargestellt worden. Nach Auftragung der X-Linie wurde die Gerade $D'm'$ mit der Senkrechten durch C' in J zum Schnitt gebracht, die Strecke $\overline{JJ''} = 1\,\frac{x_m}{y_m}$ abgetragen und mittels der Geraden $J''D'$ der Punkt m'' der O-Linie bestimmt. Zur Festlegung der Punkte F'' und E'' dienten die aus dem Verlauf der O_0-Linie (welche man für diesen Zweck nur zu skizziren braucht) gefolgerten Bedingungen, dass sich die Geraden $m''F''$ und $m'F'$ in einem Punkte der Senkrechten durch D' schneiden müssen und die (in unserer Figur nicht ausgezogenen) Geraden $m''E''$ und $m'E'$ ineinem Punkte der Senkrechten

durch C', und schliesslich wurden die sechs Zweige der O-Linie in der auf Seite 182 beschriebenen Weise (vergl. auch Fig. 179) aus den entsprechenden Zweigen der X-Linie abgeleitet.

Die Darstellungsweise in Fig. 183 ist unbedingt die übersichtlichere und verdient stets den Vorzug. Nach den Erfahrungen, welche der Verfasser bei den von ihm selbst und von den Hörern seiner Vorträge durchgeführten Berechnungeu gesammelt hat, empfiehlt sich folgendes Vorgehen.

Man vertheile die Zeichnungen im allgemeinen*) auf 4 Blätter, welche der Reihe nach zur Auftragung der Einflusslinien für die Obergurtstäbe, Untergurtstäbe, Diagonalen und Vertikalen benutzt werden. Auf jedem dieser Blätter bestimme man mit Hilfe einer einzigen X-Linie nach dem in Fig. 183^b angewandten Verfahren die Einflusslinien für die in Frage kommenden Spannkräfte, und trage schliesslich jede Einflusslinie von einer **besonderen**, geraden Null-Linie aus auf, wobei die Ordinaten der nach Fig. 183^b angefertigten Zeichnung zu ent-

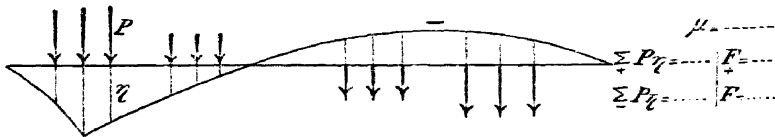



Fig. 184.

nehmen sind. Nun gebe man die gefährlichsten Zugstellungen (welche am besten durch Versuche bestimmt werden) an und schreibe neben jede Einflusslinie die folgenden Werthe:

1. den Multiplikator (den wir von jetzt an stets mit μ bezeichnen werden),
2. die den Lasten P entsprechenden Werthe $\Sigma P\eta$, wobei es sich empfiehlt, durch einen an das Zeichen Σ gesetzten Zeiger $+$ oder $-$ anzudeuten, dass es sich um den Einfluss der auf den positiven oder den negativen Beitragsstrecken liegenden Lasten P handelt,
3. diejenigen Grössen, durch welche der Einfluss der ständigen Belastung bestimmt wird. Bei ungleichen Feldweiten ist es am zweckmässigsten, die Inhalte $\underset{+}{F}$ und $\underset{-}{F}$ des positiven bezieh. negativen Theiles der Einflussfläche zu berechnen und die von der

*) Auf Vereinfachungen, die sich an der Hand der Betrachtungen in No. 72 ergeben, werden wir in dem von den wichtigsten Trägern handelnden Abschnitt II hinweisen.

ständigen Belastung (g für die Längeneinheit) herrührende Spannkraft S_g mittels der Formel $S_g = g\,(F_{+} - F_{-})$ zu ermitteln, wobei die unter den F stehenden $+$ und $-$ *nicht Vorzeichen, sondern nur Zeiger* bedeuten.*) Haben sämmtliche Felder die gleiche Länge λ, so ist die Rechnung mit Knotenlasten $g\lambda$ vorzuziehen. Man bestimme dann die Summe aller positiven, an den Knotenpunkten gemessenen Ordinaten, desgleichen die Summe aller negativen Ordinaten, bezeichne diese Summen kurz mit Σ_{+} und Σ_{-}**) und setze schliesslich $S_g = g\lambda\,(\Sigma_{+} - \Sigma_{-})$.

Auf diese Weise erhält man sehr übersichtliche Kraftepläne, die von Jedermann schnell geprüft werden können.

Die Formeln zur Berechnung der Grenzwerthe der Spannkräfte lauten mit den vorstehenden Bezeichnungen und mit Berücksichtigung des Einflusses ($S_t = \pm S' X_t = \pm \mu X_t$) einer Erwärmung bezieh. Abkühlung:

$$(1)\quad \begin{cases} {}_{max}S = \mu\,[+\Sigma_{+} P\eta + g\,(F_{+} - F_{-}) + X_t] \\ {}_{min}S = \mu\,[-\Sigma_{-} P\eta + g\,(F_{+} - F_{-}) - X_t]; \end{cases}$$

und bei gleichlangen Feldern:

$$(2)\quad \begin{cases} {}_{max}S = \mu\,[+\Sigma_{+} P\eta + g\lambda\,(\Sigma_{+} - \Sigma_{-}) + X_t] \\ {}_{min}S = \mu\,[-\Sigma_{-} P\eta + g\lambda\,(\Sigma_{+} - \Sigma_{-}) - X_t]. \end{cases}$$

Es ist darauf zu achten, dass die neben die Einflusslinien zu schreibenden: μ, $\Sigma_{+} P\eta$, $\Sigma_{-} P\eta$, F_{+}, F_{-}, Σ_{+}, Σ_{-} die absoluten Werthe der fraglichen Grössen vorstellen.

Aehnlich verfahre man bei mehrfach statisch unbestimmten Fachwerken. Den Maassstab für die Einflusslinien (den man für die Gurtkräfte und die Spannkräfte in den Füllungsstäben im allgemeinen verschieden annehmen muss) wähle man nicht zu gross, damit man möglichst viele Ordinaten mit dem Cirkel addiren kann. Bei Bestimmung der $\Sigma_{+} P\eta$ und $\Sigma_{-} P\eta$ beachte man das auf Seite 99 des I. Bandes gesagte.

Bei gleichförmiger Verkehrslast p erhält man (mit der Bezeichnung $q = g + p$):

$$(3)\quad \begin{cases} {}_{max}S = \mu\left[q F_{+} - g F_{-} + X_t\right] \\ {}_{min}S = \mu\left[g F_{+} - q F_{-} - X_t\right] \end{cases}$$

*) In Band I Seite 95 hatten wir diese Flächeninhalte mit $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_1$ bezeichnet, ziehen aber jetzt die Zeichen F_{+} und F_{-} vor.

**) Es sind dies die in Bd. I, S. 96, mit Σ_2 und Σ_1 bezeichneten Summen.

wofür man bei gleichlangen Feldern auch setzen darf:*)

$$(4)\qquad \begin{cases} {}_{max}S = \mu\left[q\lambda\underset{+}{\Sigma} - g\lambda\underset{-}{\Sigma} + X_t\right] \\ {}_{min}S = \mu\left[g\lambda\underset{+}{\Sigma} - q\lambda\underset{-}{\Sigma} - X_t\right]. \end{cases}$$

Noch sei hervorgehoben, dass es manchmal zweckmässig ist, den Einfluss S_g der ständigen Belastung nach Ermittelung von X_g gesondert mit Hilfe eines Cremona'schen Kräfteplanes zu bestimmen, und im Falle gleichförmiger Verkehrslast die folgenden für alle Träger von unveränderlicher Gliederung und Stützungsart (vgl. Seite 6 u. 7) geltenden Beziehungen zu benutzen.

Die Spannkraft ${}_{max}S$ entsteht, wenn die positiven Beitragsstrecken mit q, die negativen mit g belastet werden, und die Spannkraft ${}_{min}S$ erhält man, wenn man die positiven Beitragsstrecken mit g und die negativen mit q belastet. Die Zusammenzählung beider Belastungen führt zur gänzlichen Belastung des Trägers mit $q + g$. Hat man nun S_g in der Form

$$(5)\qquad S_g = g\,C_0$$

dargestellt, wo C_0 den Werth bedeutet, den S_g im Falle $g = 1$ annehmen würde, so findet man

$$(6)\qquad {}_{max}S + {}_{min}S = (q + g)\,C_0,$$

kann also nach Berechnung des einen Grenzwerthes ohne weiteres den anderen angeben.

Ist die Berechnung von ${}_{max}S$ einfacher als die von ${}_{min}S$, so wird man den Einfluss von p in der Form

$$(7)\qquad {}_{max}S_p = p\,C_1$$

ermitteln und erhält dann

$$(8)\qquad \begin{cases} {}_{max}S = g\,C_0 + p\,C_1 \\ {}_{min}S = q\,C_0 - p\,C_1 \end{cases}$$

$$\text{Probe: } {}_{max}S + {}_{min}S = (g + q)\,C_0.$$

Sollte die Berechnung von ${}_{min}S$ die einfachere sein, so suche man

$$(9)\qquad {}_{min}S_p = -\,p\,C_2$$

auf, um dann zu erhalten

$$(10)\qquad \begin{cases} {}_{min}S = g\,C_0 - p\,C_2 \\ {}_{max}S = q\,C_0 + p\,C_2. \end{cases}$$

Die Gesetze (6) bis (10) gelten nicht nur für Spannkräfte, sondern auch für die nach festen Richtungen gebildeten Seitenkräfte von Stützen-

*) Band I, Seite 96.

widerständen, für Angriffsmomente und Querkräfte; sie gestatten in vielen Fällen eine wesentliche Abkürzung der Rechnung. Zu beachten ist, dass die nach den Gleichungen (8) und (10) berechneten Grenzwerthe S noch um den Einfluss S_t einer Temperaturänderung zu vergrössern sind.

e. Annahmen, behufs Vereinfachung der Berechnung von neu zu entwerfenden statisch unbestimmten Trägern.

74. Die genaue Berechnung von neu zu entwerfenden statisch unbestimmten Fachwerken wird durch den Umstand sehr erschwert, dass die Grössen X von den vorläufig unbekannten Stabquerschnitten oder — wenn es sich nur um den Einfluss der Belastung handelt — von dem gegenseitigen Verhältnisse dieser Querschnitte abhängen. Es müssen deshalb im allgemeinen die Querschnittsflächen zunächst abgeschätzt und hierauf an der Hand der Ergebnisse der schärferen Untersuchung geändert werden. Bei wesentlichen Abweichungen zwischen den so erhaltenen und den zuerst angenommenen Querschnitten muss die ganze Rechnung wiederholt werden.

In allen wichtigen Fällen lässt sich nun eine Abkürzung (ohne dass die Ergebnisse der Rechnung an Zuverlässigkeit einbüssen) dadurch erzielen, dass bei der Berechnung der Grössen X die Formänderungen der Füllungsglieder des statisch bestimmten Hauptsystems vernachlässigt und hinsichtlich der Gurtungen vereinfachende Annahmen (z. B. Einführung eines gleichen Querschnitts für die Stäbe einer oder auch beider Gurtungen) gemacht werden.

Es liege z. B. der in No. 57 untersuchte Fachwerkbogen vor. Behufs Bestimmung von X muss für den Zustand $X = -1$, welchem die Längenänderungen $(\Delta s)' = \frac{S's}{EF}$ entsprechen, ein Williot'scher Verschiebungsplan gezeichnet werden. Hierbei weise man jedem Füllungsstabe zunächst den Werth $(\Delta s)' = 0$ zu, was zur Folge hat, dass einem zwei Knoten i und k verbindenden Wandgliede ik im Verschiebungsplane eine zu ik rechtwinklige Gerade $i'k'$ entspricht, und ferner nehme man für alle Gurtstäbe gleich grosse Werthe $\frac{1}{FE}$ an. Setzt man nun $(\Delta s)' = S's$ $\left(\text{anstatt } \Delta s' = \frac{S's}{EF}\right)$, so liefert der Verschiebungsplan die EF-fachen Knotenpunktsverschiebungen; es bleibt aber die Gleichung $X = \frac{\Sigma P_m \delta'_m}{\delta'}$ bestehen, da in Zähler und Nenner die in gleichem

Maasse vergrösserten Verschiebungen δ'_m und δ' eingeführt werden. Hingegen ist die (einer gleichmässigen Temperaturerhöhung entsprechende) Formel $X_t = 1 \frac{\varepsilon t l}{\delta'}$ zu ersetzen durch $X_t = \frac{\varepsilon E F t l}{\delta'}$. Meistens sind die Feldweiten annähernd gleich und dann empfiehlt es sich, den Werth $\frac{s}{FE}$ für alle Gurtstäbe gleich gross anzunehmen und mit $(\Delta s)' = S'$ zu rechnen. Der Einfluss von t ist jetzt: $X_t = \frac{\varepsilon E F t l}{s \delta'}$. Will man für die obere und die untere Gurtung verschieden grosse Querschnitte F_o und F_u einführen und einem Obergurt-Stabe den Werth $(\Delta s)' = S'$ zuweisen, so muss man für einen Untergurtstab $(\Delta s)' = S' \frac{F_o}{F_u}$ annehmen und $X_t = \frac{\varepsilon E F_o t l}{s \delta'}$ setzen. Hervorzuheben bleibt aber, dass im allgemeinen unter F_o und F_u nicht die mittleren Querschnitte der oberen und unteren Gurtung zu verstehen sind und unter s nicht eine mittlere Stablänge, sondern dass häufig die Längenänderungen gewisser Stäbe von ganz hervorragendem Einflusse auf die Formänderung des Fachwerkes sind und die Abmessungen dieser Stäbe daher besonders ins Gewicht fallen. Erhält z. B. der betrachtete Bogenträger im Scheitel eine wesentlich geringere Höhe wie an den Kämpfern, so muss man für F_o, F_u und s die Gurtquerschnitte und die Stablänge im Scheitel wählen.

Indem wir hinsichtlich der bei den wichtigsten Fachwerken einzuführenden Annahmen auf den folgenden Abschnitt verweisen, heben wir noch hervor, dass die dort bevorzugte Benutzung der Biegungslinien den Vortheil bietet, bereits bei Berechnung der Werthe w häufig das besondere Gewicht einzelner Stäbe erkennen zu lassen. Es ist dieser Weg nach den Erfahrungen des Verfassers dann unbedingt vorzuziehen, wenn nur Lasten gleicher Richtung in Betracht kommen, wenn es sich also beispielsweise um den besonders wichtigen Fall *lothrechter* Lasten handelt.

In der Regel greifen die Lasten P in den Knotenpunkten des statisch bestimmten Hauptsystems an, und dieses Hauptsystem ist meistens ein einfaches Dreiecknetz. Werden die Gleichungen (V) auf Seite 163 angewendet, so handelt es sich zunächst darum, die den Belastungszuständen $X' = -1$, $X'' = -1$, . . . entsprechenden Biegungslinien (δ', δ''. . .) dieses Dreiecknetzes zu bestimmen.

Bezeichnet nun M'_m das durch die Ursache $X' = -1$ hervorgerufene Angriffsmoment für den Knotenpunkt m, so ergiebt sich für den

dem Punkte m gegenüberliegenden Gurtstab s_m die Spannkraft $S'_m = \mp \frac{M'_m}{r_m}$, wobei r_m die Länge des Lothes von m auf s_m bedeutet. Das obere Vorzeichen bezieht sich auf die obere, das untere auf die untere Gurtung. Das Gewicht w'_m des Knotens m ist (nach No. 47)

$$(1) \qquad w'_m = \mp \frac{(\Delta s_m)'}{r_m} = \mp \frac{S_m' s_m}{EF_m r_m} = + \frac{M_m' s_m}{EF_m r_m^2}$$

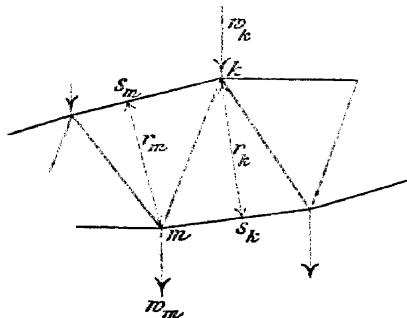



Fig. 185.

und ebenso erhält man für die Zustände $X'' = -1$, $X''' = -1, \ldots$ die Gewichte

$$w_m'' = \frac{M_m'' s_m}{EF_m r_m^2};$$

$$w_m''' = \frac{M_m''' s_m}{EF_m r_m^2}; \ldots$$

Hat E für alle Stäbe denselben Werth, so multiplicire man die w', w'', ... mit E. Ausserdem empfiehlt sich stets noch die Multiplikation mit einer vorläufig beliebigen Querschnittsgrösse F_c (die aber für alle w gleich genommen werden muss), womit sich dann

$$(2) \qquad w' = \frac{M_m' s_m}{r_m^2} \frac{F_c}{F_m}; \; w_m'' = \frac{M_m'' s_m}{r_m^2} \frac{F_c}{F_m}; \ldots .$$

ergiebt. Legt man diese Gewichte der Berechnung der Ordinaten δ', δ'', ... der den Zuständen $X' = -1$, $X'' = -1$, ... entsprechenden Biegungslinien zu Grunde, so muss man alle Glieder der Gleichungen V (mit Ausnahme der Glieder $\Sigma P_m \delta_m'$, $\Sigma P_m \delta_m''$ ....) mit EF_c multipliciren. Auch ist zu beachten, dass eine weitere Multiplikation mit ν erforderlich wird, sobald die Werthe w', w'' ... aus irgend einem Grunde mit ν multiplicirt werden.*)

Wendet man diese Regeln beispielsweise auf das einfach statisch unbestimmte Fachwerk an, so erhält man zur Berechnung von X die Gleichung:

---

*) Wäre z. B. das Fachwerk in Fig. 185 ein Parallelträger von der Höhe h, und hätten sämmtliche Gurtstäbe die gleiche Länge λ, so wäre $\frac{s_m}{r_m^2} = \frac{\lambda}{h^2}$. Man würde dann die w', w'', ... mit $\nu = \frac{h^2}{\lambda}$ multipliciren und einfacher $w' = M'_m \frac{F_c}{F_m}$ u. s. w. setzen.

$$FE_c L' = \Sigma P_m \delta_m' - X \Sigma S'^2 s \frac{F_c}{F} + EF_c \Sigma \varepsilon t S' s$$

und findet hieraus für den Einfluss einer Last P, für den Einfluss von Temperaturänderungen und für den Einfluss von Verschiebungen der Widerlager der Reihe nach die Werthe:

$$(3) \begin{cases} X = P_m \frac{\delta_m'}{\mathfrak{N}}; \quad X_t = \frac{\varepsilon E F_c \Sigma S' t s}{\mathfrak{N}}; \quad \Delta X = \frac{-EF_c L}{\mathfrak{N}}, \\ \text{wo } \mathfrak{N} = \Sigma S'^2 s \frac{F_c}{F}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen (2) und (3) werden wir im folgenden Abschnitte vorzugsweise anwenden.

f. Verwerthung von stellvertretenden, aus steifen Gliedern gebildeten Stabzügen.

75. Bedeutet X die Spannkraft eines Stabes ik, der als überzählig bezeichnet werden darf, durch dessen Beseitigung also das z-fach statisch unbestimmt angenommene Fachwerk seine Steifigkeit nicht verliert, und werden alle Spannkräfte auf die Form

$$(1) \qquad S = \mathfrak{S}_0 - \mathfrak{S}' X$$

gebracht, unter $\mathfrak{S}_0$ und $\mathfrak{S}'$ die den Zuständen $X = 0$ und $X = -1$ entsprechenden Werthe von S verstanden, so lautet die Arbeitsgleichung für den Zustand $X = -1$:

$$(2) \qquad 0 = \Sigma \mathfrak{S}' \Delta s,$$

wobei vorausgesetzt wird, dass Bewegungen der Widerlager ausgeschlossen sind und die Summe in (2) auch den Stab ik, dem $\mathfrak{S}' = -1$ entspricht, umschliesst. Die Einführung von $\Delta s = S\rho = (\mathfrak{S}_0 - \mathfrak{S}' X)\rho$, wo $\rho = s : EF$, und die Beachtung der Gleichungen (30) auf Seite 27 liefert den Ausdruck

$$(3) \qquad X = \frac{\Sigma P_m \delta_m'}{\Sigma \mathfrak{S}'^2 \rho},$$

in welchem δ_m' die Verschiebung bedeutet, die der Angriffspunkt m von P_m im Sinne von P_m erfährt, sobald auf das nunmehr $(z-1)$fach statisch unbestimmte Fachwerk nur die Ursache $X = -1$ wirkt.*)

Auf Grund dieses Gesetzes darf die Einflusslinie für jede Stabkraft und — wie ohne weiteres einleuchtet — auch für jeden nach einer festen Richtung wirkenden Stützenwiderstand als *Biegungslinie* (deren

---

*) Gleichung 3 hat dieselbe Form wie die früher für das einfach statisch unbestimmte Fachwerk aufgestellte Beziehung: $X = \frac{\Sigma P \delta'}{\Sigma S'^2 \rho}$; vgl. S. 166 u. 167.

Multiplikator in dem hier betrachteten Falle $= 1 : \Sigma \mathfrak{S}'^2 \rho$ ist) gedeutet werden, wobei nur die Einschränkung besteht, dass das Fachwerk in Folge Beseitigung des fraglichen Stabes nicht seine Steifigkeit und in Folge Aufhebung des fraglichen Stützenwiderstandes nicht seine Standfestigkeit einbüsst.*) Zu beachten ist allerdings, dass die Anwendung der Gleichung (3) zur Aufsuchung der X-Linie im allgemeinen ungeeignet ist, da sie die Auftragung der Biegungslinie für ein durch die Ursache $X = -1$ belastetes $(z-1)$fach statisch unbestimmtes Fachwerk erheischt; sie bietet also keinen Ersatz für den früher gewiesenen Weg: die Einflusslinien für z passend ausgewählte Grössen X', X'', ... mit Hilfe von z Biegungslinien eines *statisch bestimmten* Fachwerks zu ermitteln und hierauf die Einflusslinien aller übrigen Grössen mittels der Gleichgewichtsbedingungen zu gewinnen.

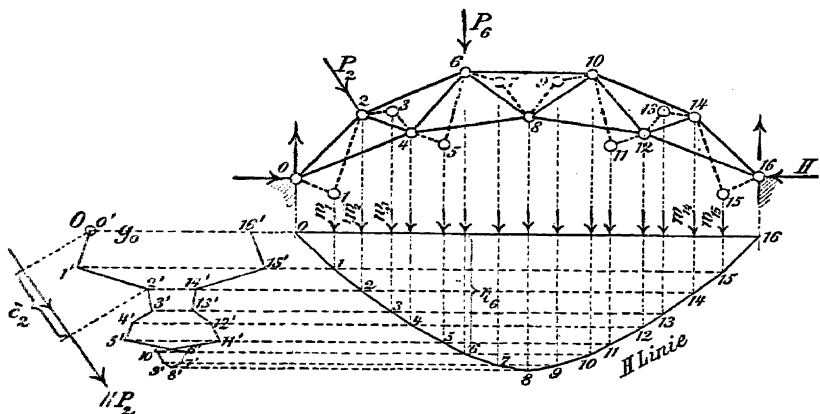



Fig. 186.

Trotzdem kann die in Gleich. (3) ausgesprochene Deutung jeder Einflusslinie als Biegungslinie von Vortheil sein, denn sie gestattet eine unmittelbare Verwerthung der in No. 51 behandelten Beziehungen zwischen den vollständigen Verschiebungsplänen und den Biegungslinien — Gesetze, die uns bei Beachtung des in No. 52 gelehrten Kunstgriffs der Einführung von stellvertretenden steifen Stabzügen in den Stand setzen, nach Auftragung der Einflusslinien für eine feste Lastrichtung schnell Figuren zu zeichnen, welche auch die Wirkung anders gerichteter Kräfte P bestimmen.

Zwei Beispiele werden genügen, dieses Verfahren zu erläutern. In Fig. 186 handelt es sich um die Ermittelung des rechtsseitigen

*) Vergl. No. 61.

wagerechten Stützenwiderstandes H eines Bogenträgers mit festen Kämpfergelenken. Nach Einschaltung der Knotenpunkte 1, 3, 5, 7, ... 15 sei die einer lothrechten Belastung entsprechende Einflusslinie nach einem der früher beschriebenen Verfahren aus der dem Zustande $H = -1$ entsprechenden Biegungslinie des aus starren Gliedern bestehenden Stabzuges 0-1-2-3-4- ... -16 abgeleitet und der besseren Uebersicht wegen von einer wagerechten Geraden aus aufgetragen. Zieht man dann durch die Punkte 0, 1, 2, ... der H-Linie wagerechte Geraden g_0, g_1, g_2, ..., wählt in g_0 einen beliebigen Pol $O \equiv 0'$ und zeichnet von $0'$ aus einen Linienzug $0'$ $1'$ $2'$ $3'$ ... $16'$, dessen Seiten rechtwinklig zu den entsprechenden Seiten des Stabzuges 0 1 2 3 ... 16 sind und dessen Eckpunkte in den Geraden g_1, g_2, g_3, ... liegen, so sind die Polstrahlen

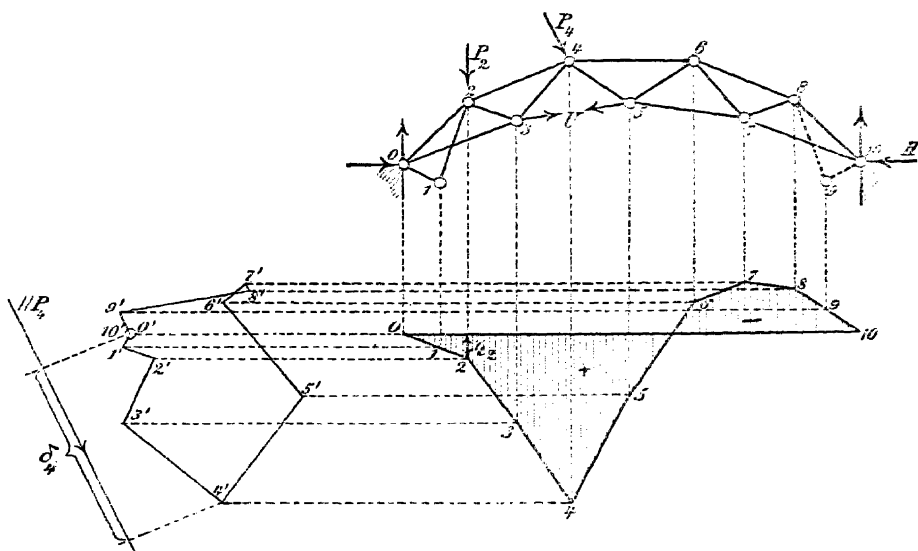



Fig. 187.

$O1'$, $O2'$ $O3'$, ... proportional den Verschiebungen, welche die Punkte $1'$, $2'$, $3'$, ... in Folge des Belastungszustandes $H = -1$ erfahren, und ihre Richtungen stimmen (auch dem *Sinne* nach) mit den Verschiebungsrichtungen überein. Greift also in 2 eine Last P_2 an und ist δ_2 die Projektion des Strahles $O2'$ auf die Richtung von P_2, so ist der Einfluss von P_2 auf H:

$$H = P_2 \delta_2.$$

Fig. 187 zeigt die Einflusslinie für die Spannkraft U im Untergurtstabe eines Bogenträgers der eben behandelten Art, setzt aber voraus, dass die Berechnung des Trägers auf Grund der Annahme starrer Fül-

lungsglieder durchgeführt werden darf. Bei Bestimmung der einer lothrechten Belastung entsprechenden H-Linie und der hieraus nach No. 73 abgeleiteten U-Linie wird dann nur die Einschaltung von zwei Knotenpunkten (1 und 9) und von vier starren Stäben erforderlich.*) Der Linienzug $0' \, 1' \, 2' \, 3' \ldots 9' \, 10'$ muss sich bei sorgfältiger Ausführung der Zeichnung schliessen, weil er als Verschiebungsplan für den Zustand $U = -1$ aufgefasst werden kann und für diesen Belastungsfall die Punkte 0 und 10 festliegen. Die Lasten P_2 und P_4 in Fig. 187 erzeugen, wenn die U-Linie einen Multiplikator μ besitzt,

$$U = \mu \, (P_2 \, \eta_2 + P_4 \, \delta_4).$$

§ 6.

Anwendung der Theorie der Formänderungen auf die Berechnung des statisch bestimmten Fachwerks.

76. Schreibt man einem Stabe $i - k$ eines durch beliebig gerichtete Lasten P beanspruchten, statisch bestimmten Fachwerks eine verschwindend kleine, willkürliche Längenänderung $\overline{\Delta s}$ zu, ermittelt die hierdurch bedingten Verschiebungen der Knotenpunkte und wendet auf diesen gedachten Bewegungszustand das Gesetz der virtuellen Verschiebungen an, so erhält man die Beziehung:

$$S \overline{\Delta s} = \Sigma P \overline{\delta}, \tag{1}$$

in welcher S die von den P hervorgerufene Spannkraft des fraglichen Stabes und $\overline{\delta}$ die Projektion der Verschiebung des Angriffspunktes von P auf die Richtung von P bedeutet. Wählt man $\overline{\Delta s} = 1$,**) so wird $S = \Sigma P \overline{\delta}$.

Soll auf diesem Wege die nach einer festen Richtung wirkende Seitenkraft C eines Stützenwiderstandes berechnet werden, so wird die Beweglichkeit des Fachwerks durch Beseitigung der jenem Widerstande entsprechenden Auflagerbedingung herbeigeführt. Auch kann man sich den fraglichen Stützpunkt in der Richtung von C mit einem ausserhalb des Fachwerks gelegenen festen Punkte durch einen Stab verbunden denken und diesem *Auflagerstabe* eine willkürliche verschwindend kleine Längenänderung zuschreiben; man erreicht dann, dass alle zu lösenden Aufgaben dieselbe Form annehmen.

---

*) Kommen lothrechte Füllungsstäbe vor, so beachte man die Lösung der Aufgabe 4 auf Seite 136.

**) Hier ist 1 die Einheit der in ausserordentlicher Vergrösserung darzustellenden, aber verschwindend klein zu denkenden Verschiebungen.

Die Gleichung (1) stellt einen besonderen Fall der in der Einleitung auf Seite 11 bewiesenen Formel (13) dar und wurde auch bereits im I. Bande in anderer Gestalt auf kinematischem Wege aus einer allgemeinen Momentengleichung gewonnen.*) Bei Anwendung derselben handelt es sich stets darum, den Geschwindigkeits- oder Verschiebungszustand derjenigen zwangläufigen kinematischen Kette darzustellen, in welche das statisch bestimmte Fachwerk in Folge Beseitigung des Stabes ik übergeht, eine Aufgabe, welche im I. Bande mit den Hilfsmitteln gelöst wurde:

1. Benutzung der um 90° gedrehten Geschwindigkeiten (an deren Stelle auch die ihnen proportionalen verschwindend kleinen Verschiebungen treten können, sobald nur vorausgesetzt wird, dass die ganze Bewegung in demselben Zeittheilchen vor sich geht),
2. Polbestimmungen.

Hierzu treten jetzt als neue Hilfsmittel:

a. der *Williot*'sche Verschiebungsplan (nach § 1),
b. das *Stabzugverfahren* (nach § 2 mit besonderer Beachtung von No. 52 und 75),
c. das *Seilpolygon* (nach § 3).

Eine Reihe von Aufgaben möge die Anwendung der uns nunmehr zur Verfügung stehenden Verfahren zeigen.

1. Aufgabe. Der in Fig. 188 abgebildete statisch bestimmte Fachwerkbalken sei mit Kräften P beliebiger Richtung belastet. Gesucht sei die Spannkraft D in dem Schrägstabe $4-7$.

Wir verwandeln das steife Fachwerk durch Beseitigung des Stabes $4-7$ in eine zwangläufige kinematische Kette, deren schraffirten starren Theil wir vorläufig als ruhend betrachten, schreiben dem Punkte 4 in der Richtung $7-4$ die Verschiebung $\overline{\Delta s}=1$ zu und bestimmen die Verrückungen der Knotenpunkte 4, 3, 2, 1 nach dem Verfahren von Williot. Dazu tragen wir von einem angenommenen Pole O aus die Strecke $O(4)=\overline{\Delta s}=1$ parallel zu $7-4$ auf, ziehen $6'-4'$**) $\perp$ $6-4$, ferner $(4)4' \perp O(4)$ und erhalten in dem Polstrahle $O4'$ nach Grösse, Richtung und Sinn die Verschiebung des Punktes 4. Nun legen wir

Punkt $3'$	fest mittels	$4'-3' \perp 4-3$	und	$5'-3' \perp 5-3$
„ $2'$	„ „	$4'-2' \perp 4-2$	„	$5'-2' \perp 5-2$
„ $1'$	„ „	$2'-1' \perp 2-1$	„	$3'-1' \perp 3-1$.

*) Die Uebereinstimmung jener Momentengleichung mit dem Gesetze der virtuellen Verschiebungen ist auf S. 211 u. 212 (Band I) ausgesprochen worden.

**) Die Punkte $5', 6', 7', \ldots 12'$ fallen, da sie ruhenden Knotenpunkten entsprechen, mit dem Pole O zusammen.

Schliesslich drehen wir das Fachwerk um das feste Auflagergelenk 12, damit die Auflagerbedingung bei 1 erfüllt werde. Die der Fachwerksfigur ähnliche Figur 1″ 2″ 3″ . . . ., deren nach O hin weisende Polstrahlen (nach Seite 61) die Knotenpunktverschiebungen in Folge dieser zweiten Bewegung darstellen, ist bestimmt durch die Bedingungen: es muss 12″ mit 12′ zusammenfallen, weil 12 in Ruhe bleibt, es muss 12″—1″ $\perp$ 12—1 sein, und es muss 1″ auf der Wagerechten durch 1′ liegen, weil das Gelenk 1 in einer Wagerechten geführt wird.

Handelt es sich nun um den Einfluss der Lasten P_4 und P_8, so bestimmen wir die Projektionen δ_4 und δ_8 der Verschiebungen 4″—4′

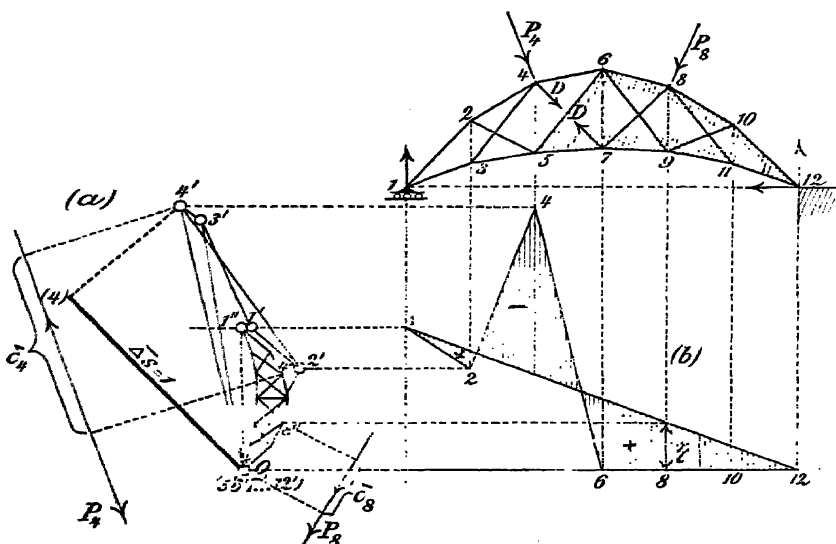



Fig. 188.

und 8″—8′ auf die Richtungen von P_4 beziehw. P_8 und erhalten mit Berücksichtigung der Vorzeichen

$$D = -P_4\,\delta_4 + P_8\,\delta_8\,.$$

In Fig. 188^b ist noch die Einflussfläche für die lothrechte Belastungsrichtung unter der Voraussetzung oben angreifender P gezeichnet worden. Die Punkte 1, 2, 4, 6 . . . liegen auf den Wagerechten durch 1′, 2′, 4′, 6′, . . . Der auf die Wagerechte durch O bezogene Linienzug 1—2—4—6 giebt die lothrechten Verschiebungen der oberen Gurtung für den Fall an, dass der schraffirte Theil des Fachwerks ruht, und die Ordinaten der Geraden 1—12 liefern die lothrechten Verschiebungen in Folge Drehung des ganzen Fachwerks um Knotenpunkt

12. (Vergl. Band I, Seite 220 und 221). Wird nur diese Einflussfläche verlangt, so braucht die Figur 1″ 2″ . . . 12″ nicht gezeichnet zu werden.

Zur Uebung untersuche man in gleicher Weise die Spannkräfte in den Gurtungen und die Spannkraft der Mittelvertikalen. Auch vertausche man in Fig. 188 die beiden Auflager.

2. Aufgabe. Gesucht ist die einer lothrechten Belastung entsprechende Einflusslinie für die Spannkraft V des Stabes 7 — 8 des in Fig. 189 abgebildeten statisch bestimmten Doppelfachwerks.

Der starre schraffirte Theil wird zunächst ruhend gedacht und dem Stabe 8 — 7 die Längenänderung $\overline{\Delta s} = 1$ zugeschrieben; dieselbe

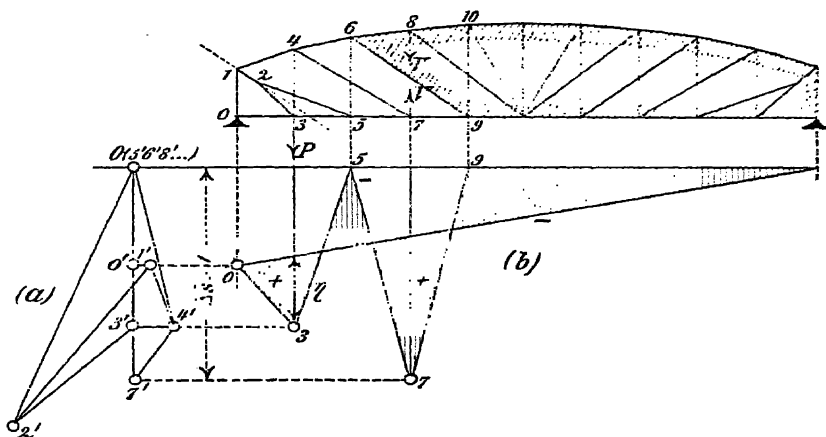



Fig. 189.

erzeugt, da Stab 7 — 9 wagerecht ist, eine lothrechte Verschiebung von 7 um $\overline{07'} = \overline{\Delta s} = 1$. Die Punkte 5′, 4′, 3′, 2′, 1′, 0′ des Verschiebungsplanes werden der Reihe nach bestimmt mittels:

$$6'—5' \perp 6—5 \text{ und } 7'—5' \perp 7—5;$$
$$6'—4' \perp 6—4 \text{ und } 7'—4' \perp 7—4;$$
$$5'—3' \perp 5—3 \text{ und } 4'—3' \perp 4—3;$$
$$5'—2' \perp 5—2 \text{ und } 3'—2' \perp 3—2;$$
$$2'—1' \perp 2—1 \text{ und } 4'—1' \perp 4—1;$$
$$1'—0' \perp 1—0 \text{ und } 3'—0' \perp 3—0.$$

Schliesslich wird die in der Figur 189[b] durch Schraffirung hervorgehobene Biegungsfläche gezeichnet; sie liefert $V = \Sigma P\eta$. Bei Auftreten schräger Kräfte wäre noch (wie bei Lösung der Aufgabe 1) die Figur 0″ 1″ 2″ 3″ . . . einzutragen. Die Lage des beweglichen Auflagers ist dann nicht mehr gleichgültig.

Es wird dem Leser die Untersuchung einer Diagonale und eines Gurtstabes empfohlen. Bei der Berechnung eines vollständigen Fachwerks beachte man die zwischen den Stabkräften bestehenden Beziehungen, welche stets zu Vereinfachungen führen. Vergl. Band I Seite 223 bis 226; auch No. 72 des vorliegenden Bandes.

3. Aufgabe. Gesucht ist die Spannkraft V im Stabe i—k eines von beliebig gerichteten Kräften P_m ergriffenen Dreigelenk-Bogens, Fig. 190.

Da sich die Drehpole der zwangläufigen kinematischen Kette, in welche das Fachwerk nach Wegnahme des Stabes i—k übergeht, im

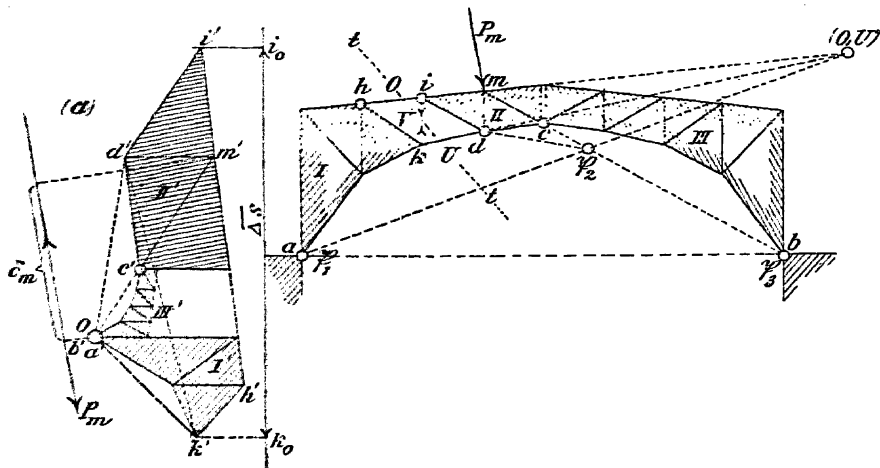



Fig. 190.

vorliegenden Falle sehr schnell bestimmen lassen, so bereitet es keine Schwierigkeiten, die Verschiebungen sofort unter Berücksichtigung der wirklichen Auflagerbedingungen zu ermitteln. Jene Kette besteht aus den drei starren Scheiben I, II, III und aus den Gurtstäben O und U. Die Pole $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_3$ von I und III fallen mit den Kämpfergelenken a und b zusammen und der Pol $\mathfrak{P}_2$ von II ist (nach Band I, Seite 227) der Schnittpunkt der Geraden bc mit der Geraden, welche das Gelenk a und den Treffpunkt der Gurtstäbe O und U verbindet.

Schreiben wir nun dem Punkte d der Scheibe II eine beliebig grosse Verschiebung zu, die aber rechtwinklig zu der Geraden sein muss, welche den Punkt d mit dem Pole $\mathfrak{P}_2$ der Scheibe II verbindet und die in Fig. 190ª durch den Strahl Od' dargestellt ist, so erhalten wir den irgend einem anderen Punkte m von II entsprechenden Punkt m', indem wir $Om' \perp \mathfrak{P}_2 m$ und $d'm' \perp dm$ ziehen, wodurch dann die der Scheibenfigur II ähnliche Figur II' bestimmt ist. Die Figur III' ist

jetzt durch den Punkt c' und den mit O zusammenfallenden Punkt b' bestimmt, ferner die Figur I' durch den mit O sich deckenden Punkt a' und die Bedingungen: $a'k' \perp ak$, $d'k' \perp dk$, worauf die Zeichnung mittels der Bedingung $i'h' \perp ih$ geprüft werden kann. Die Projektion $i_0 k_0$ von $i'k'$ auf die Richtung von V bestimmt nun die gegenseitige Verschiebung $\overline{\Delta s}$ des Punktepaares i, k; sie ist in Fig. 190[a] positiv, weil i_0 oberhalb k_0 liegt, entsprechend i oberhalb k, und es besteht daher zwischen den Kräften V und P die Beziehung: $+V\overline{\Delta s} = \Sigma P\delta$, so dass man z. B. für den Einfluss der Last P_m (der ein negatives δ_m entspricht) den Werth

$$V = -P_m \frac{\delta_m}{\overline{\Delta s}}$$

erhält.

Dem Leser wird empfohlen, noch die Drehpole der beiden Stäbe O und U zu bestimmen und hieraus Proben für die Beurtheilung des Verschiebungsplanes abzuleiten; auch möge er selbst versuchen, diesen Plan für $\overline{\Delta s} = 1$ zu zeichnen. Sodann empfiehlt sich zur Uebung die Untersuchung der Spannkräfte in einer Diagonale und in einem Gurtstabe.

Fig. 191.

4. Aufgabe. Der in Fig. 191 dargestellte, statisch bestimmte durchgehende Balken besitzt ein festes und zwei auf wagerechter Bahn

bewegliche Auflagergelenke. Es soll die Einflusslinie für die Spannkraft D im Stabe ab gezeichnet werden. Die Lasten greifen oben an und sind lothrecht.

Die zwangläufige kinematische Kette, welche man nach Wegnahme des Stabes ab erhält, besteht aus den starren Scheiben I, III, IV und aus 4 Stäben, von denen wir ah und df besonders hervorheben und mit II und V bezeichnen wollen. Die gesuchte Einflusslinie wird von den Geraden I', II', III', IV' gebildet, welche den Kettengliedern I, II, III, IV entsprechen und deren Nullpunkte in den Lothrechten durch die Drehpole (I), (II), (III), (IV) jener Glieder liegen. Durch diese Bedingung ist die Gestalt der Einflusslinie bestimmt. Pol (IV) fällt mit B zusammen; (V) liegt in der Senkrechten durch f, weil Punkt f wagerecht geführt ist, ferner in der Geraden Bd, weil d der Pol $IV \cdot V$ von IV gegen V ist und die 3 Pole (IV), $IV \cdot V$ und (V) in dieselbe Gerade fallen. Der Pol von III gegen V ist durch den unendlich fernen Schnittpunkt der Seiten cd und ef des Gelenkvierecks $cdfe$ bestimmt und (III) liegt im Treffpunkte der Verbindungsgeraden $(IV)\,c$ und $(V) — III \cdot V$.*) Jetzt findet man im Schnittpunkte von ah und ib den Pol $I \cdot III$ und hierauf (I) mittels der Bedingungen, dass (I) in der Senkrechten durch A und in der Geraden $(I) — I \cdot III$ liegen muss, und schliesslich erhält man (II) als Schnittpunkt der Geraden $(I)\,a$ und $(III)\,h$.

Hat man auf diese Weise die Einflusslinie, deren eine Ordinate willkürlich gewählt sei, gefunden, so bestimme man die den Endpunkten a, b des fraglichen Stabes entsprechenden Punkte a_0, b_0 der Geraden I' bezw. III', nehme in der Nulllinie einen Verschiebungs-Pol O an, und ziehe $Oa' \perp (I)a$ und $Ob' \perp (III)b$ bis zu den Wagerechten durch a_0 bezw. b_0. Es geben dann die Strecken Oa' und Ob' die der gezeichneten Einflusslinie entsprechenden Verschiebungen der Punkte a' und b' an und die Projektion von $a'b'$ auf eine Parallele zu ab die Aenderung $\overline{\Delta s}$ der Stablänge ab, und man erhält nun bei positivem $\overline{\Delta s}$:

$$D = \frac{1}{\overline{\Delta s}} \Sigma P\eta .$$

Eine andere Darstellungsweise der D-Fläche stützt sich auf den Umstand, dass die Spannkraft D in Folge rechts vom Knoten h liegen-

*) Man beachte, dass c, a, h beziehungsweise die Pole von III gegen IV, von II gegen I und von II gegen III sind und dass es sich um die wiederholte Anwendung des Satzes handelt: Drehen sich zwei Glieder A, B gegen ein festgestelltes Glied C um die Pole (AC) bezw. (BC) und ist (AB) der Pol von A gegen B, so liegen die Pole (AC) (BC) (AB) in einer Geraden. Die Doppelziffern haben wir in Fig. 191 möglichst vermieden.

der Lasten proportional dem Stützenwiderstande A ist und dass man daher die D-Fläche auch bestimmen kann, indem man die Ordinate AA' der Geraden III' gleich der Spannkraft macht, welche im Stabe ab durch eine Auflagerkraft $A = 1$ erzeugt wird. Es gilt dann die Gleichung $D = \Sigma P\eta$, und es muss sich die zur Probe einzutragende Projektion $\overline{\Delta s}$ von $a'b'$ auf die Richtung von D gleich 1 herausstellen. Ferner muss (nach Band I, Seite 238) die Strecke $a_0 a_0'$ gleich der Spannkraft [D] sein, welche man durch Zerlegung einer in a angreifend gedachten $P = 1$ nach den Richtungen der Stäbe ab und ah erhält. Ferner verdient hervorgehoben zu werden, dass der links vom Nullpunkte N gelegene Theil der D-Fläche mit der D-Fläche eines einfachen Balkens von der Stützweite AN übereinstimmt.

Sehr lehrreiche Uebungsaufgaben liefert die Anwendung der eben gezeigten Verfahren auf ähnlich ausgebildete Balken mit mehreren Oeffnungen. Die Figuren 192 bis 194 zeigen verschiedene Anordnungen, die sich nur durch die Gestalt der Gurtungen und die Lage der von den Mittelstützen ausgehenden Schrägstäbe, welche letztere auch nach Fig. 195 durch gleichwerthige schräge Lager ersetzt werden dürfen, von einander unterscheiden. Zu beachten ist, dass, falls nur lothrechte Lasten auftreten, es gleichgültig bleibt, welches Auflagergelenk das feste ist, weshalb es sich empfiehlt, in jedem einzelnen Falle eine zu möglichst einfachen Polbestimmungen führende Annahme zu machen. Würde man z. B. in Fig. 191 das Gelenk C als fest betrachten

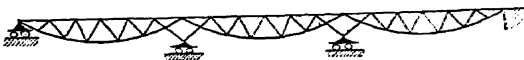



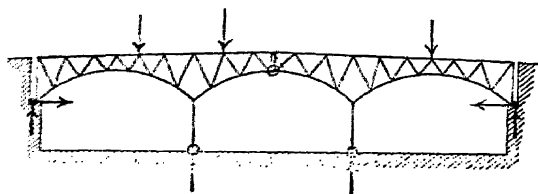
Fig. 192.

Fig. 193.

Fig. 194.

Fig. 195.

und dafür B wagerecht geführt annehmen, so würde sich der Pol von IV, den wir jetzt mit $(IV)'$ bezeichnen wollen, als Schnittpunkt der Geraden fd mit der Senkrechten durch B ergeben und $(III)'$ als Schnittpunkt der Geraden $(IV)'c$ und fe; und dieser Punkt $(III)'$ würde in der Lothrechten durch (III) liegen, mithin denselben Nullpunkt N liefern. Das gleiche gilt von $(II)'$ (dessen Aufsuchung wir dem Leser überlassen), so dass ausser dieser Zulässigkeit der Vertauschung der Lager auch eine ganze Reihe von Zeichnungsproben hergeleitet werden können. Aber selbst beim Auftreten schräg gerichteter Lasten erzielt man häufig Vereinfachungen, wenn man zunächst die Einflusslinien für die lothrechte Richtung zeichnet, hierbei den Vortheil der Auflagervertauschung ausnutzt und schliesslich aus den Einflusslinien nach dem in Fig. 191[a] durch die Eintragung der Strahlen Oa' und Ob' gezeigten Verfahren (natürlich jetzt mit Berücksichtigung der wirklichen Auflagerbedingungen) die Williot'schen Figuren entwickelt.

Fig. 196.

Der Verfasser hat bereits im ersten Bande der Graphischen Statik (Seite 233 u. 234), desgleichen im Jahrgange 1887 (II) der Schweizerischen Bauzeitung (Seite 130) die hier vorgeführte neue Art statisch bestimmter Balken veröffentlicht, in der letztangezogenen Quelle auch eine ähnliche Anordnung für Bogenträger mit mehreren Oeffnungen (Fig. 196). Fast volle zwei Jahre nach jener Mittheilung ist Herrn Regierungsbaumeister Offermann in Berlin die Stützung nach Fig. 195 in Deutschland patentirt worden, obgleich Pendelstützen und Gleitlager im Brückenbau längst als gleichartige Stützungen gelten.

5. Aufgabe. Es sei die Einflusslinie für die Spannkraft V im Stabe $3 - 4$ des in Fig. 197 abgebildeten einfachen Balkens unter Voraussetzung lothrechter Belastung nach einem der im I. Bande an-

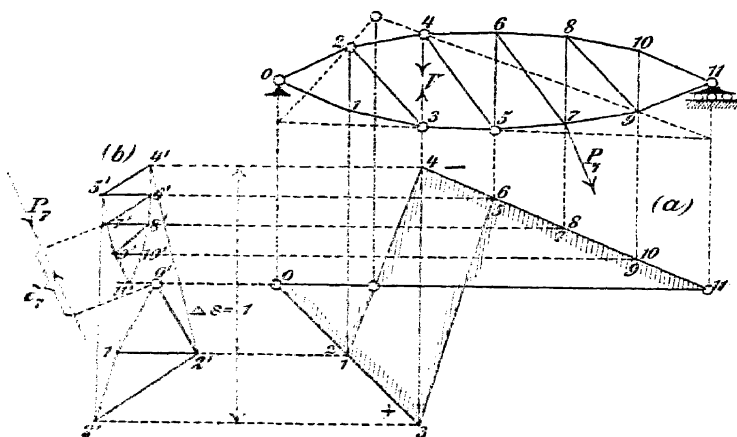



Fig. 197.

gegebenen Verfahren gezeichnet worden; sie besteht aus den drei Geraden $0-2$, $2-4$, $4-11$ oder den drei Geraden $0-3$, $3-5$, $5-11$, je nachdem die über den Träger wandernde Lasteinheit an der oberen oder an der unteren Gurtung wirkt. Gesucht sei der Einfluss schräger, oben sowohl als unten angreifender Lasten.

Man zeichne von einem beliebigen, in der wagerecht gewählten Nulllinie $0-11$ angenommenen Pole $0'$ aus die aus Geraden bestehenden Linienzüge $0'-2'-4'-6'-8'-10'-11'$ und $0'-1'-3'-5'-7'-9'-11'$, welche der oberen bezw. unteren Gurtung entsprechen, so zwar, dass $0'-2' \perp$ Stab $0-2$, $2'-4' \perp 2-4 \ldots$, $0'-1' \perp 0-1$,

1′—3 ∥ 1—3, ... ist, und dass ferner die Punkte 1′, 2′ 3′, . . . auf den Wagerechten durch die entsprechenden Punkte 1, 2, 3, ... der Einflusslinie liegen. Dann sind (nach No. 51 u. 52) die von 0′ aus nach den Punkten 1, 2, . . . gezogenen Strahlen proportional den Verschiebungen, welche die Knoten 1, 2, . . . der zwangläufigen Kette erfahren, in welche das Fachwerk in Folge Wegnahme des Stabes 3—4 übergeht. Ist δ_7 die (hier negative) Projektion von 0′7′ auf die Richtung von P_7, so ist der Einfluss von P_7:

$$V = - P_7 \, \delta_7 .$$

Man vergleiche auch die Untersuchung in No. 76.*)

Fig. 197[b] kann natürlich auch als Williot'scher Verschiebungsplan der aus zwei starren Scheiben und zwei Stäben bestehenden kinematischen Kette erhalten werden, und endlich lässt sich Figur 197[b] noch mittels einer einfachen statischen Untersuchung bestimmen. Es stellt z. B. der Polstrahl 0′3′ diejenige Spannkraft V vor, welche im Stabe 3—4 entsteht, sobald auf das Fachwerk nur eine im Knoten 3 angreifende Last wirkt, deren Richtung rechtwinklig zur Verbindungsgeraden der Knotenpunkte 0 und 3 ist. Durch diese Spannkraft, die auf irgend einem Wege festgestellt wird, ist die Figur 0′—1′—3′—2′ vollständig bestimmt. Nun zieht man 2′—4′ ∥ 2—4 bis zu einer Wagerechten, die von 3′ den senkrechten Abstand *Eins* hat, hierauf 4′—5′ ∥ 4—5 und 3′—5′ ∥ 3—5, und schliesslich zeichnet man die Figur 4′—5′—7′—9′—11′—10′—8′—6′—4′. Punkt 11′ muss (bei sorgfältiger Zeichnung) in die Wagerechte durch 0′ fallen.**)

6. Aufgabe. Nach dem in der vorigen Aufgabe angewandten Verfahren ist in Figur 198 der Einfluss schräger Lasten auf die Spannkraft O des Obergurtstabes 1—3 des Versteifungsfachwerks eines Gelenkbogens untersucht worden, indem zuerst die Einflusslinie für die lothrechte Belastung auf die im I. Bande § 52 angegebene Weise gezeichnet wurde. Der dem fraglichen Stabe gegenüberliegende Knotenpunkt 4 liegt im Abstande h *unterhalb* der die Auflagergelenke verbindenden Geraden, und es wurde daher das Maass h vom entsprechenden Bogenpunkt b aus *nach oben* angetragen, hierauf durch 0 und den Endpunkt der Strecke h eine Gerade gelegt, welche die Verbindungslinie 14—c in E trifft. Lothrecht unter E liegt der Nullpunkt der

*) Für die Projektion der Strecke 3′—4′ auf die Richtung des Stabes 3—4 muss sich der Werth $\overline{\Delta s} = 1$ ergeben. Dass der gegenseitige Abstand der Punkte 3 und 4 der Einflusslinien gleich 1 ist, erhellt auch aus der Untersuchung auf Seite 338 des I. Bandes.

**) Zur Herleitung von Fig. 179[b] aus 197[a] genügt schon die Bestimmung des Vierecks 2′ 3′ 4′ 5′.

Einflusslinie, welche aus drei Geraden besteht, deren mittelste auf der Senkrechten durch 0 die Strecke $1 \frac{x}{r}$ abschneidet, wo r das Loth von 4 auf O bedeutet. Diese Einflusslinie gilt für oben und unten angreifende Lasten und kann nun zur Bestimmung der Figur 198[b] benutzt werden. O ist der in der Nulllinie angenommene Pol. $14'$ fällt

Fig. 198.

mit O zusammen. Sollen nur die unten angreifenden Lasten berücksichtigt werden, so genügt es, den der unteren Gurtung entsprechenden Linienzug $14'\ 13'\ 11'\ 9'\ 7'\ 6'\ 4'\ 2'\ 0'$ einzuzeichnen. Der Einfluss von P_{11} auf O ist z. B.

$$O = + P_{11}\,\delta_{11}.$$

Der Verfasser empfiehlt, dieses Verfahren zur Uebung auch auf Gerber'sche Balken, Dreigelenkbögen und versteifte Kettenbrücken anzuwenden; man wird finden, dass es in sehr vielen Fällen zweckmässig ist, behufs Beurtheilung der Wirkung schräger Lasten von den Einflusslinien für die lothrechte Belastung auszugehen.

7. Aufgabe. Es soll die Einflusslinie für die Spannkraft D_m der rechtssteigenden Diagonale $(m - 1) - m$ eines einfachen Balkens mit Hilfe eines Seilpolygons bestimmt werden, Fig. 199. Die Lasten sind lothrecht.

Der Länge d_m des fraglichen Stabes schreibe man die Aenderung $\Delta d_m = 1$ zu, berechne (nach Seite 105) die Gewichte

$$w_{m-1} = \frac{\Delta d_m \sec\varphi_m}{h_{m-1}} = \frac{\sec\varphi_m}{h_{m-1}} \text{ und } w_m = -\frac{\Delta d_m \sec\varphi_m}{h_m} = -\frac{\sec\varphi_m}{h_m},$$

zeichne mit der Polweite 1 das Seilpolygon *I II III* und trage die Schlusslinie *AB* ein. Greifen die Lasten oben an, so ziehe man noch die dem Felde $(m-2)-m$ entsprechende Gerade *CE*, um in der schraffirten Fläche der Figur 199^b die gesuchte Einflussfläche zu erhalten.

Da nun das in Figur 199^b mit *EFH* bezeichnete Dreieck dem schraffirten Dreiecke der Fig. 199^d ähnlich ist, so folgt

$$\text{Strecke } \overline{EF} = w_{m-1}\,\frac{\lambda_m}{1} = \frac{\lambda_m \sec\varphi_m}{h_{m-1}} = \frac{d_m}{h_{m-1}}$$

und ebenso erhält man:

$$\text{Strecke } \overline{HG} = \frac{d_m}{h_m}.$$

Mit Hilfe dieser beiden Strecken kann man die Einflussfläche bestimmen, ohne das Kräftepolygon zu zeichnen. Auch kommt man mit

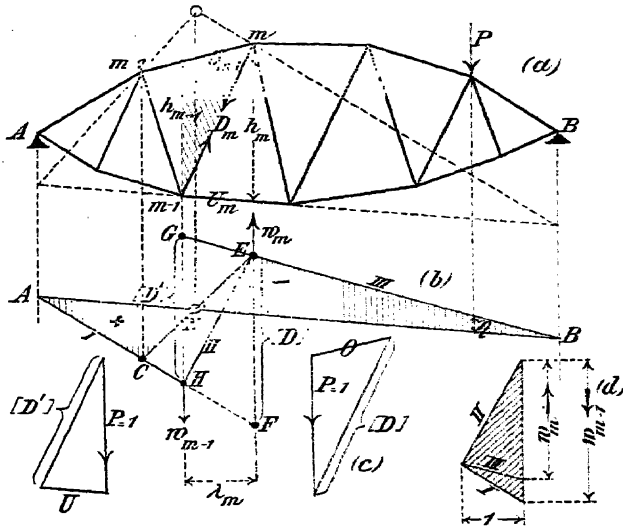



Fig. 199.

einer der Strecken aus, wenn man die im I. Bande, Seite 237, gezeigte Ermittlung des Nullpunktes *N* zu Hilfe nimmt, welche in Fig. 199 für den Fall oben angreifender Lasten eingetragen worden ist.

Zerlegt man die Lasteinheit nach den Richtungen O_{m-1} und D_m und bezeichnet den absoluten Werth der zu D_m parallelen Seitenkraft mit $[D]$, so findet man aus der Aehnlichkeit des Kräftedreiecks mit

dem im Trägernetz schraffirten Dreiecke:

$$[D] : 1 = d_m : h_{m-1},$$

und überzeugt sich, dass Strecke $\overline{EF} = [D]$ ist, ein Gesetz, welches bereits im I. Bande auf anderem Wege gewonnen wurde. Ebenso weist man nach, dass Strecke $\overline{GH} = [D']$ ist, wobei $[D']$ durch Zerlegung von $P = 1$ nach den Richtungen D_m und U_m gewonnen wird.

Zur Uebung zeichne der Leser nach diesem Verfahren auch die Einflusslinie für einen lothrecht stehenden Füllungsstab. Dass sich die Einflusslinien für den Gerber'schen Balken, den Dreigelenkbogen und die versteiften Ketten und Gelenkbögen aus den Linien für den einfachen Balken ableiten lassen, ist im I. Bande erörtert worden.

Zu einer sehr einfachen Darstellung der Einflusslinie für die Spannkraft D im Füllungsstabe $F_1 F$ (vergl. Fig. 200, welche oben angreifende Belastung voraussetzt) gelangt man auch, wenn man diese Linie als Seilpolygon der Gewichte $w_1 = \Delta(\alpha + \beta)$ und $w_2 = \Delta\gamma$ auffasst, wo-

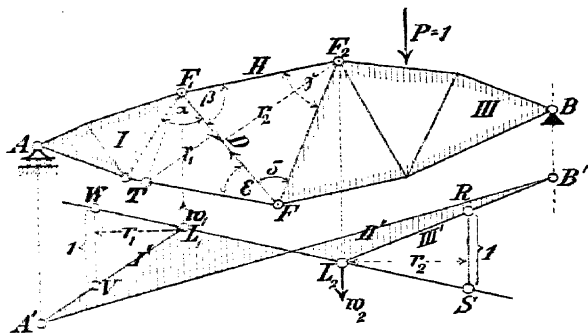



Fig. 200.

bei $\Delta(\alpha + \beta)$ und $\Delta\gamma$ die durch die Aenderung $\Delta d = 1$ der Stablänge $d = \overline{F_1 F}$ bedingten Winkeländerungen bedeuten. Man erhält (nach Gleich. 1, Seite 90)

$$w_2 = \Delta\gamma = \frac{\Delta d}{d}\left(\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\delta\right) = \frac{1}{r_2}$$

$$w_1 = \Delta\alpha + \Delta\beta = -\frac{\Delta d}{d}\operatorname{cotg}\varepsilon - \frac{\Delta d}{d}\operatorname{cotg}\delta = -\frac{1}{r_1},$$

wo (nach Ziehen von $F_1 T \parallel F_2 F$) r_2 und r_1 die Längen der von den Punkten F_2 bezw. T auf den Stab $F_1 F$ gefällten Lothe sind. Die fragliche Einflusslinie besteht aus den Geraden I', II', III', entsprechend den Gliedern I, II, III. Auf einer Senkrechten, welche von L_2 den

Abstand r_2 hat, schneiden die Seiten II' und III' die Strecke $\overline{RS}$ $= w_2 \frac{r_2}{H}$ ab, wenn H die Polweite des Seilpolygons bedeutet. Da nun $H = 1$ ist, so ergiebt sich $\overline{RS} = 1$, und ebenso folgt, dass I' und II' auf einer Senkrechten im Abstande r_1 von L_1 die Strecke 1 abschneiden müssen. Hiernach lässt sich die Einflusslinie sehr schnell zeichnen. Man nehme II' beliebig an und bestimme I' und II' mit Hilfe jener beiden Senkrechten.

Wir empfehlen dem Leser, in gleicher Weise auch den Fall unten angreifender Belastung zu behandeln.

Literatur zum I. Abschnitt.

1. **Mohr,** *Beitrag zur Theorie des Fachwerks*, Zeitschr. d. Arch. u. Ing. Ver. zu Hannover 1875, S. 17. Hier wird zum ersten Male die Biegungslinie des Fachwerks als Seilpolygon behandelt.
2. **Williot,** *Notations pratiques sur la statique graphique*, Publications scientifiques industrielles, 1877; enthält die Begründung der von uns als das Williot'sche Verfahren bezeichneten Darstellungsweise der Verschiebungen.
3. **Herzmansky,** *Durchbiegung eiserner Fachwerke*, Zeitschr. d. österr. Ing. u. Arch. Ver. 1878, S. 185—189.
4. **Steiner, F.,** *Studien über Fachwerke*, Techn. Blätter 1880, S. 134. Unter anderem wird die lothrechte Biegungslinie einer wagerechten Gurtung als Seilpolygon der Winkeländerungen $\Delta\vartheta$ dargestellt.
5. **Skibinski,** *Das Deformationspolygon und dessen Anwendung zur graphischen Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke*. Zeitschr. d. österr. Ing. u. Arch. Ver. 1883, S. 23.
6. **Mohr,** *Beitrag zur Theorie des Fachwerks*, Civilingenieur 1885.
7. **Müller-Breslau,** *Beitrag zur Theorie des Fachwerks*, Zeitschr. d. Arch. u. Ing. Ver. zu Hannover, 1885. Berechnung der Gewichte w auf die im § 3 des vorliegenden Buches gezeigte Weise und Benutzung der Biegungslinien zur Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke.
8. **Müller-Breslau,** *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre*, 1886. Die §§ 5—11 behandeln die Darstellung und Verwerthung der Biegungslinien.
9. **Müller-Breslau,** *Beitrag zur Theorie der ebenen Träger*, Schweiz. Bauz. 1887, Band IX, S. 121; Band X, S. 129 und 1888, Bd. XI, S. 45. In diesen Aufsätzen, welche sich mit statisch bestimmten Trägern beschäftigen (vgl. § 6 des vorliegenden Buches) wird zum ersten Male auf die Darstellung der Verschiebungen (u. Geschwindigkeiten) kinematischer Ketten mittels des Williot'schen Verfahrens hingewiesen.
10. **Mohr,** *Ueber Geschwindigkeitspläne und Beschleunigungspläne*, Civilingenieur 1887. Zeigt die Anwendung des Williot'schen Verfahrens auf die Darstellung der Geschwindigkeiten und schliesslich auch der Beschleunigungen kinematischer Ketten.

11. **Müller-Breslau**, *Berechnung statisch bestimmter ebener Träger mit Hilfe der geometrischen Bewegungslehre*, Zeitschr. d. Arch. u. Ing. Ver. zu Hannover 1888, S. 91. Zeigt u. A. die Berechnung der Fachwerke mit Hilfe von Williot'schen Verschiebungsplänen.

12. **Ovazza**, *Sul calcolo delle deformazioni dei sistemi articolati*, Atti della Academia delle Scienze di Torino, vol. XXIII, 1888.

13. **Ovazza**, *Sul calcolo delle freccie elastice delle travi reticolari*, Atti della Academia delle Scienzi di Torino, vol. YXIII, 1888.

14. **Müller-Breslau**, *Beitrag zur Theorie der ebenen, elastischen Träger*, Zeitschr. d. Arch. u. Ing. Ver. zu Hannover, 1888, S. 605. Einführung des Stabzugverfahrens; vergl. § 2 des vorliegenden Buches.

15. **Land**, *Kinematische Theorie der statisch bestimmten Träger*, Zeitschr. d. österr. Ing. u. Arch. Ver., 1888, S. 11 u. 162 stützt sich hauptsächlich auf die Anwendung der Williot'schen Verschiebungspläne kinematischer Ketten. Ein Anhang beschäftigt sich mit den Biegungslinien elastischer Stabzüge; dabei ist die Ersetzung der elastischen Gebilde durch Gliederketten aus starren Scheiben beachtenswerth. Diese Umwandlung verdankt ähnlichen Gründen ihre Entstehung, wie der von uns in No. 52 Seite 131 des vorliegenden Buches eingeführte stellvertretende Stabzug; während aber die Form dieses Stabzuges einmal angenommen und dann für alle Belastungszustände beibehalten wird (was namentlich für die Anwendungen in No. 75 sehr wichtig ist), ändert die von Land benutzte Gliederkette mit wechselnder Belastung ihre Gestalt.

16. **Müller-Breslau**, *Beiträge zur Theorie der ebenen, elastischen Träger*, Centralblatt der Bauverwaltung, 1889, zeigt u. A. die auf Seite 153—163 des vorlieg. Buches angegebenen Umformungen der Elasticitätsgleichungen.

II. Abschnitt.

Formeln, Regeln und Beispiele für die Berechnung der wichtigsten statisch unbestimmten Fachwerke.

Mit Hilfe der im § 5 enthaltenen Untersuchungen lässt sich die Berechnung jedes ebenen statisch unbestimmten Fachwerks, das durch Kräfte von beliebiger Richtung beansprucht wird, durchführen. Zweck des vorliegenden Abschnitts ist es nun, die aus jenen allgemeinen Betrachtungen für die wichtigsten Trägerarten und für den Fall *lothrechter Lasten* sich ergebenden Formeln und Regeln in solcher Weise zusammenzustellen und zu erläutern, dass sie auch von denjenigen ausübenden Ingenieuren bequem benutzt werden können, denen es an Zeit fehlt, sich die allgemeine Theorie des Fachwerks anzueignen. *Dabei soll von allen die Rechnung vereinfachenden Annahmen, soweit dieselben zulässig sind,* Gebrauch gemacht, und der Werth der angenäherten Theorie durch vergleichende Zahlenrechnungen geprüft werden.

§ 7.

Der Bogen mit zwei Gelenken.

a. Bestimmung des Horizontalschubs.

77. Allgemeines Verfahren. Wirkt auf einen Fachwerkbogen mit 2 Kämpfergelenken und ohne Scheitelgelenk eine Einzellast P in den Abständen a und b von den Auflagerlothrechten (Fig. 201), so entstehen Stützenwiderstände, deren jede sich in eine lothrechte Seitenkraft A bezieh. B und in eine Seitenkraft H' nach der Richtung der Schlusslinie AB zerlegen lässt. Die wagerechte Seitenkraft von H' (d. i. der *Horizontalschub*) ist

$$H = H' \cos \alpha,$$

wobei α den Neigungswinkel der Schlusslinie bedeutet.

Die Kräfte A und B stimmen mit den Auflagerwiderständen eines einfachen Balkens überein und sind

$$A = \frac{Pb}{l}; \quad B = \frac{Pa}{l}.$$

Die statisch nicht bestimmbare Kraft H ist von den Längenänderungen sämmtlicher Stäbe abhängig und wird, *falls die für das Ergebniss unwesentlichen Formänderungen der Füllungsstäbe vernachlässigt werden,* wie folgt ermittelt.

Man berechne für jeden Gurtstab die Ausdrücke:

$$(1) \qquad w_m = \frac{s_m y_m}{r_m^2} \frac{F_c}{F_m} \text{ und } z_m = y_m w_m,$$

wobei s_m die Länge des Gurtstabes bedeutet,

m die Ordnungsziffer des gegenüberliegenden Knotenpunktes,

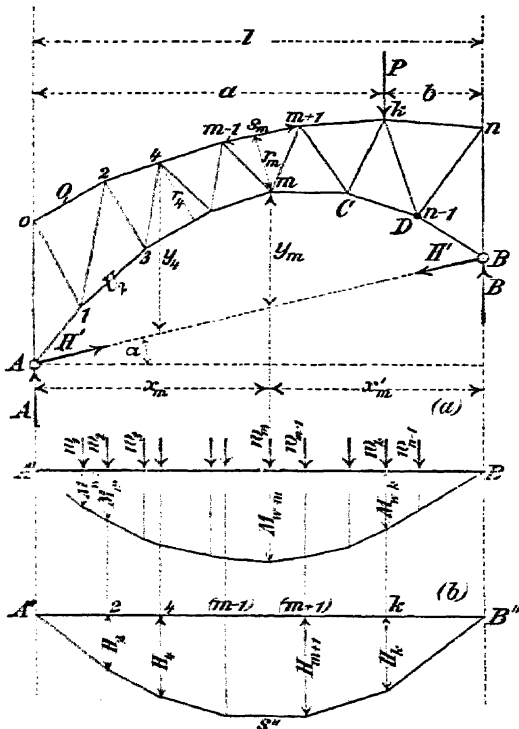
r_m das Loth von m auf s_m,

y_m den lothrechten Abstand des Punktes m von der Schlusslinie,

F_m die Querschnittsfläche des Stabes s_m,

F_c eine beliebige, aber für alle Stäbe gleiche Querschnittsfläche, welche im allgemeinen gleich dem am häufigsten vorkommenden Gurtquerschnitte gesetzt wird, damit möglichst viele der Verhältnisse $F_c : F_m = 1$ werden.

Fig. 201.

Nun bestimme man (durch Rechnung od. Zeichnung) die Biegungsmomente $M_{w1}, M_{w2}, \ldots M_{wk}, \ldots$ für einen *einfachen* (d. h. einen bei A' und B', Fig. 201ᵃ, frei aufliegenden) Balken, dessen Stützpunkte lothrecht unter A bezw. B liegen und auf welchen lothrechte, durch die entsprechenden Knotenpunkte des Bogens gehende Lasten w_1, $w_2, \ldots w_m, \ldots$ wirken, worauf man für eine im Knoten k des Bogens

angreifende Last P den Horizontalschub erhält:

$$(2) \qquad H_k = P \frac{M_{wk}}{\Sigma z_m}.$$

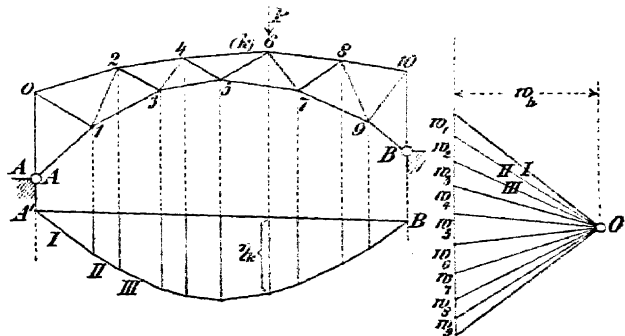
Darin ist: $\Sigma z_m = z_0 + z_1 + z_2 + \ldots + z_n$.

Es folgt dieses Verfahren aus Gleichung V Seite 162. Hiernach wird $H_k = P \frac{\delta'_k}{\Sigma S'^2 \rho}$, wo $\rho = \frac{s}{EF}$ ferner δ' die Ordinate der Biegungslinie für den Zustand $H = -1$ und S' die Stabkraft für $H = -1$ ist. Man erhält für einen Stab der oberen, bezw. unteren Gurtung: $S' = -\frac{y}{r}$ und $S' = +\frac{y}{r}$, so dass der Nenner des für H_k angegebenen Bruches nach Multiplikation mit EF_c in $EF_c \Sigma S'^2 \frac{s}{EF} = \Sigma \frac{y^2 s}{r^2} \frac{F_c}{F} = \Sigma z$ übergeht. Die δ'-Linie darf nach No. 74 als Momentenlinie eines mit den Gewichten $w_m = \frac{M'_m s_m}{r_m^2} \frac{F_c}{F_m}$ belasteten einfachen Balkens aufgefasst werden, wobei $M'_m = y_m$ das Angriffsmoment in Folge $H = -1$ ist. Damit ergeben sich die oben angeführten Gewichte w_m.

Die auf diese Weise berechneten Werthe H_2, H_4, ... bestimmen in Figur 201[b] die aus Geraden bestehende Einflusslinie für den Fall oben angreifender Lasten, und ganz entsprechend würden H_1, H_3, ... die Einflusslinie für unten wirkende Lasten liefern. Der erstere Fall liegt in der Regel vor, und es ist dann meistens zulässig, auch die ständige Last ausschliesslich auf die oberen Knotenpunkte zu vertheilen. Man kommt dann mit der Einflusslinie $A'' S'' B''$ in Fig. 201[b] aus.

Will man die H-Linie durch Zeichnung bestimmen, so nehme man die Polweite w_h des die Gewichte w verbindenden Seilpolygons so an, dass dessen Ordinate η_k (Fig. 202) den Horizontalschub H_k angiebt. Stellt man dann die Lasteinheit durch eine Strecke c dar, so erhält man (wegen $M_{wk} = w_h \eta_k$) die Bedingung

Fig. 202.

$$H_k = \frac{c w_h \eta_k}{\Sigma z_m} = \eta_k$$

und hieraus folgt die Polweite

$$w_h = \frac{\Sigma z_m}{c}.$$

Drückt man bei Berechnung der z_m alle Abmessung in Metern aus, so muss man auch c in Metern angeben. Wird beispielsweise der Kräftemaassstab $50^{mm} = 1^t$ gewählt und ist die Trägerzeichnung im Maassstabe 1 : 75 gefertigt, so wird die Lasteinheit durch eine Strecke von der Länge $c = 75 \cdot 0{,}050 = 3{,}75^m$ dargestellt, und man muss dann $w_h = \frac{\Sigma z_m}{3{,}75}$ wählen. w_h und w_m enthalten dieselbe Einheit; sie sind, wenn die Gleichung (1) angewandt wird, Zahlen und bedingen die Anfertigung eines besonderen Zahlenmaassstabes.*)

Man könnte auch den Ausdruck $\Sigma z_m = \Sigma y_m w_m$ als das auf die Achse AB bezogene Moment von Kräften w_m, welche parallel zu AB sind, auffassen und mittels eines Seilpolygons bestimmen, jedoch führt die Berechnung von Σz_m schneller und übersichtlicher zum Ziele. Ebenso unzweckmässig wäre es, die Gewichte w_m durch Zeichnung zu ermitteln.

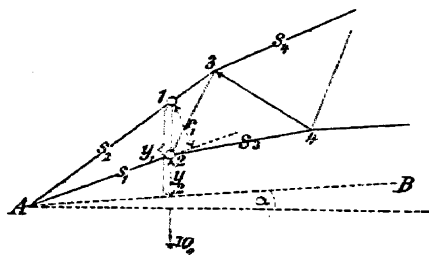



Fig. 203.

Hinsichtlich der Werthe w und z ist noch folgendes zu bemerken. Werden die Gurtungen nach Fig. 203 am Auflager zusammengeführt, so weise man den Stab s_1 dem lothrecht über 2 gelegenen Punkte 1 des Stabes s_2 zu. Bezeichnet dann r_1 die Länge des Lothes von 1 auf s_1, so findet man für den Punkt 2 des Balkens AB das von den Stäben s_1 und s_2 herrührende Gewicht:

$$(3) \quad \begin{cases} w_2 = \dfrac{y_1 s_1}{r_1^{\,2}} \dfrac{F_c}{F_1} + \dfrac{y_2 s_2}{r_2^{\,2}} \dfrac{F_c}{F_2} \quad \text{ferner:} \\ z_2 = \dfrac{y_1^{\,2} s_1}{r_1^{\,2}} \dfrac{F_c}{F_1} + \dfrac{y_2^{\,2} s_2}{r_2^{\,2}} \dfrac{F_c}{F_2}. \end{cases}$$

Beim *Ständerfachwerk* in Fig. 204 geben wir zwei lothrecht übereinandergelegenen Knotenpunkten dieselbe Ordnungsziffer und bezeichnen die lothrechten Abstände der Knotenpunkte von der Schlusslinie mit

y_{mu} für den unteren Knoten m und mit
y_{mo} „ „ oberen „ m.

---

*) In Folge von Kürzungen wird die Einheit der w_h und w_m später zuweilen eine andere werden.

Ferner nennen wir:

h_m die lothrechte Trägerhöhe in m,

β_m, γ_m den Neigungswinkel des m^{ten} Stabes der oberen bezw. unteren Gurtung gegen die Wagerechte,

λ_m die Weite des m^{ten} Feldes,

F_{om} den Querschnitt des m^{ten} Obergurtstabes,

F_{um} den Querschnitt des m^{ten} Untergurtstabes,

Fig. 204.

und erhalten für den oberen Knotenpunkt m, welchem der $(m+1)^{\text{te}}$ Stab der unteren Gurtung gegenüberliegt, (aus Gleich. 1 nach einfacher Umformung):

$$w_m = y_{mo} \frac{\lambda_{m+1}}{h_m^2} \sec^3 \gamma_{m+1} \frac{F_c}{F_{u(m+1)}}; \quad z_m = \frac{y_{mo}^2 \lambda_{m+1}}{h_m^2} \sec^3 \gamma_{m+1} \frac{F_c}{F_{u(m+1)}}$$

während dem unteren Knoten m entspricht:

$$w_m = \frac{y_{mu} \lambda_m}{h_m^2} \sec^3 \beta_m \frac{F_c}{F_{om}}; \quad z_m = \frac{y_{mu}^2 \lambda_m}{h_m^2} \sec^3 \beta_m \frac{F_c}{F_{om}}.$$

Durch Zusammenfassung der in dieselbe Lothrechte fallenden Gewichte w ergiebt sich:

$$(4) \quad \begin{cases} w_m = \dfrac{1}{h_m^2} \left(y_{mu} \lambda_m \sec^3 \beta_m \dfrac{F_c}{F_{om}} + y_{mo} \lambda_{m+1} \sec^3 \gamma_{m+1} \dfrac{F_c}{F_{u(m+1)}} \right) \\ z_m = \dfrac{1}{h_m^2} \left(y_{mu}^2 \lambda_m \sec^3 \beta_m \dfrac{F_c}{F_{om}} + y_{mo}^2 \lambda_{m+1} \sec^3 \gamma_{m+1} \dfrac{F_c}{F_{u(m+1)}} \right). \end{cases}$$

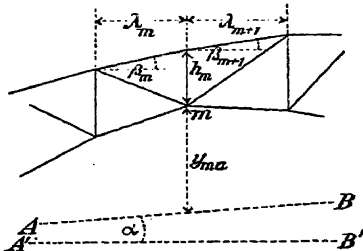



Fig. 205.

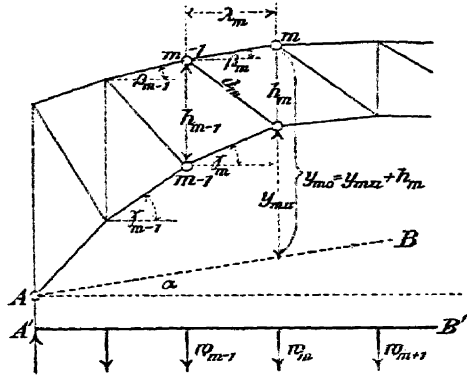
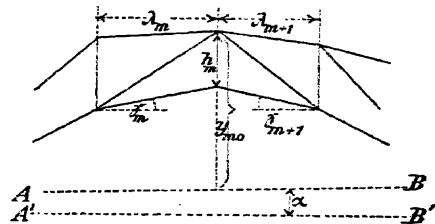



Fig. 206.

Bildet der Ständer bei m, Fig. 205, die Grenze zwischen den links- und rechtssteigenden Diagonalen, so liegen dem Knoten m zwei Ober-

gurtstäbe gegenüber und man erhält:

$$(5)\quad w_m = \frac{y_{mu}}{h^2_m}\left(\lambda_m \sec^3\beta_m \frac{F_c}{F_{om}} + \lambda_{m+1}\sec^3\beta_{m+1}\frac{F_c}{F_{o(m+1)}}\right);\ z_m = y_{mu}\,w_m.$$

Ebenso ergiebt sich für den Fall in Fig. 206:

$$(6)\quad w_m = \frac{y_{mo}}{h^2_m}\left(\lambda_m \sec^3\gamma_m \frac{F_c}{F_{um}} + \lambda_{m+1}\sec^3\gamma_{m+1}\frac{F_c}{F_{u(m+1)}}\right);\ z_m = y_{mo}\,w_m.$$

Liegt die Lothrechte durch einen Knoten r rechts von $r+1$ (oder links von $r-1$) — vergl. Fig. 99 auf Seite 113 — so ist bei der zeichnerischen Bestimmung der Momente M_w zu beachten, dass die Gewichte in der Reihenfolge w_{r-1}, w_r, w_{v+1} durch das Seilpolygon verbunden werden müssen. Will man rechnen, so vertheile man im Falle $\frac{\text{oben}}{\text{unten}}$ angreifender Belastung sämmtliche Gewichte w auf die $\frac{\text{oberen}}{\text{unteren}}$ Knotenpunkte. Auf die Punkte $r-1$ und $r+1$ würden z. B. bei Zerlegung von w_r die Antheile: $-w_r\frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_r-\lambda_{r+1}}$ und $+w_r\left(1-\frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_r-\lambda_{r+1}}\right)$ kommen. Dieses Verfahren ist zuweilen auch dann zu empfehlen, wenn r zwischen $r-1$ und $r+1$ liegt.

78. Einfluss der Temperatur. Wächst die bei der Aufstellung des Bogens herrschende Temperatur überall um den gleichen Betrag t, so ändert sich der Horizontalschub um

$$(7)\qquad H_t = \frac{\varepsilon\, EtlF_c \sec^2\alpha}{\Sigma z_m}.$$

Meistens genügt es, mit $t = \pm 35°$ Cels. zu rechnen. Dann ist für Schmiedeisen und Stahl (mit $\varepsilon E = 240^t$ für das *qm.*):

$$(8)\qquad H_t = \pm 8400\,\frac{lF_c}{\Sigma z_m}\sec^2\alpha \text{ Tonnen},$$

worin die Abmessungen in Metern einzuführen sind.

Die Formel (7) folgt aus Gleich. (V), Seite 163. Danach ist $H_t = \frac{\Sigma S'\varepsilon ts}{\Sigma S'^2\rho} = \frac{EF_c\Sigma S'\varepsilon ts}{\Sigma z_m}$. Wendet man nun das Gesetz der virtuellen Verschiebungen auf den Zustand $H=-1$ an, und führt als mögliche Formänderungen die Aenderungen $\Delta s = \varepsilon ts$ der Stablängen ein, ferner die ihnen entsprechende Aenderung $\varepsilon tl\sec\alpha$ der Weite $\overline{AB} = l\sec\alpha$, so erhält man: $1\sec\alpha\cdot\varepsilon t\sec\alpha = \Sigma S'\varepsilon ts$ und gelangt zur Formel (7).

79. Der Sichelträger, Fig. 207. Bei der Ermittelung der H-Linie sichelförmiger Träger empfiehlt sich die Annahme eines überall gleichen Gurtquerschnitts. Man versteht dann unter F_c den Mittelwerth aller F_o und F_u und setze die in den Gleichungen (1), (3), (4) auftretenden Querschnittsverhältnisse $=1$. Haben alle Felder gleiche (oder annähernd gleiche) Weite, so weichen (bei nicht zu grosser Pfeilhöhe)

auch die Längen der Gurtstäbe wenig von einander ab, und es ist dann rathsam, für $s_m \frac{F_c}{F_m}$ einen festen Mittelwerth einzuführen und sämmtliche w und z durch diesen Werth zu dividiren. Man setze also z. B. für den in Fig. 207 dargestellten Träger

$$(9) \qquad w_m = \frac{y_m}{r^2_m}, \quad z_m = y_m w_m$$

berechne dann aber H_t mittels der Formel:

$$(10) \qquad H_t = \frac{\varepsilon E I F_c \sec^2 \alpha}{\lambda \Sigma z_m} t \text{*)}.$$

Zahlenbeispiele. *I.* Die Knotenpunkte der Gurtungen des in Fig. 207 abgebildeten Sichelträgers liegen in Parabeln von 4,0 bezieh. 2,5^m Pfeilhöhe. Die Stützweite ist $= 20^m$, die Feldweite $= 2^m$. Die Ordinaten y, Strecken r, Gewichte w und Grössen z sind in der folgenden Tabelle angegeben. Für w_2 bis w_{10} und z_2 bis z_{10} gelten die Gleich. (9), während w_1 und z_1 nach den Gleich. (5) zu berechnen sind. Der erste Untergurtstab ist als halber Stab behandelt worden.

m	y_m	r_m	$w_m = \frac{y_m}{r^2_m}$	$z_m = y_m w_m$	Ausnahmefälle
1	0,475	0,20	—	—	
2	1,440	0,52	5,33	7,67	$w_1 = \frac{0{,}475}{0{,}20^2} + \frac{1}{2}\,\frac{0{,}72}{0{,}22^2} = 19{,}31$**)
3	1,275	0,63	3,21	4,10	
4	2,560	0,94	2,90	7,42	
5	1,875	1,01	1,84	3,45	$z_1 = \frac{0{,}475^2}{0{,}20^2} + \frac{1}{2}\,\frac{0{,}72^2}{0{,}22^2} = 11{,}00$
6	3,360	1,26	2,12	7,11	
7	2,275	1,29	1,37	3,11	
8	3,840	1,45	1,83	7,01	
9	2,475	1,44	1,19	2,95	
10	4,000	1,525	1,72	6,88	

$$\Sigma z_m = 2 \sum_1^9 z + z_{10} = 2 \,.\, 53{,}82 + 6{,}88 = 114{,}52.$$

Für den mit den Gewichten w belasteten Balken $A'B'$ wurden jetzt von der Mitte aus die Querkräfte nach der Formel $Q_m = Q_{m+1} + w_m$ berechnet, hierauf die Momente $M_m = M_{m-1} + Q_m \lambda'$ und schliesslich die Ordinaten $H_m = \frac{M_m}{\Sigma z_m}$***) der H-Linie. Wegen $\lambda' = 1$ ist $M_m = M_{m-1} + Q_m$. Wäre λ' nicht

*) Streng genommen wäre λ durch den Mittelwerth von $\left(s_m \frac{F_c}{F_m}\right)$ zu ersetzen, doch erwäge man die Schwierigkeit, t zutreffend zu schätzen und rechne daher so einfach wie möglich. Aus diesem Grunde wird man auch, falls α klein ist, $\sec^2 \alpha = 1$ setzen.

**) Die Ordinate des lothrecht über 1 gelegenen Punktes 1' der oberen Gurtung ist $= 0{,}72$ und das Loth von 1' auf die Verlängerung des ersten Untergurtstabes $= 0{,}22$.

***) Bei den M_m und Q_m haben wir den Zeiger w hier fortgelassen.

$=1$, aber konstant, so würde man trotzdem $\lambda'=1$ setzen, dafür aber Σz_m durch λ' dividiren. Wir schreiben den vollständigen Ansatz der Rechnung hin.

$$
\begin{array}{rr}
Q_{10}=\tfrac{1}{2}w_{10}= & 0{,}86 \\
+ & 1{,}19 \\ \hline
Q_9= & 2{,}05 \\
 & 1{,}83 \\ \hline
Q_8= & 3{,}88 \\
 & 1{,}37 \\ \hline
Q_7= & 5{,}25 \\
 & 2{,}12 \\ \hline
Q_6= & 7{,}37 \\
 & 1{,}84 \\ \hline
Q_5= & 9{,}21 \\
 & 2{,}90 \\ \hline
Q_4= & 12{,}11 \\
 & 3{,}21 \\ \hline
Q_3= & 15{,}32 \\
 & 5{,}33 \\ \hline
Q_2= & 20{,}65 \\
 & 19{,}31 \\ \hline
Q_1= & 39{,}96
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
M_1= & 39{,}96=Q_1 \\
+ & 20{,}65 \\ \hline
M_2= & 60{,}61 \\
 & 15{,}32 \\ \hline
M_3= & 75{,}93 \\
 & 12{,}11 \\ \hline
M_4= & 88{,}04 \\
 & 9{,}21 \\ \hline
M_5= & 97{,}25 \\
 & 7{,}37 \\ \hline
M_6= & 104{,}62 \\
 & 5{,}25 \\ \hline
M_7= & 109{,}87 \\
 & 3{,}88 \\ \hline
M_8= & 113{,}75 \\
 & 2{,}05 \\ \hline
M_9= & 115{,}80 \\
 & 0{,}86 \\ \hline
M_{10}= & 116{,}66
\end{array}
$$

$$H_2=\frac{60{,}61}{114{,}52}=0{,}53$$

$$H_4=\frac{88{,}04}{114{,}52}=0{,}77$$

$$H_6=\frac{104{,}62}{114{,}52}=0{,}91$$

$$H_8=\frac{113{,}75}{114{,}52}=0{,}99$$

$$H_{10}=\frac{116{,}66}{114{,}52}=1{,}02$$

Fig. 207.

Die gleichförmig angenommene ständige Belastung sei $g=1{,}45^t$ f. d. m, also für ein Feld: $g\lambda=2{,}90^t$; sie erzeugt:

$$H_g=g\lambda\ \{2\,(H_2+H_4+H_6+H_8)+H_{10}\}=2{,}90\cdot 7{,}42=21{,}5^t.$$

Ein vom rechten Auflager bis zum Querträger 12 vorgeschobener Lastenzug (mit den in der Fig. angegebenen Achsendrücken und Radständen) ruft hervor:

$$H=\Sigma P\eta=39{,}0^t.$$

Der Einfluss einer gleichmässigen Temperaturerhöhung um $t=35°$ C. ist nach Gleich. 10:

$$H_t = \frac{240 \cdot 20 \cdot F_c}{2,0 \cdot 114,52} \cdot 35 = 733\,F_c,$$

wobei F_c den mittleren Gurtquerschnitt in *qm.* bedeutet.

II. In neuerer Zeit sind mehrfach Sichelträger von bedeutender Pfeilhöhe ausgeführt worden, z. B. für die Douro-Brücke bei Porto und den Garabit-Viadukt. Es ist hier zulässig, die Werthe y_m, s_m und β_m zur Vereinfachung der Rechnung auf eine durch die Mitten der Höhen h_m geführte Bogenachse zu beziehen und, mit Hinweis auf Figur 208, die Gleichungen 4 zu ersetzen durch

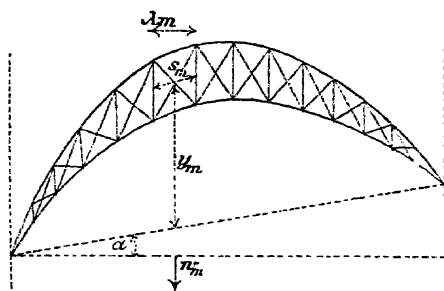



Fig. 208.

$$w_m = \frac{2\,y_m}{h^2_m} \frac{s^3_m}{\lambda^2_m} \frac{F_c}{F_m}$$

$$z_m = y_m w_m.$$

Kürzt man sämmtliche w durch 2, und nimmt man für F_m einen festen Mittelwerth F_c an, so erhält man:

$$11)\quad w_m = \frac{y_m}{h^2_m} \frac{s^3_m}{\lambda^2_m};\quad z_m = y_m w_m$$

und für den Einfluss von t:

$$12)\qquad H_t = \frac{\varepsilon E I F_c \sec^2 \alpha}{2\,\Sigma z_m}\,t.$$

Wir wenden die Formeln (11) und (12) auf die Berechnung des Horizontalschubes der Eisenbahnbrücke über den *Douro bei Porto* an. Figur 209 stellt die Hälfte des sichelförmigen Bogenträgers dar. Die folgende Tabelle giebt an:

die in den Mitten der Felder gemessenen lothrechten Höhen h_m,
die Längen s_m der Verbindungslinien der Mittelpunkte der aufeinanderfolgenden Vertikalen,
die Ordinaten der Mittelpunkte der Strecken s_m,
die Feldweiten λ_m, Gewichte w_m und Werthe z_m.

m	y_m	s_m	h_m	λ_m	$w_m = \frac{y_m s^3_m}{h^2_m \lambda^2_m}$	$z_m = y_m w_m$
1	3,20	8,51	2,17	5,60	13,35	42,74
2	9,33	8,07	5,19	5,55	5,91	55,14
3	15,06	8,17	6,79	5,95	5,03	75,78
4	20,61	8,62	8,02	6,65	4,64	95,65
5	24,45	3,72	8,64	3,00	1,87	45,70
6	28,23	10,01	9,01	8,45	4,88	137,90
7	33,15	10,14	9,38	9,10	4,74	157,25
8	37,13	10,31	9,63	9,70	4,66	173,15
9	40,09	10,68	9,80	10,40	4,71	188,92
10	41,90	10,47	9,89	10,40	4,55	190,46
11	42,50	10,40	9,93	10,40	4,48	190,51

$$\Sigma z_m = 2\sum_1^{10} z_m + z_{11} = 2 \cdot 1162,69 + 190,51 = 2515,89.$$

Nun wurden die Querkräfte und Momente des mit den Gewichten w_m belasteten Balkens berechnet und aus den Momenten die Werthe H ermittelt:

m	Querkräfte	m	Momente	$H = \frac{M}{2515,89}$
11	$Q_{11} = \frac{1}{2} w_{11} = 2,24$	1	$M_1 = Q_1\, 2,8 = 158,42$	0,063
10	$Q_{10} = Q_{11} + w_{10} = 6,79$	2	$M_2 = M_1 + Q_2\, 5,58 = 399,65$	0,159
9	$Q_9 = Q_{10} + w_9 = 11,50$	3	$M_3 = M_2 + Q_3\, 5,74 = 613,86$	0,244
8	$Q = 16,16$	4	$M = 817,29$	0,325
7	20,90	5	950,84	0,378
6	25,78	6	1098,56	0,437
5	27,65	7	1281,85	0,509
4	32,29	8	1433,76	0,570
3	37,32	9	1549,33	0,615
2	43,23	10	1619,95	0,644
1	56,58	11	1643,24	0,653

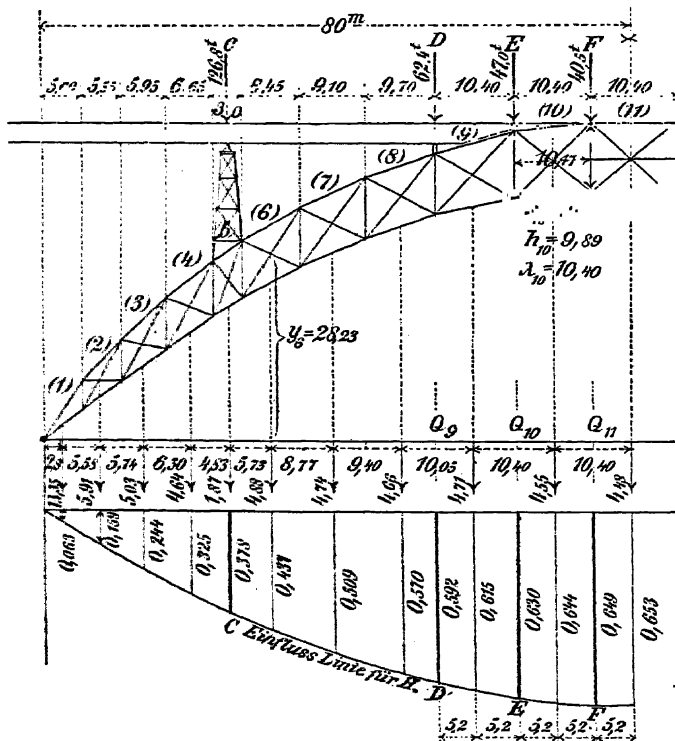



Fig. 209.

Nach Aufzeichnung der Einflusslinie für H misst man, entsprechend den Angriffspunkten C, D, E, F der Fahrbahnbelastung, die Ordinaten

0,378 0,592 0,630 0,649,

während *Seyrig* in seiner Veröffentlichung: *Le pont sur le Douro à Porto*

(Paris 1878) auf Seite 31 mittels einer wesentlich umständlicheren Berechnung die Werthe

0,370   0,592   0,637   0,650

findet. Die Abweichungen beider Ergebnisse sind ganz unwesentlich. Bei gänzlicher Belastung der Brücke werden in den Punkten C, D, E, F auf den Bogen seitens der Verkehrslast die senkrechten Drücke $126{,}8^t$; $62{,}4^t$; $47{,}0^t$; $40{,}5^t$ (vergl. die angezogene Quelle, Seite 34) ausgeübt. Dieselben erzeugen — nach unserer Berechnung —

$$H = 2\,[126{,}8 \cdot 0{,}378 + 62{,}4 \cdot 0{,}592 + 47{,}0 \cdot 0{,}630 + 40{,}5 \cdot 0{,}649] = 281{,}53^t.$$

Seyrig findet $280{,}62^t$. Es ist dies die Summe der Horizontalschübe der *beiden* das Gleis stützenden Bogenträger.

Bei Berechnung von H_t darf der mittlere Querschnitt der einen Gurtung eines Bogens $F_c = 0{,}0560\,qm$ gesetzt werden (vgl. die Quelle, Seite 26, Mittelwerth von $\frac{1}{4}\,\omega_1$) und es folgt dann für $t = 30°$ für jeden Bogenträger:

$$H_t = \frac{\varepsilon E t l F_c}{2\,\Sigma z_m} = \frac{240 \cdot 30 \cdot 160 \cdot 0{,}0560}{2 \cdot 2515{,}86} = 12{,}82^t.$$

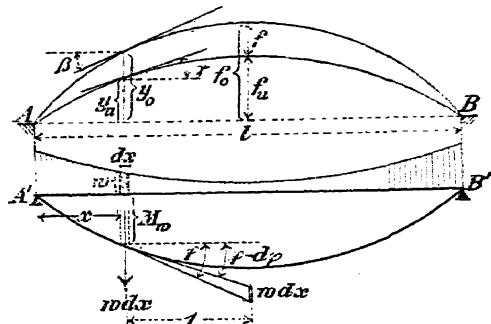
Dabei ist $E = 2\,000\,000^k$ f. d. qcm angenommen worden. Setzt man, wie dies bei der Berechnung der Douro-Brücke geschehen ist, $E = 1\,600\,000$, so erhält man $H_t = \frac{16}{20}\,12{,}82 = 10{,}26^t$, während *Seyrig* (Seite 41) den Werth $H_t = \frac{1}{2} \cdot 17{,}74 = 8{,}87^t$ findet.

Es ist hier hervorzuheben, dass bei Vernachlässigung der Formänderung der Gitterstäbe der aus $\Sigma S'^2 \frac{s}{EF}$ hervorgegangene Werth Σz stets ein grösseres H_t liefert, da in jener Summe nur die Quadrate von S' auftreten, dass es aber bei der grossen Unsicherheit, in welcher man sich bezüglich der anzunehmenden Temperatur-Änderung t befindet, nur zu empfehlen ist, H_t reichlich gross zu rechnen.

80. Formel für den Horizontalschub parabelförmiger Sichelträger. Liegen die Knotenpunkte beider Gurtungen in Parabeln, so lässt sich für H ein einfacher Ausdruck herleiten, welcher sehr zuverlässige Ergebnisse liefert. Zu diesem Zwecke nehmen wir unendlich kleine Felder an, und ersetzen die nach Gleichung (9) zu berechnenden Einzelgewichte w durch eine stetige Belastung, welche dem Gesetze folgt:

$$w = \frac{y_u}{h^2}\sec^2\beta + \frac{y_o}{h^2}\sec^2\gamma.$$

Fig. 210.

Die Bezeichnungen sind aus der Fig. 209 ersichtlich. Die Kämpfer sind in derselben Wagerechten gedacht. Das erste Glied entspricht dem Theilchen ds der oberen Gurtung und ergiebt sich durch Einführung von r_u (d. i. Abstand des Punktes u von der Tangente in o) $= h\cos\beta$, und ebenso entsteht das zweite Glied. Die Summe: Σz_m ist zu ersetzen durch:

$$\mathfrak{N} = \int_0^l \frac{y_u^2}{h^2} \sec^2 \beta \, dx + \int_0^l \frac{y_o^2}{h^2} \sec^2 \gamma \, dx$$

$$= \frac{f_u^2}{f^2} \int_0^l \left[1 + \left(\frac{dy_o}{dx}\right)^2\right] dx + \frac{f_o^2}{f^2} \int_0^l \left[1 + \left(\frac{dy_u}{dx}\right)^2\right] dx,$$

wobei zu beachten ist, dass $y_u : h = f_u : f$ und $y_o : h = f_o : f$. Führt man ein:

$$y_o = \frac{4 f_o x (l - x)}{l^2} \text{ und } y_u = \frac{4 f_u x (l - x)}{l^2},$$

so erhält man nach Ausführung der Integration und nach gehöriger Zusammenziehung:

$$w = \frac{f_o + f_u}{f^2} \left[\frac{1}{4}\left(l^2 + 16 f_o f_u\right) \frac{1}{x(l - x)} - \frac{16 f_o f_u}{l^2}\right]$$

$$\mathfrak{N} = \frac{1}{3 l f^2} \left[3 l^2 (f_o^2 + f_u^2) + 32 f_o^2 f_u^2\right].$$

Die Differentialgleichung der Momentenlinie (M_w) lautet, da diese Linie das mit der Polweite 1 gezeichnete Seilpolygon der Belastungsfläche ist:

$$(13) \qquad -d(\operatorname{tg} \varphi) = w \, dx, \text{ oder } \frac{d^2 M_w}{dx^2} = -w,$$

wo φ den Neigungswinkel des auf eine wagerechte Schlusslinie bezogenen Seilpolygons bedeutet. Denn zwei aufeinanderfolgende Tangenten müssen auf einer Lothrechten im Abstande 1 von der Stelle (x) das Lasttheilchen $w\,dx$ abschneiden.

Wird nun die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 M_w}{dx^2} = -\frac{f_o + f_u}{f^2} \left[\frac{1}{4}\left(l^2 + 16 f_o f_u\right) \frac{1}{x(l - x)} - \frac{16 f_o f_u}{l^2}\right]$$

zweimal integrirt, und werden die beiden Konstanten mittels der Bedingungen bestimmt

$$x = 0 \text{ und } x = l \text{ muss liefern } M_w = 0,$$

(deren eine auch durch die Forderung ersetzt werden darf, dass für $x = \frac{1}{2} l$ der Werth $\frac{dM_w}{dx} = 0$ werden muss) so ergiebt sich:

$$M_w = \frac{f_o + f_u}{f^2} \left[\frac{1}{4}\left(l^2 + 16 f_o f_u\right) \left(\frac{x}{l} \log.\text{nat.} \frac{l}{x} + \frac{l - x}{l} \log.\text{nat.} \frac{l}{l - x}\right) - 8 f_o f_u \frac{x}{l} \frac{l - x}{l}\right].$$

Für eine in den Abständen a und b von A bezw. B gelegene Last P erhält man jetzt (nach der Formel $H = P \frac{M_w}{\Sigma z} = P \frac{M_w}{\mathfrak{N}}$):

$$(14) \quad \begin{cases} H = \dfrac{3 P l (f_o + f_u) \left[(l^2 + 16 f_o f_u) \alpha_1 - f_o f_u \alpha_2\right]}{3 l^2 (f_o^2 + f_u^2) + 32 f_o^2 f_u^2} \\ \text{wo } \alpha_1 = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{a}{l} \log.\text{nat.} \dfrac{l}{a} + \dfrac{b}{l} \log.\text{nat.} \dfrac{l}{b}\right); \ \alpha_2 = 8 \dfrac{a}{l} \dfrac{b}{l}. \end{cases}$$

Zur Erleichterung der Benutzung dieser Formel diene die folgende Tabelle, welche gestattet, zwischen Kämpfer und Scheitel 10 Punkte der H-Linie schnell festzulegen. Im Allgemeinen wird man diese Punkte durch eine krumme Linie verbinden und in diese ein Polygon beschreiben, dessen Ecken den Querträgern entsprechen.

$\frac{a}{l}$	α_1	α_2	$\frac{a}{l}$	α_1	α_2
0,05	0,0496	0,38	0,30	0,1527	1,68
0,10	0,0813	0,72	0,35	0,1619	1,82
0,15	0,1057	1,02	0,40	0,1683	1,92
0,20	0,1251	1,28	0,45	0,1720	1,98
0,25	0,1406	1,50	0,50	0,1733	2,00

Für den in Figur 207 dargestellten parabolischen Sichelträger ist z. B. $f_o = 4{,}0^m$; $f_u = 2{,}5^m$; $l = 20^m$, mithin

$$H = \frac{2184}{299}\,\alpha_1 - \frac{39}{299}\cdot\alpha_2$$

und man erhält demnach für $\frac{a}{l} = 0{,}1 \quad 0{,}2 \quad 0{,}3 \quad 0{,}4 \quad 0{,}5$ die Werthe

$$H = 0{,}50 \qquad 0{,}75 \qquad 0{,}89 \qquad 0{,}97 \qquad 1{,}01,$$

welche sich von den vorhin berechneten:

$$H = 0{,}53 \qquad 0{,}77 \qquad 0{,}91 \qquad 0{,}99 \qquad 1{,}02$$

nur unwesentlich unterscheiden.

Für den von Temperaturänderungen parabelförmiger Bögen herrührenden Horizontalschub H_t findet man, indem man in Gleich. (10) den Werth $\lambda \Sigma z_m$ durch $\int_o^l \left(\frac{y_u^2}{h^2}\sec^2\beta + \frac{y_o^2}{h^2}\sec^2\gamma\right) dx$ ersetzt, die einfache Formel:

$$H_t = \varepsilon E F_c t \frac{3\,l^2 (f_o - f_u)^2}{3\,l^2 (f_o^2 + f_u^2) + 32\, f_o^2 f_u^2} \tag{15}$$

und beispielsweise für den Bogenträger in Fig. 207 (mit $\varepsilon E = 240$; $t = 35°$):

$$H_t = 240\, F_c\, 35 \frac{3\cdot 20^2 (4{,}0 - 2{,}5)^2}{3\cdot 20^2 (4{,}0^2 + 2{,}5^2) + 32\cdot 4{,}0^2\cdot 2{,}5^2} = 759\, F_c \text{ Tonnen.}$$

Vorhin ergab sich der hiervon nur wenig verschiedene Werth $H_t = 733\, F_c$.

81. Bogenträger mit fast wagerechter oberer Gurtung. Zu den am häufigsten ausgeführten Arten von Bogenträgern gehört der in Figur 211 dargestellte Träger mit annähernd oder genau wagerechter oberer Gurtung. Meistens wird die Höhe im Scheitel sehr klein gewählt, und es stellt sich dann heraus, dass die Querschnittsverhältnisse der dem Scheitel zunächst gelegenen Gurtstäbe von wesentlichem Einfluss auf die Ergebnisse sind. Die Gewichte w der Knoten in der Nähe der Auflager spielen eine untergeordnete Rolle. Wir empfehlen bei Berechnung der H-Linie folgende Annahmen:

Man benutze die Gleichungen (4), ersetze die veränderlichen Glieder $\sec^3 \beta_m \frac{F_c}{F_{om}}$ und $\sec^3 \gamma_{m+1} \frac{F_c}{F_{u\,m+1}}$ durch die festen Werthe $\frac{F_c}{F_o}$ bezw. $\frac{F_c}{F_u}$, nehme die willkürliche Querschnittsfläche $F_c = F_o$ an und kürze die w und z durch die (konstant gedachte) Felderweite λ. Man erhält dann:

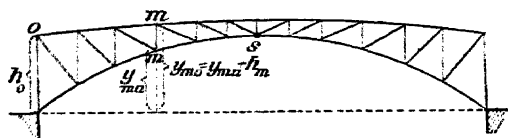
$$(16)\qquad w_m = \left(y_{mu} + y_{mo}\frac{F_o}{F_u}\right)\frac{1}{h^2_m} \text{ und } z_m = \left(y^2_{mu} + y^2_{mo}\frac{F_o}{F_u}\right)\frac{1}{h^2_m},$$

wo für $F_o : F_u$ das Verhältniss der Querschnitte der oberen und unteren Gurtung in der Nähe des Scheitels einzusetzen ist.

Fig. 211.

Für den Knotenpunkt 0 und für den Scheitel s hat man bezw. zu setzen:

$$(17)\qquad w_o = \frac{F_o}{F_u}\,\frac{1}{h_o};\quad z_o = \frac{F_o}{F_u}$$

$$(18)\qquad w_s = \frac{2\,y_s}{h^2_s}\,\frac{F_o}{F_u};\quad z_s = \frac{2\,y^2_s}{h^2_s}\,\frac{F_o}{F_u} \text{ (vgl. Formel 5).}$$

Der Einfluss einer Temperaturänderung ist:

$$(19)\qquad H_t = \frac{\varepsilon E F_o l t}{\lambda \Sigma z_m}.$$

Zahlenbeispiel. *I.* Für den schmiedeeisernen Bogenträger in Fig. 212 erhält man mit $F_o : F_u = 1$ (ein Querschnittsverhältniss, für welches der Verfasser in einer ganzen Reihe von Fällen recht befriedigende Ergebnisse erzielt hat):

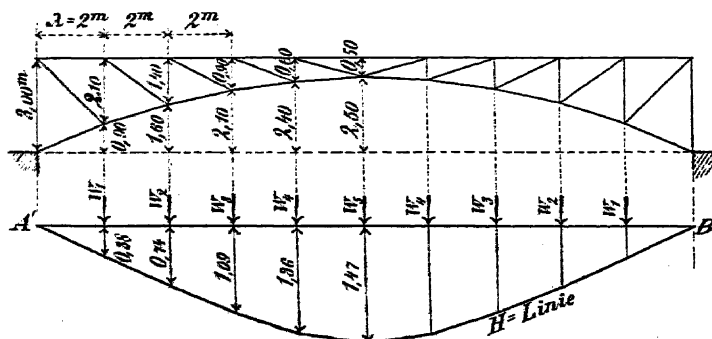



Fig. 212.

$w_1 = \frac{0{,}9 + 3{,}0}{2{,}1^2} = 0{,}88$	$z_1 = \frac{0{,}9^2 + 3{,}0^2}{2{,}1^2} = 2{,}224$	$z_0 = 1{,}000$
$w_2 = \frac{1{,}6 + 3{,}0}{1{,}4^2} = 2{,}35$	$z_2 = \frac{1{,}6^2 + 3{,}0^2}{1{,}4^2} = 5{,}898$	
ebenso $w_3 = 6{,}30;\ w_4 = 15{,}00$	$z_3 = 16{,}556;\ z_4 = 41{,}000$	$\sum_0^4 z_m = 66{,}678$
schliesslich $w_5 = \frac{2 \cdot 2{,}5}{0{,}5^2} = 20{,}00$	$z_5 = \frac{2 \cdot 2{,}5^2}{0{,}5^2} = 50{,}00$	

$$\Sigma z_m = 2 \cdot 66{,}678 + 50{,}000 = 183{,}356.$$

Die Momente des mit den Gewichten w belasteten Balkens $A'B'$ sind, wenn die Feldweite $\lambda = 1$ gesetzt wird (vergl. das Zahlenbeispiel auf S. 214):

$$M_1 = 34{,}53;\quad M_2 = 68{,}18;\quad M_3 = 99{,}48;\quad M_4 = 124{,}48;\quad M_5 = 134{,}48.$$

Der durch λ dividirte Werth Σz_m ist $\frac{183{,}356}{2{,}0} = 91{,}678$, und es ergiebt sich daher:

$$H_1 = \frac{34{,}53}{91{,}678} = 0{,}38;\quad H_2 = \frac{68{,}18}{91{,}678} = 0{,}74;$$

ebenso $H_3 = 1{,}09;\ H_4 = 1{,}36;\ H_5 = 1{,}47.$

Ist die ständige Belastung $g = 1{,}45^t$ f. d. m, so ist die Belastung eines Knotens:

$$g\lambda = 1{,}45 \cdot 2{,}0 = 2{,}9^t.$$

Der Horizontalschub in Folge des Eigengewichtes beträgt dann:

$$H_g = g\lambda\,[2\,(H_1 + H_2 + H_3 + H_4) + H_5] = 2{,}9 \cdot 8{,}61 = 25{,}0^t.$$

Der Einfluss einer Temperaturänderung um $t = 35^c$ ist:

$$H_t = \frac{\varepsilon E t l F_o}{\lambda\,\Sigma z_m} = \frac{240 \cdot 35 \cdot 20 \cdot F_o}{2{,}0 \cdot 183{,}356} = 460\ F_o \text{ (abgerundet).}$$

II. Will man die Untersuchung für verschiedene Querschnittsverhältnisse $F_o : F_u$ durchführen, so berechne man (unter der Voraussetzung: $\lambda = 1$) die Momente M_m' in Folge der Gewichte: $w_m' = \frac{y_m}{h_m^2}$ und die Momente M_m'' in Folge der $w_m'' = \frac{h_o}{h_m^2}$ und bestimme H_m mittels der Formel:

$$H_m = \frac{M_m' + \frac{F_o}{F_u} M_m''}{\frac{1}{\lambda}\left(\Sigma z_m' + \frac{F_o}{F_u}\Sigma z_m''\right)}. \tag{20}$$

Für den Scheitel ist $w_s' = \frac{2 y_s}{h_s^2}$ und $w_s'' = 0$; $z_s' = y_s w_s'$ und $z_s'' = 0$. Der Einfluss von t ist:

$$H_t = \frac{\varepsilon E t l F_o}{\lambda\left(\Sigma z_m' + \frac{F_o}{F_u}\Sigma z_m''\right)}. \tag{21}$$

Man erhält:

m	w_m'	w_m''	z'	z''	M_m'	M_m''	
0			0	1,000			
1	0,20	0,68	0,184	2,041	20,29	14,24	$\Sigma z' = 95{,}868$
2	0,82	1,53	1,306	4,592	40,38	27,80	
3	2,60	3,70	5,444	11,111	59,65	39,83	$\Sigma z'' = 87{,}488$
4	6,67	8,33	16,000	25,000	76,32	48,16	
5	20,00	0	50,000	0	86,32	48,16	

Die nach Gleichung (20) berechneten Werthe H_m sind für verschiedene Verhältnisse $F_o : F_u$ in der folgenden Tabelle zusammengestellt worden.

m	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2
1	0,39	0,39	0,38	0,38	0,37	0,37
2	0,77	0,76	0,75	0,74	0,73	0,73
3	1,13	1,11	1,10	1,09	1,07	1,06
4	1,42	1,40	1,38	1,36	1,34	1,32
5	1,55	1,52	1,49	1,47	1,44	1,42

Der Einfluss von $t = 35°$ C. wird der Reihe nach (abgerundet):

$$H_t = 540\,F_o;\quad 510\,F_o;\quad 480\,F_o;\quad 460\,F_o;\quad 440\,F_o;\quad 420\,F_o.$$

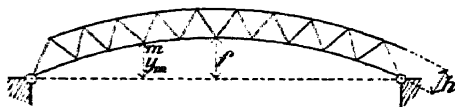
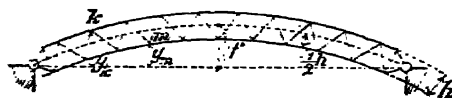
In der Nähe des Scheitels weichen also die H-Linien wesentlich von einander ab. Den Einfluss dieser Unterschiede auf die Spannkräfte werden wir später besprechen. Vergl. No. 85.

82. Bogenträger von nahezu unveränderlicher Höhe. Die in den Figuren 213 und 214 dargestellten Bogenträger mit annähernd konstantem r_m, welche häufig der Kürze wegen *Parallelträger* genannt werden, sind meistens so gebildet, dass die oberen und unteren Knotenpunkte in Kreisbögen mit gemeinsamem Mittelpunkte liegen. Bedeutet dann h den Unterschied der beiden Kreishalbmesser, so darf man r_m durch h ersetzen und, bei gleichen (oder annähernd gleichen) Feldweiten, die Formeln

Fig. 213.

Fig. 214.

$$w_m = \frac{y_m}{h^2_m}\,\frac{F_c}{F_m};\quad z = y_m w_m;$$

$$H_t = \frac{\varepsilon E l F_c}{\lambda \Sigma z_m}\,t$$

anwenden. Man vergl. die Begründung von (9) und (10). Kürzt man alle w und z durch $1 : h^2_m$ und nimmt einen überall gleichen Gurtquerschnitt an, so erhält man sehr einfach:

(22) $$w_m = y_m; \quad z_m = y^2_m; \quad H_t = \frac{\varepsilon E F_c l h^2}{\lambda \sum y^2_m} t.$$

In den Formeln für H_t bedeutet F_c einen mittleren Gurtquerschnitt.

Die Gleichungen (22) liefern auch dann noch brauchbare Werthe, wenn die Trägerhöhe h sich vom Scheitel nach dem Kämpfer hin etwas ändert. In den Ausdruck für H_t muss dann ein Mittelwerth h eingesetzt werden.

Will man für die obere und untere Gurtung verschiedene mittlere Querschnitte F_o und F_u einführen, so wähle man $F_c = F_o$ und setze für einen Knoten m der unteren und einen Knoten k der oberen Gurtung bezw.:

(23) $$w_m = y_m; \quad z_m = y^2_m \text{ und } w_k = y_k \frac{F_o}{F_u}; \quad z_k = y^2_k \frac{F_o}{F_u}.$$

Für *Parabelbögen* lassen sich die gewonnenen Ergebnisse noch erheblich vereinfachen. Dazu nehmen wir mit Bezugnahme auf Fig. 215 an, es folgen die Gurtungen den Gesetzen:

$y_o = y + h_o$ bezw.

$y_u = y - h_u$,

wobei

$$y = \frac{4fx(l-x)}{l^2}$$

die Gleichung einer Parabel von der Pfeilhöhe f ist. Sodann ersetzen wir (ähnlich wie in No. 80) die Einzellasten w durch eine stetige Belastung, welche an der Stelle x die Höhe

$$w = y_u + y_o \frac{F_o}{F_u}$$

Fig. 215.

$$= y - h_u + (y + h_o) \frac{F_o}{F_u}$$ hat und welcher dann die Momentengleichung

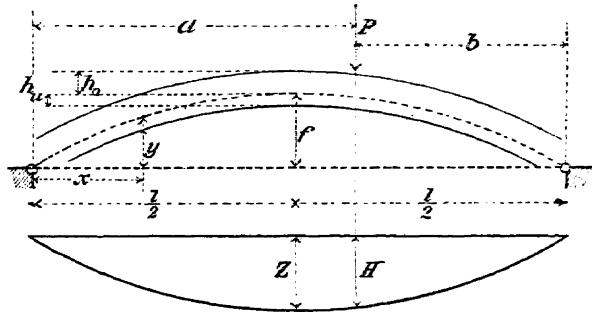
$$\frac{d^2 M_w}{dx^2} = -w = -\frac{4fx(l-x)}{l^2}\left(1 + \frac{F_o}{F_u}\right) - h_o \frac{F_o}{F_u} + h_u$$

entspricht. Durch zweimalige Integration dieser Beziehung finden wir

$$M_w = \frac{f}{3l^2}(xl^3 - 2lx^3 + x^4)\left(1 + \frac{F_o}{F_u}\right) + \tfrac{1}{2}\left(h_o \frac{F_o}{F_u} - h_u\right) x (l - x),$$

wobei die Konstanten mittels der Bedingung bestimmt wurden, dass $x = 0$ und $x = l$ den Werth $M = 0$ liefern müssen. Das Moment M_w dividiren wir durch

$$\mathfrak{N} = \int_0^l \left[(y - h_u)^2 + (y + h_o)^2 \frac{F_o}{F_u}\right] dx = \frac{8f^2 l}{15} \frac{F_o + F_u}{F_u} \omega, \text{ wo}$$

(24) $$\omega = 1 + \frac{5}{2} \frac{h_o F_o - h_u F_u}{f(F_o + F_u)} + \frac{15}{8} \frac{h^2_o F_o + h^2_u F_u}{f^2 (F_o + F_u)}.$$

Der von einer Temperaturänderung t herrührende Werth H ist:

$$H_t = \frac{\varepsilon E F_o l h^2 t}{\mathfrak{N}}, \text{ d. i.}$$

(25)
$$H_t = \frac{15\,\varepsilon E t h^2 F_o F_u}{8 f^2 (F_o + F_u)\,\omega}.$$

Indem wir dann schliesslich x durch a ersetzen, erhalten wir den Einfluss einer Einzelkraft P auf H:

(26)
$$H = P\frac{M_w}{\mathfrak{N}} = \frac{5P}{8 f l^3 \omega}\, a(l-a)\left[l^2 + a(l-a) + \frac{3}{2}\frac{l^2}{f}\frac{h_o F_o - h_u F_u}{F_o + F_u}\right].$$

Die nach Gleichung (26) aufgetragene H-Linie weicht so wenig von einer *Parabel* ab, dass der Gedanke nahe liegt, sie durch eine Parabel zu ersetzen, so zwar, dass beide Linien mit der Nulllinie gleichgrosse Flächen einschliessen. Die Bedingung hierfür lautet:

$$\frac{Z 2 l}{3} = \frac{P}{\mathfrak{N}}\int_0^l M_w\,dx$$

und liefert für Z den Werth:

(27)
$$Z = \frac{3 P l}{16 f}\,\nu, \text{ wo}$$

(28)
$$\nu = \frac{f(F_o + F_u) + 1{,}25\,(h_o F_o - h_u F_u)}{f(F_o + F_u) + 2{,}5\,(h_o F_o - h_u F_u) + \frac{15}{8f}(h_o^2 F_o + h_u^2 F_u)}.$$

Die Gleichung der parabelförmigen H-Linie ist:

(29)
$$H = \frac{3 P a b}{4 f l}\,\nu;$$

sie liefert auch für flache Kreisbögen sehr zuverlässige Ergebnisse.

Für den in Fig. 213 dargestellten Fall ist $h_o = h$ und $h_u = 0$. Man findet:

(30)
$$\left\{\begin{aligned} \nu &= \frac{f(F_o + F_u) + 1{,}25\,h F_o}{f(F_o + F_u) + 2{,}5\,h F_o\left(1 + 0{,}75\,\frac{h}{f}\right)} \\ H_t &= \frac{15\,\varepsilon E t h^2 F_o F_u}{8f\left[f\left(F_o + F_u\right) + 2{,}5\,h F_o\left(1 + 0{,}75\,\frac{h}{f}\right)\right]}. \end{aligned}\right.$$

Setzt man einmal $F_o = F_u$, sodann $F_o = 2F_u$, so erhält man, wenn $f = 4h$ ist, $\nu = 0{,}85$ bezw. $\nu = 0{,}81$ und erkennt hieraus, dass das Querschnittsverhältniss $F_o : F_u$ in der Regel keinen wesentlichen Einfluss auf H haben wird. Mit der zulässigen Vereinfachung $F_o = F_u$ gehen die Gleichungen (28) für den Träger in Fig. 213 über in:

(31)
$$\left\{\begin{aligned} \nu &= \frac{8f + 5h}{8f + 2{,}5h\left(4 + 3\,\frac{h}{f}\right)}; \\ H_t &= \frac{15\,\varepsilon E t h^2 F_c}{2f\left[8f + 2{,}5h\left(4 + 3\,\frac{h}{f}\right)\right]}, \end{aligned}\right.$$

Fig. 213.

wo jetzt F_c einen Mittelwerth der Querschnitte F_o und F_u bedeutet.*)

*) Maassgebend sind hauptsächlich die Querschnitte in der Nähe des Scheitels.

Für den zweiten wichtigen Sonderfall in Fig. 214 ergiebt sich mit $F_o = F_u = F_c$ (wegen $h_o = h_u = \frac{1}{2} h$):

$$(32) \qquad \nu = \frac{1}{1 + \frac{15}{32} \frac{h^2}{f^2}} \text{ und } H_t = \frac{15\, \varepsilon E t h^2 F_c \nu}{16 f^2}.$$

Fig. 214.

Der Verfasser empfiehlt die Anwendung parabelförmiger H-Linien auf das dringendste. Vergl. des Verfassers: Theorie und Berechnung der eisernen Bogenbrücken, Berlin 1880, Seite 34.

b. Ermittelung der Spannkräfte.

83. Allgemeine Beziehungen. Nach Bestimmung des Horizontalschubes H lässt sich das Angriffsmoment M_m für den Knotenpunkt m (Fig. 201) in der Form darstellen:

$$(33) \qquad M_m = M_{om} - H' y_m \cos \alpha = M_{om} - H y_m,$$

wo M_{om} den Werth des Momentes für den Fall $H = 0$ bedeutet, d. i. das Angriffsmoment für den Knoten m eines einfachen Balkens AB.

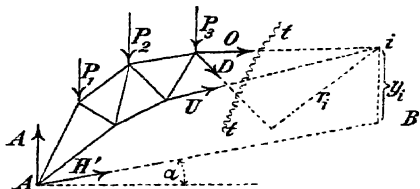



Fig. 216.

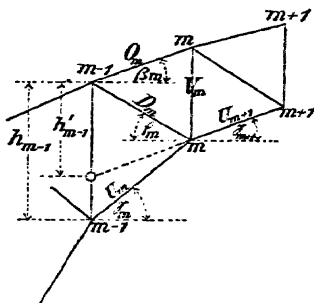



Fig. 217.

Durch M_m aber ist die Spannkraft des dem Knoten m gegenüberliegenden Gurtstabes bestimmt. So erhält man für die Gurtkräfte O_1 und U_2 in Fig. 201 die Werthe:

$$O_1 = -\frac{M_1}{r_1} \text{ und } U_2 = +\frac{M_2}{r_2}.$$

Soll die Spannkraft D in Fig. 216 aus der Momentengleichung für den Schnittpunkt i der Gurtkräfte U und O ermittelt werden, so findet man:

$$(34) \qquad M_i - D r_i = 0, \text{ wo } M_i = M_{oi} - H y_i$$

und M_{oi} das Angriffsmoment der links vom Schnitte $t - t$ wirksamen *lothrechten* Kräfte A und P in Bezug auf den Punkt i bedeutet, während $-H y_i$ den Einfluss von H' angiebt; r_i ist der Hebelarm von D.

Bei Berechnung der Angriffsmomente und Spannkräfte für das *Ständerfachwerk* (Fig. 217) führen wir die Bezeichnungen ein:

M^o_m = Angriffsmoment für den oberen Knotenpunkt m
M^u_m = „ „ „ „ unteren „ m

und finden dann:

$$O_m = -\frac{M^u_m}{h_m \cos \beta_m}; \quad U_m = +\frac{M^o_{m-1}}{h_{m-1} \cos \gamma_m}. \tag{35}$$

Die Spannkräfte in den Füllungsstäben kann man wie vorhin mittels der durch Formel (34) dargestellten Ritter'schen Momentengleichung bestimmen, oder auch auf die folgende Weise:

Man führt durch O_m, D_m, U_m einen lothrechten Schnitt, setzt die Summe der links vom Schnitte wirkenden wagerechten Kräfte $= 0$, erhält dann zunächst

$$D_m \cos \varphi_m + O_m \cos \beta_m + U_m \cos \gamma_m + H = 0,$$

drückt nun O und U mittels Gleich. (35) aus und berücksichtigt schliesslich, dass

$$M^o_m = M^u_m - H h_m$$

ist, weil sich beim Uebergange vom unteren zum oberen Knoten m nur der Einfluss von H auf das Moment ändert. Man gelangt dann zu der übersichtlichen Formelgruppe:

$$\left\{\begin{aligned} & O_m \cos \beta_m = -\frac{M^u_m}{h_m}; \quad U_m \cos \gamma_m = +\frac{M^o_{m-1}}{h_{m-1}} \\ & D_m \cos \varphi_m = \frac{M^o_m}{h_m} - \frac{M^o_{m-1}}{h_{m-1}} = \frac{M^u_m}{h_m} - \frac{M^u_{m-1}}{h_{m-1}}. \end{aligned}\right. \tag{36}$$

Hiernach ist man z. B. im Stande, mit Hilfe der Einflusslinien für die Grössen: $M^u : h$ und $M^o : h$ sämmtliche Spannkräfte O, U, D zu bestimmen.

Auch die Spannkräfte in den Ständern lassen sich durch die Momente M^u und M^o ausdrücken. Greift die Belastung oben an, auf welchen Fall wir uns hier beschränken wollen, so folgt aus dem Gleichgewicht der am unteren Knotenpunkte m angreifenden Kräfte:

$$V_m + D_m \sin \varphi_m + U_{m+1} \sin \gamma_{m+1} - U_m \sin \gamma_m = 0,$$

und aus dieser erhält man, wenn man D_m, U_{m+1} und U_m mittels der Gleichungen (36) bestimmt und die Beziehungen

$$\operatorname{tg} \varphi_m + \operatorname{tg} \gamma_m = \frac{h_{m-1}}{\lambda_m} \text{ und } \operatorname{tg} \varphi_m + \operatorname{tg} \gamma_{m+1} = \frac{h_{m-1}}{\lambda_m}$$

beachtet, die einfache Formel:

$$V_m = \frac{h'_{m-1}}{\lambda_m}\left(\frac{M^o_{m-1}}{h_{m-1}} \frac{h_{m-1}}{h'_{m-1}} - \frac{M^o_m}{h_m}\right). \tag{37}$$

Darin bedeutet h'_{m-1} die obere der Strecken, in welche h_{m-1} durch die Verlängerung des Stabes U_{m+1} zerlegt wird.

Auf ähnliche Weise können auch die Spannkräfte D des Strebenfachwerks dargestellt werden. Man denke sich die punktirten Ständer eingeschaltet, Fig. 218, und findet:

$$(38)\quad \left\{ \begin{aligned} D_m \cos \varphi_m &= \frac{M^o_m}{h_m} - \frac{M^o_{m-1}}{h_{m-1}} = \frac{M^u_m}{h_m} - \frac{M^u_{m-1}}{h_{m-1}} \\ D_{m-1} \cos \varphi_{m-1} &= \frac{M^o_{m-2}}{h_{m-2}} - \frac{M^o_{m-1}}{h_{m-1}} = \frac{M^u_{m-2}}{h_{m-2}} - \frac{M^u_{m-1}}{h_{m-1}}. \end{aligned} \right.$$

Werden in jedem Felde zwei sich kreuzende steife Diagonalen angeordnet (Fig. 219), so ist die genaue Berechnung der Spannkräfte eine ausserordentlich mühsame Arbeit, weil ausser H noch in jedem Felde eine statisch nicht bestimmbare Grösse, nämlich die Spannkräfte in einer der beiden Diagonalen, auftritt. Wir begnügen uns deshalb hier mit einem Annäherungsverfahren.*)

Fig. 218.

Es bedeuten: D die Spannkraft, d die Länge und F den Querschnitt der linkssteigenden und D', d', F' die entsprechenden Werthe der rechtssteigenden Diagonale irgend eines Feldes, ferner seien für die übrigen Stablängen und die Winkel die in der Fig. 220 angegebenen Bezeichnungen gewählt. Auf die Aenderung $\Delta\gamma$ der Winkel γ haben die Längenände-

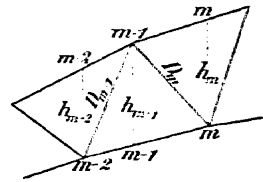
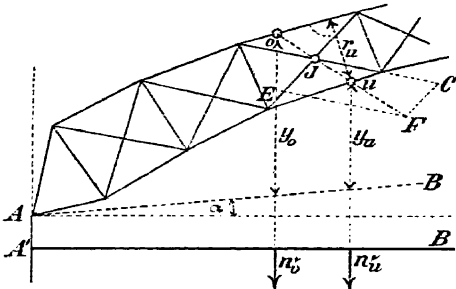
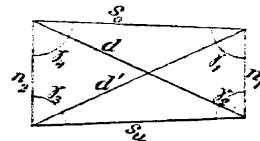



Fig. 219.

Fig. 220.

*) Das genauere Verfahren findet sich in: *Müller-Breslau*, Theorie und Berechnung der eisernen Bogenbrücken (Berlin 1880) Seite 72. Eine nachträgliche schärfere Berechnung, die allerdings wesentlich mühsamer ist, dürfte meistens nicht zu entbehren sein. Mit Rücksicht hierauf ist die Anordnung des Gitterwerks nach Fig. 219 wenig zu empfehlen.

rungen Δd und $\Delta d'$ einen hervorragenden Einfluss, und es sei deshalb aus der Gleichung

$$d^2 = s^2_o + n^2_1 - 2 s_o n_1 \cos \gamma_1,$$

unter Vernachlässigung von Δs_o, Δn_1 die Beziehung

$$2 d \Delta d = 2 s_o n_1 \sin \gamma_1 \Delta \gamma_1$$

gebildet und hieraus (und auf ähnliche Weise) sei erhalten:

$$\Delta\gamma_1 = \frac{d\Delta d}{s_o n_1 \sin\gamma_1}; \quad \Delta\gamma_2 = \frac{d'\Delta d'}{s_u n_1 \sin\gamma_2}; \quad \Delta\gamma_3 = \frac{d\Delta d}{s_u n_2 \sin\gamma_3}; \quad \Delta\gamma_4 = \frac{d'\Delta d'}{s_o n_2 \sin\gamma_4}.$$

Da nun die Summe der Viereckswinkel γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 auch nach der Formänderung $= 360°$ ist, so ergiebt sich $\Delta\gamma_1 + \Delta\gamma_2 + \Delta\gamma_3 + \Delta\gamma_4 = 0$, und hieraus folgt dann:

$$d\Delta d \frac{s_u n_2 \sin\gamma_3 + s_o n_1 \sin\gamma_1}{\sin\gamma_1 \sin\gamma_3} = -d'\Delta d' \frac{s_o n_2 \sin\gamma_4 + s_u n_1 \sin\gamma_2}{\sin\gamma_2 \sin\gamma_4},$$

oder, da der Inhalt des Vierecks sowohl $= \frac{1}{2}(s_u n_2 \sin\gamma_3 + s_o n_1 \sin\gamma_1)$ wie auch $= \frac{1}{2}(s_o n_2 \sin\gamma_4 + s_u n_1 \sin\gamma_2)$ gesetzt werden darf,

$$\frac{\Delta d}{\Delta d'} = -\frac{d'}{d} \frac{\sin\gamma_1 \sin\gamma_3}{\sin\gamma_2 \sin\gamma_4}.$$

Nach Einführung von $\Delta d = \frac{Dd}{EF}$ und $\Delta d' = \frac{D'd'}{EF'}$ ergiebt sich

$$\frac{D}{D'} = -\frac{d'^2}{d^2} \frac{F}{F'} \frac{\sin\gamma_1 \sin\gamma_3}{\sin\gamma_2 \sin\gamma_4}$$

und, wenn $s_o \parallel s_u$ ist, wenn also $\sin\gamma_1 = \sin\gamma_2$ und $\sin\gamma_3 = \sin\gamma_4$ ist,

$$(39) \qquad \frac{D}{D'} = -\frac{d'^2}{d^2} \frac{F}{F'}.$$

Man nehme (wenigstens bei der ersten Berechnung) $F = F'$ an, und benutze die vorstehende Gleichung auch dann, wenn s_o und s_u nur annähernd parallel sind.

Werden nun, vom Kreuzungspunkte J der Diagonalen aus, auf diesen die Strecken JC und JE (Fig. 219) so angetragen, dass $\overline{JC} : \overline{JE} = d'^2 F : d^2 F'$ ist, und wird das Parallelogramm JF gezeichnet, so giebt JF die Richtung der Mittelkraft $\mathfrak{D}$ aus den Spannkräften D und D' an. Sind o und u die Schnittpunkte der Geraden JF mit den Gurtungen, ferner M^o und M^u die für die Punkte o und u berechneten Angriffsmomente, so ergeben sich die Spannkräfte für die Gurtungen:

$$(40) \qquad O = -\frac{M_u}{r_u} \text{ und } U = +\frac{M_o}{r_o},$$

wenn r_o das Loth von Punkt o auf die untere Gurtung und r_u das Loth von u auf die obere Gurtung bedeutet.

Die Spannkräfte D und D' werden durch Zerlegung von $\mathfrak{D}$ gefunden, und bei Berechnung von $\mathfrak{D}$ verfährt man genau so, als befinde sich in dem fraglichen Felde nur eine die Punkte o und u verbindende Diagonale.

Behufs Ermittelung der H-Linie nach No. 77 werden den Punkten o und u die Gewichte $w_o = \frac{s_u y_o}{r_o^2} \frac{F_c}{F_u}$ und $w_u = \frac{s_o y_u}{r_u^2} \frac{F_c}{F_o}$ zugeschrieben, ferner die Werthe $z_o = w_o y_o$; $z_u = w_u y_u$. Die Berechnung von H_t erfolgt dann nach Gleichung 7. In der Regel sind die in No. 82 angeführten Vereinfachungen $w_o = y_o$ und $w_u = y_u$ zulässig oder — was noch mehr zu empfehlen ist — die Benutzung der parabelförmigen H-Linie.

Zur Bestimmung der Grenzwerthe der Spannkräfte bedient man sich im Allgemeinen am zweckmässigsten der Einflusslinien.

84. Einflusslinien für die Angriffsmomente und Spannkräfte. Die Einflussfläche für das **Angriffsmoment**

$$M_m = M_{om} - H y_m = y_m \left(\frac{M_{om}}{y_m} - H \right) \qquad (41)$$

ergiebt sich — wenn y_m als Multiplikator angesehen wird*) — als der Unterschied der $(M_{om} : y_m)$-Fläche und der H-Fläche. Nach Aufzeichnung der H-Linie $A'S'B'$ (Fig. 221) trage man auf der Lothrechten durch A die Strecke $\overline{A'A''} = 1 \frac{x_m}{y_m}$ ab**), verbinde A'' und B' durch eine Gerade, bestimme auf dieser senkrecht unter m den Punkt m' und ziehe $A'm'$. Die schraffirte Fläche ist dann die Einflussfläche für M_m***): sie gestattet die Berechnung der

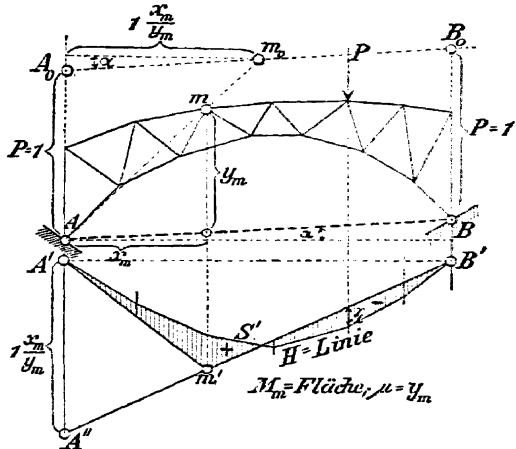



Fig. 221.

*) Vergl. Seite 174. Wir werden die Multiplikatoren der Einflussflächen mit μ bezeichnen und stets an die betreffenden Flächen setzen.

**) Die zeichnerische Bestimmung von $1 \cdot \frac{x_m}{y_m}$ ist in der Figur 221 angedeutet worden. Der Verfasser zieht die Berechnung vor.

***) Wäre $A'A'' = 1 \cdot x_m$, so wäre das Dreieck $A'm'B'$ nach Band I, S. 111, die Einflussfläche für das Moment M_{om}.

Grenzwerthe ${}_{max}M_m$ und ${}_{min}M_m$ in der Form:

$$ {}_{max}M_m = \mu \left(\sum_+ P\eta + g\left(F_+ - F_-\right) + H_t\right) $$

$$ {}_{min}M_m = -\mu \left(\sum_- P\eta - g\left(F_+ - F_-\right) + H_t\right), $$

wobei $\sum_+ P\eta$, $\sum_- P\eta$, F_+ und F_- die auf Seite 183 erklärte Bedeutung haben; dort ist auch gezeigt, dass man im Falle gleich langer Felder auch setzen darf:

$$ g\left(F_+ - F_-\right) = g\lambda\left(\sum_+ - \sum_-\right). $$

Figur 221 setzt voraus, dass m der oberen Gurtung angehört und die Belastung oben angreift. Ist m ein Knoten der unbelasteten Gurtung (Fig. 222), so beachte man, dass jedem Felde F_1F_2 eine gerade Einflusslinie L_1L_2 entsprechen muss.

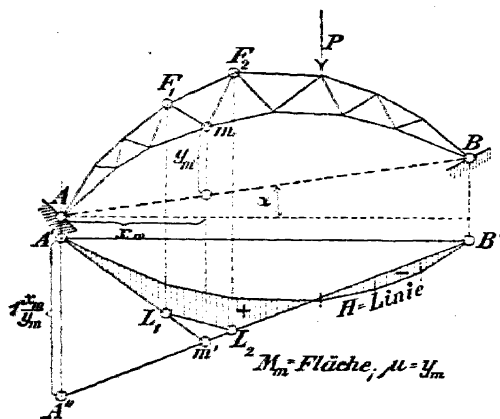



Fig. 222.

Durch die Momente M_m sind die Spannkräfte in den Gurtungen bestimmt.

Bei **Untersuchung eines Füllungsstabes** gehen wir, mit Bezugnahme auf Fig. 216, von der für jeden Neigungswinkel des Stabes gültigen Gleichung $Dr_i = \pm M_i$ aus und ermitteln zunächst die Einflussfläche für $M_i = M_{oi} - Hy_i$. Nach Aufzeichnung der H-Linie machen wir $A'A'' = 1 \cdot \frac{x_i}{y_i}$, Fig. 223, ziehen die Gerade $A''B'$, bestimmen auf dieser senkrecht unter i den Punkt i', verbinden i und A' und tragen schliesslich die dem Felde F_1F_2 entsprechende Gerade L_1L_2 ein. Fassen wir jetzt die in Fig. 223 schraffirte Fläche als Einflussfläche für die Spannkraft D auf, so ist der Multiplikator derselben

$$ \mu = \frac{y_i}{r_i}. $$

Die Einflussflächen für D und M_i haben gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen, je nachdem die Spannkraft D in Fig. 216 links oder rechts um i dreht. Bei Feststellung dieser Vorzeichen schlage man zur Vermeidung von Irrthümern folgenden Weg ein. Man nehme eine

rechts von F_2 gelegene Last P an, und setze zunächst $H = 0$, betrachte also den Träger als einfachen Balken. Am linken Auflager greift dann nur $A = P\,\frac{b}{l}$ an, und man erhält aus der Gleichung

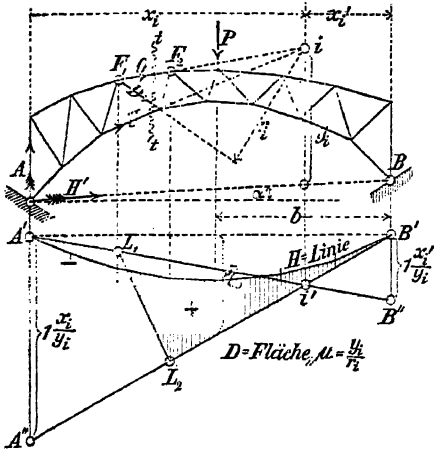
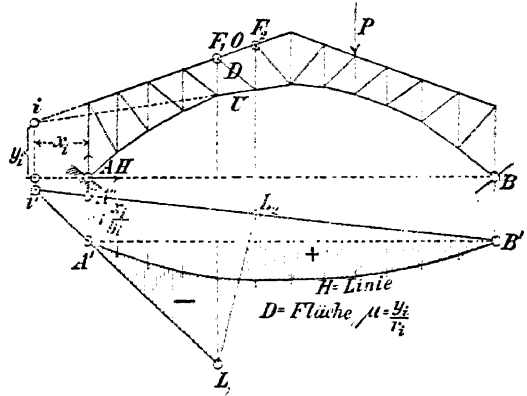



Fig. 223. Fig. 224.

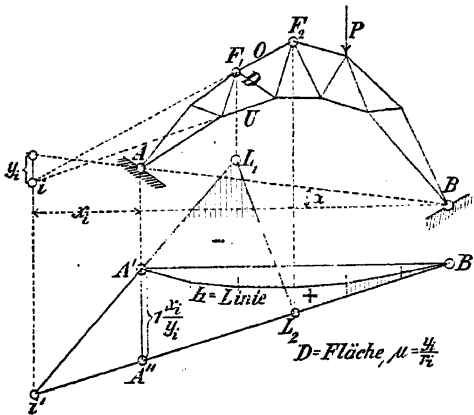
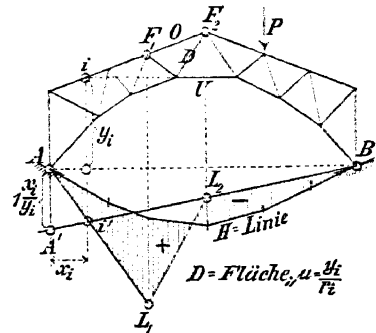



Fig. 225. Fig. 226.

$A x_i - D r_i = 0$ mit $P = 1$ den Werth:

$$D = +A\,\frac{x_i}{r_i} = +1\,\frac{b}{l}\;\frac{x_i}{r_i} = \mu \cdot 1\,\frac{b}{l} \cdot \frac{x_i}{y_i} = \mu\,\eta_0,$$

wo η_0 die unter P gemessene Ordinate der Geraden $B'\,A''$ bedeutet. Für den Einfluss von $H' = H \sec \alpha$ hat man nun: $H y_i + D r_i = 0$,

woraus $D = -\mu H$, weshalb sich im Ganzen

$$D = \mu (\eta_o - H)$$

ergiebt, woraus für den vorliegenden Fall folgt: dass D positiv ist, so lange $\eta_o > H$ ist. Erwägt man übrigens, dass die Gerade $B' A''$ die mit $x_i : y_i$ multiplicirte A-Linie ist, so braucht man zur Entscheidung der Vorzeichenfrage nur den Einfluss von A und $H' = H \sec \alpha$ zu prüfen. So findet man in dem in Fig. 224 dargestellten Falle, dass A sowohl wie H eine Zugkraft D hervorbringen, und folgert dann, dass die Ordinaten der Geraden $B' A''$ zu denjenigen der H-Linie zu fügen sind und dass die Einflussfläche rechts von F_2 positiv ist. Auf dieselbe Weise prüfe man die Figuren 225 und 226.

Bislang haben wir vorausgesetzt, dass der Punkt i auf dem Zeichenblatte liegt. Fällt er über dasselbe hinaus, so lässt sich der zur Festlegung der Geraden $B' A''$ dienende Werth $x_i : y_i$ sowie der Multiplikator $\mu = y_i : r_i$ wie folgt ermitteln. Man verlängere die Gurtstäbe O und U (Fig. 227) und ziehe an beliebiger Stelle eine Gerade ST parallel zu dem links an den fraglichen Füllungsstab D sich anschliessenden Wandgliede $F_1 F'$. Hierauf lege man durch S und T Parallelen zu AF_1 und AF', bestimme deren Schnittpunkt i_o und messe die in der Fig. 227 mit η_i, ξ_i, ρ_i bezeichneten Strecken. ρ_i bedeutet das Loth von S auf den Stab D. Man erhält dann:

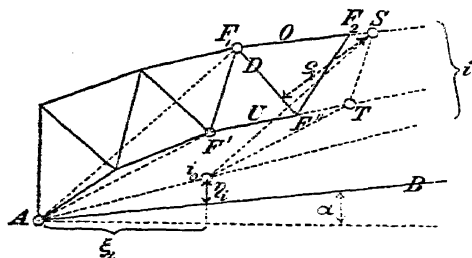



Fig. 227.

$$\frac{x_i}{y_i} = \frac{\xi_i}{\eta_i} \text{ und } \frac{y_i}{r_i} = \frac{\eta_i}{\rho_i}.$$

Der Punkt i liegt in der Geraden Ai_o, was bei der Vorzeichenbestimmung zu beachten ist.

Auf ähnliche Weise liesse sich auch die von der Geraden $A'B''$ (Fig. 223) auf der Lothrechten durch B abgeschnittene Strecke $1 \cdot \frac{x'_i}{y_i}$ ermitteln, doch ist dies nicht nöthig, da man die Geraden $A'B''$ schneller auf andere Weise bestimmen kann. Man muss nur daran denken, dass der Geradenzug $A' L_1 L_2 B'$ die Einflusslinie für die Spannkraft D des einfachen Balkens AB ist.

In Fig. 228 ist beispielsweise die D-Fläche eines rechtssteigenden Füllungsstabes dargestellt worden. Punkt i liege ausserhalb des Blattes; daher wurde $x_i : y_i = \xi_i : \eta_i$ gefunden. Die Hilfslinien zur Ermittelung

von i_o sind wieder ausgelöscht worden. i_o ergab sich oberhalb der Geraden AB, und es liegt daher auch i oberhalb AB. Die Kräfte A und $H' = H \sec \alpha$ erzeugen in D Drücke, weshalb $A' A'' = 1 \frac{x_i}{y_i}$ nach oben aufgetragen wurde.*) Zur Festlegung der Geraden $L_2 L_1$ und $A' L_1$ wurden zwei Verfahren angewandt, erstens die Bestimmung des Nullpunktes N auf dem im I. Bande, Seite 237, Fig. 225 gezeigten Wege, zweitens durch Ermittelung der Strecke $L_2 T$, welche die Geraden $B' A''$ und $A' B''$ auf der Senkrechten durch den der belasteten Gur-

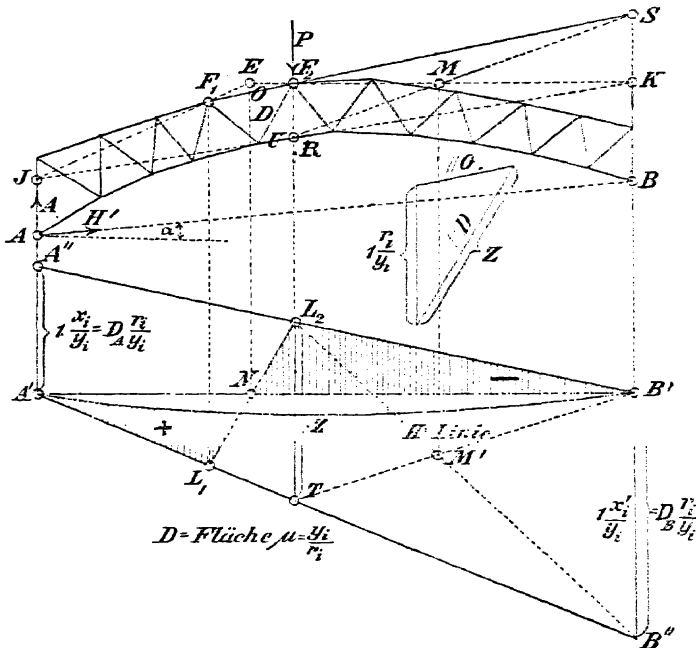



Fig. 228.

tung angehörenden Endpunkt F_2 des Stabes D abschneidet. Wir wiesen früher das Gesetz nach: Zerlegt man $P = 1$ nach den Richtungen von O und D und ist die zu D parallele Seitenkraft $= [D]$, so ist $\overline{L_2 T} = [D]$, vorausgesetzt, dass die Einflussfläche den Multiplikator 1 hat**).
Da nun im vorliegenden Falle ein Multiplikator $\mu = \frac{y_i}{r_i}$ eingeführt ist, so muss $P = 1$ ersetzt werden durch $\frac{1}{\mu} = 1 \frac{r_i}{y_i}$. An die Stelle von

*) Die H-Linie wollen wir stets nach unten liegend zeichnen.

**) Vergl. Seite 203, Fig. 199.

[D] tritt jetzt der in Fig. 228 gefundene Werth Z. Die zweite Bestimmungsart der Geraden $A'L_1$ und L_2L_1 verdient natürlich den Vorzug.

Es stehen uns aber noch weitere Wege zur Verfügung, den Linienzug $A'L_1L_2B'$ festzustellen, z. B. die in der Figur angegebene Verwendung der Punkte M und M', welche nach Ermittelung von Z die schnelle Bestimmung von $B'B''$ gestattet. Sehr empfehlenswerth ist auch das in Fig. 200 angegebene Verfahren, wobei aber die Strecken $\overline{SR}$ und $\overline{VW}$ nicht $= P = 1$, sondern $= \frac{1}{\mu} = 1\,\frac{r_i}{y_i}$ zu machen sind.*) Man erhält hier allerdings zunächst eine geneigte Nulllinie $A'B'$, und muss deshalb, da man doch für alle Stäbe dieselbe H-Linie benutzen will, den Linienzug $A'L_1L_2B'$ zweimal zeichnen.

Ferner ist zu beachten, dass die Strecke $\overline{A'A''} = 1\cdot\frac{x_i}{y_i} = D_A\frac{r_i}{y_i}$ ist, wo D_A den absoluten Werth der von einem Stützenwiderstande $A = 1$ im fraglichen Wandgliede erzeugten Spannkraft bedeutet, und ebenso lässt sich $\overline{B'B''} = D_B\frac{r_i}{y_i}$ aus der durch $B = 1$ hervorgerufenen Spannkraft D_B berechnen, während schliesslich $1\,\frac{r_i}{y_i} = D_H$ gleich dem absoluten Werthe der Spannkraft in Folge einer in A angreifenden, von A nach B gerichteten Belastung $1 \sec\alpha$ ist. Hiernach kann man den Linienzug $A'L_1L_2B'$ mit Hilfe von zweien der drei Strecken: $A'A'' = D_A : D_H$, $B'B'' = D_B : D_H$ und Z bestimmen.**)

Die Benutzung der Spannkräfte D_A, D_B, D_H liefert wohl die übersichtlichsten und schärfsten Zeichnungen, vorausgesetzt, dass man die geringe Mühe nicht scheut, diese Werthe durch *Rechnung* zu bestimmen. Man gehe dann von den Gleichungen (36) und (38) aus.

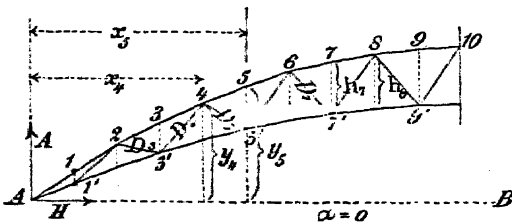



Fig. 229.

Als Beispiel sei hier die Ermittelung der D_A, D_B, D_H für den auf S. 214 dargestellten Sichelträger mitgetheilt; denn gerade für diese Träger ist das fragliche Verfahren besonders am Platze. Durch die unteren Knotenpunkte 1', 3', 5', 7', ... wurden senkrechte Geraden gezogen, welche die obere Gurtung

*) Fig. 200 bezieht sich auf eine linkssteigende Diagonale. Ist D rechtssteigend, so betrachte man das Spiegelbild.

**) Vergl. auch Band I, Seite 270, Fig. 266; dort wurden die D_A und D_B mit D' bezw. D'' bezeichnet.

in 1, 3, 5, 7, ... schneiden*). Aus den Angriffsmomenten $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, \ldots$ findet man dann für jeden Belastungszustand für eine linkssteigende Diagonale:

$$D_m \cos\varphi_m = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{(m-1)}}{h_{m-1}}, \text{ z. B. } D_5 \cos\varphi_5 = \frac{M_5}{h_5} - \frac{M_4}{h_4}$$

und für eine rechtssteigende Diagonale:

$$D_m \cos\varphi_m = \frac{M_{(m-1)}}{h_{m-1}} - \frac{M_m}{h_m}, \text{ z. B. } D_4 \cos\varphi_4 = \frac{M_3}{h_3} - \frac{M_4}{h_4}.$$

Den Zuständen $A = 1$, $B = 1$, $H = 1$ entsprechen nun für den Knoten m der Reihe nach die Werthe:

$$M_m = 1 \cdot x_m, \quad M_m = 1 \cdot x'_m, \quad M_m = -1 \cdot y_m,$$

so dass man z. B. für D_5 und D_4 die Gleichungen erhält:

Einfluss von $A = 1$; $D_5 \cos\varphi_5 = \frac{x_5}{h_5} - \frac{x_4}{h_4}$; $D_4 \cos\varphi_4 = \frac{x_3}{h_3} - \frac{x_4}{h_4}$

„ „ $B = 1$; $D_5 \cos\varphi_5 = \frac{x'_5}{h_5} - \frac{x'_4}{h_4}$; $D_4 \cos\varphi_4 = \frac{x'_3}{h_3} - \frac{x'_4}{h_4}$

„ „ $H = 1$; $D_5 \cos\varphi_5 = \frac{y_4}{h_4} - \frac{y_5}{h_5}$; $D_4 \cos\varphi_4 = \frac{y_4}{h_4} - \frac{y_3}{h_3}$.

Die Ergebnisse der Rechnung sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt worden.

m	x_m	$x'_m = l - x_m$	h_m	y_m	$\frac{x_m}{h_m}$	$\frac{x'_m}{h_m}$	$\frac{y_m}{h_m}$
1	1,0	19,0	0,245	0,72	4,082	77,550	2,939
2	2,0	18,0	0,565	1,44	3,540	31,858	2,549
3	3,0	17,0	0,725	2,00	4,138	23,448	2,759
4	4,0	16,0	0,985	2,56	4,061	16,244	2,599
5	5,0	15,0	1,085	2,96	4,608	13,825	2,728
6	6,0	14,0	1,285	3,36	4,669	10,895	2,615
7	7,0	13,0	1,325	3,60	5,283	9,811	2,717
8	8,0	12,0	1,465	3,84	5,461	8,191	2,621
9	9,0	11,0	1,445	3,92	6.228	7,612	2,713
10	10,0	10,0	1,525	4,00	6,557	6,557	2,623

	Einfluss von		
	$A = 1$	$B = 1$	$H = 1$
$D_2 \cos\varphi_2 =$	+ 0,542	+ 45,692	— 0,390
$D_3 \cos\varphi_3 =$	+ 0,598	— 8,410	— 0,210
$D_4 \cos\varphi_4 =$	+ 0,077	+ 7,204	— 0,160
$D_5 \cos\varphi_5 =$	+ 0,547	— 2,419	— 0,129
$D_6 \cos\varphi_6 =$	— 0,061	+ 2,930	— 0,113
$D_7 \cos\varphi_7 =$	+ 0,614	— 1,084	— 0,102
$D_8 \cos\varphi_8 =$	— 0,178	+ 1,620	— 0,096
$D_9 \cos\varphi_9 =$	+ 0,767	— 0,579	— 0,092
$D_{10} \cos\varphi_{10} =$	— 0,329	+ 1,055	— 0,090

*) Der bequemeren Schreibweise der Momente wegen ist die Bezeichnung der unteren Knotenpunkte anders gewählt wie in Fig. 207.

Mit Hilfe dieser Werthe lassen sich die Einflusslinien für die Spannkräfte D oder — was zweckmässiger ist — für die $D\cos\varphi$ sehr schnell auftragen. Fig. 230 b zeigt die $D_8 \cos\varphi_8$-Fläche. Die Einflüsse von A und H haben gleiche Vorzeichen und es wurde daher $\overline{A'A''} = 1 \cdot \frac{0,178}{0,096} = 1,85$ auf der entgegengesetzten Seite der H-Fläche abgetragen, damit sich die Einflüsse von A und H summiren. Die Gerade $A'B''$ konnte nicht mittels der Strecke $B'B'' = \frac{1,620}{0,096} = 16,88$ festgelegt werden, da dies zu viel Platz erfordert hätte, sondern wurde bestimmt mit Hilfe von $\overline{FL_1} = \frac{3}{10} \cdot 16,88 = 5,06$. Der Multiplikator der gezeichneten Einflussfläche ist $\mu = 0,096$.

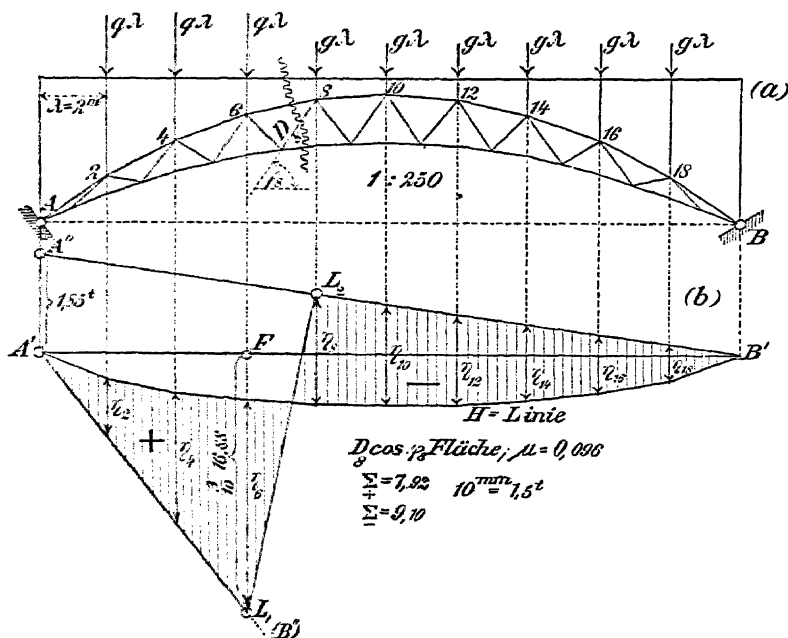



Fig. 230.

Wir wollen an der vorliegenden Figur noch die Berechnung der Spannkräfte in Folge einer gleichförmigen Belastung erläutern und nehmen zu diesem Zwecke eine ständige Belastung $g = 1,45^t$ f. d. m der Stützweite und eine bewegliche $p = 2,6^t$ an. Die Knotenlasten sind dann: $g\lambda = 1,45 \cdot 2,0 = 2,9^t$ und $p\lambda = 2,6 \cdot 2,0 = 5,2^t$. Um ${}_{max}D_8$ zu erhalten, werden die Knoten rechts von D_8 nur mit $g\lambda$ belastet, die Knoten links davon mit $q\lambda = (g+p)\lambda = 8,1^t$. Man misst nun:

$$\sum_{+} = \eta_2 + \eta_4 + \eta_6 = 7,92; \quad \sum_{-} = \eta_8 + \eta_{10} + \eta_{12} + \eta_{14} + \eta_{16} + \eta_{18} = 9,10$$

und erhält:

$$_{max}D_8 \cos\varphi_8 = \mu\left(q\lambda\underset{+}{\Sigma} - g\lambda\underset{-}{\Sigma}\right)^{*)} = 0{,}096\,(8{,}1 \cdot 7{,}92 - 2{,}9 \cdot 9{,}10) = + 3{,}6^t.$$

Vertauscht man g und q, so findet man:

$$_{min}D_8 \cos\varphi_8 = \mu\left(g\lambda\underset{+}{\Sigma} - q\lambda\underset{-}{\Sigma}\right) = 0{,}096\,(2{,}9 \cdot 7{,}92 - 8{,}1 \cdot 9{,}10) = - 4{,}9^t.$$

Zu diesen Werthen tritt noch in Folge Erwärmung bezw. Abkühlung $D_8 \cos\varphi_8 = \mp \mu H_t$.**)

In den vorstehenden Untersuchungen wurden sämmtliche Einflussflächen aus derselben H-Linie mittels Ziehen weniger Geraden abgeleitet. Dieses einfache Verfahren führt bei den Gurtstäben stets zum Ziele, versagt aber zuweilen bei Berechnung der Spannkräfte in den Wandgliedern; denn hier kann es bei sehr nahe an der Geraden AB liegenden Punkten i vorkommen, dass die Werthe $x_i : y_i$ (bezieh. $D_A : D_H$), welche bei endlichem x_i mit $y_i = 0$ unendlich werden, sehr gross ausfallen, und dass in Folge dessen die fraglichen Einflussflächen zu viel Platz beanspruchen. Das Herausziehen eines Multiplikators muss dann unterbleiben; die Einflussfläche ist zunächst für $H = 0$ aufzutragen, und hierauf muss der Einfluss von H mit Berücksichtigung der Vorzeichen hinzugefügt werden. In dem zuletzt durchgeführten Beispiele (Fig. 230) würde man also $\overline{A'A''} = 0{,}178$ $\left(\text{statt } \frac{0{,}178}{0{,}096}\right)$ und $\overline{FL_1} = \frac{3}{10} \cdot 1{,}62$ $\left(\text{statt } \frac{3}{10} \cdot \frac{1{,}62}{0{,}096}\right)$ machen, und schliesslich würde man die H-Linie durch die $(0{,}096\,H)$-Linie ersetzen, wobei die Multiplikation der Ordinaten H mit 0,096 nach Seite 175 am übersichtlichsten mit Hilfe eines Winkels, dessen Tangente $= 0{,}096$ ist, ausgeführt wird.

Der Verfasser pflegt dieser letzteren Darstellungsweise nach Möglichkeit aus dem Wege zu gehen, indem er gleich von vornherein die H-Linie nach zwei verschiedenen Maassstäben (unter Umständen auch noch nach einem dritten sehr kleinen Maassstabe) aufträgt und dann die grössere H-Linie zur Untersuchung aller Gurtstäbe benutzt, die kleinere zur Berechnung der Füllungsglieder. Nur bei den Wandgliedern von Sichelträgern sind diese Maassregeln zuweilen fruchtlos.

Bezüglich der Einführung wagerechter Nullachsen sowie der übersichtlichen Zusammenstellung der Einflussflächen und der Ergebnisse der Rechnung verweisen wir auf No. 73.

c. Vollständiges Zahlenbeispiel. Berechnung einer Eisenbahnbrücke mit Bogenträgern.

(Tafel 3 und 4.)

85. Eine eingleisige Eisenbahnbrücke soll zwei Hauptträger mit den in Fig. 231 auf Tafel 3 angegebenen Längenabmessungen erhalten. Die Knoten-

---

*) Vergl. Seite 184. Genauer ist $_{max}D \cos\varphi = \mu\left(q\underset{+}{F} - g\underset{-}{F}\right)$; doch ist der oben angegebene Weg schneller zum Ziele führend und sein Ergebniss genügend scharf.

**) Wie man H_t in die Rechnung einführt, darüber giebt das in No. 85 behandelte vollständige Zahlenbeispiel Auskunft.

punkte der unteren Gurtungen liegen auf einer Parabel; die obere Gurtung ist wagerecht. Das Gewicht der nach Fig. 232 angeordneten Brückenbahn beträgt 700^k f. d. Meter Gleis und das Gewicht der beiden Hauptträger und des Querverbandes wird nach Band I, Seite 429 mit $150 + 30l = 150 + 30 \cdot 20 = 750^k$ in Rechnung gestellt. Es ist dann für jeden Hauptträger $g = \frac{1}{2}(700 + 750)^k$, mithin die ständige Belastung eines Trägerfeldes: $g\lambda = 1450^k = 1{,}45^t$. Die Raddrücke und Radstände der Fahrzeuge sind in Fig. 242 (Tafel 3) angegeben worden. — Gesucht sind die Spannkräfte und Querschnittsabmessungen des Hauptträgers.

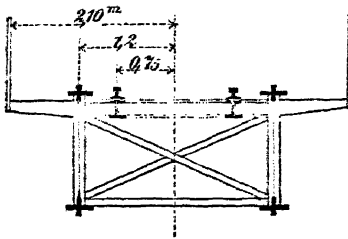



Fig. 232.

1. *Die H-Linie* des vorliegenden Trägers wurde bereits in No. 81 (Seite 221, Fig. 212) berechnet. Das Querschnittsverhältniss $F_o : F_u$ ist gleich 1 gewählt; demselben entsprechen die in Fig. 240 eingeschriebenen Werthe H.

2. *Die Spannkräfte S_g in Folge der ständigen Belastung* wurden, nach Berechnung von $H_g = 12{,}5^t$*) in Fig. 233 mittels eines Cremona'schen Kräfteplanes bestimmt und hierauf in die Fig. 234 eingetragen.

3. *Die Spannkräfte S_p in Folge der beweglichen Belastung* sind mit Hilfe von Einflusslinien nach dem in No. 84 gelehrten Verfahren bestimmt worden. Dabei waren einige Vereinfachungen möglich, die sich aus der gewählten Trägerform ergeben.

Liegt in Fig. 222 der Punkt m der unteren Gurtung auf einer Parabel von der Gleichung $y_m = \frac{4 f x_m x_m'}{l^2}$, so erhält man für den Abstand des Punktes m' von der Geraden $A'B'$ den Ausdruck: $\overline{A'A''} \cdot \frac{x_m'}{l} = 1 \frac{x_m}{y_m} \frac{x_m'}{l} = 1 \frac{l}{4f}$; und es ist daher der Ort von m' eine zu $A'B'$ parallele Gerade. Im vorliegenden Falle ist $l = 20^m$ und $f = 2{,}5^m$, mithin $\frac{l}{4f} = 2{,}0^t$, und durch diesen Werth sind sämmtliche O-Flächen bestimmt; vergl. Fig. 240, in der die O_3-Fläche durch Schraffirung hervorgehoben ist, und welche die Ordinaten der auf wagerechte Null-Linien bezogenen O-Flächen liefert.

Fig. 241 enthält die Darstellung der Einflussflächen für U_2, U_3, U_4, U_5. Behufs Ermittelung der (schraffirten) U_5-Fläche wurde $A4''$ gleich dem für den oberen Knotenpunkt 4 berechneten Werthe $x_4 : y_{o4} = x_4 : h_o = \frac{8}{5}^t$ gemacht, sodann auf der Geraden $4''B$ der Punkt $4'$ lothrecht unter 4 bestimmt und die Gerade $A4'$ gezogen. Da nun y_o den festen Werth h_o besitzt und die Trägerfelder gleich lang sind, so zerlegen die den Knotenpunkten 1, 2, 3 entsprechenden Punkte $1''$, $2''$, $3''$ die Strecke $A4''$ in gleiche Theile**), und damit sind die Einflussflächen für U_2, U_3, U_4 bestimmt. Für den ersten Stab

*) Vergl. Seite 221; dort wurde $g\lambda = 2{,}90^t$ der Werth $H_g = 25{,}0^t$ gefunden.

**) Hieraus folgt, dass die Punkte $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ auf einer Parabel liegen, deren Pfeil $= 1 \frac{l}{4h_o}$ ist.

der unteren Gurtung erhält man $U_1 = H \sec \gamma_1 = 1{,}069\,H$ und, da die in Fig. 241 oberhalb der H-Linie eingezeichnete Laststellung den Horizontalschub $H_p = \Sigma P\eta = 43{,}2^t$ erzeugt, $U_{1p} = 1{,}069 \cdot 43{,}2 = 47{,}4^t$.

Die Ermittelung der Spannkräfte in den Füllungsstäben wird durch den Umstand vereinfacht, dass sich die Gurtstäbe O_{m-1} und U_m in demselben Punkte i schneiden wie O_m und U_m. Hat man also in Fig. 243 die D_4-Fläche mit Hilfe von $AA_4 = x_{i4} : h_o$ als den Unterschied der von Geraden begrenzten Fläche AL_1L_2BA und der H-Fläche erhalten, so findet man die V_3-Fläche (indem man L_1L_2 durch $L'L''$ ersetzt) als den Unterschied der Fläche $AL'L''BA$ und der H-Fläche. Links von F_0 und rechts von F_2 stimmen also die Einflussflächen für D_4 und V_3 überein; die Vorzeichen sind jedoch entgegengesetzte, auch sind die Multiplikatoren verschieden, nämlich $\mu = h_o : r_4$ für die D_4-Fläche und $\mu = h_o : (x_{i4} - x_3)$ für die V_3-Fläche. Es liefert also die Fig. 244, welche die auf die H-Linie als gebrochene Nullachse bezogenen D-Flächen enthält, auch sämmtliche V-Flächen*).

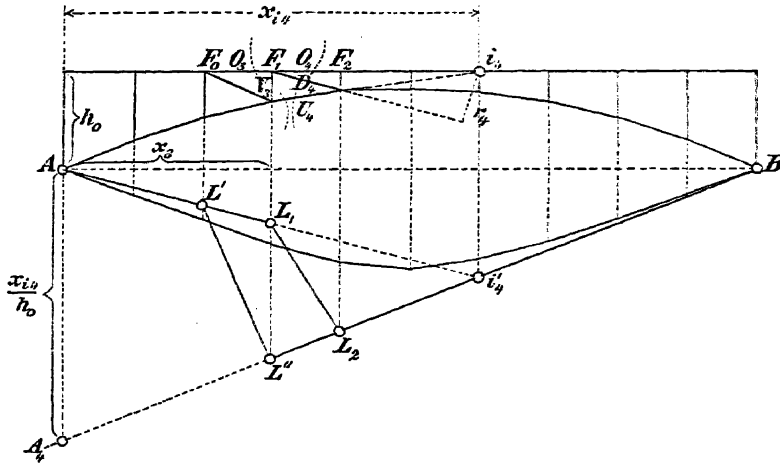



Fig. 243.

Nach Aufzeichnung der Einflussflächen wurden auf den Tafeln 3 und 4 die gefährlichsten Zugstellungen durch Probiren bestimmt und die denselben entsprechenden Werthe $\underset{+}{\Sigma} P\eta$ und $\underset{-}{\Sigma} P\eta$ ermittelt; letztere sind nebst den Multiplikatoren auf den Tafeln angegeben. Die Multiplikation der Ordinaten η mit den P ist mit Hilfe von Maassstäben ausgeführt worden. So wurde z. B. auf Tafel 3 die H-Linie im Maassstabe $1^t = 25^{mm}$ aufgetragen

*) Wir heben noch hervor, dass sich die V_o-Fläche, wegen $V_o = A - H \operatorname{tg} \gamma_1 = \operatorname{tg} \gamma\,(A \operatorname{cotg} \gamma_1 - H)$, auch als der Unterschied der $A \operatorname{cotg} \gamma_1$-Fläche und der H-Fläche deuten lässt. Der Multiplikator ist $= 1 \operatorname{tg} \gamma_1 = 3{,}0 : 6{,}67 = 0{,}45$. Die $A \operatorname{cotg} \gamma_1$-Fläche ist ein Dreieck AA_1B, welches bestimmt ist durch $\overline{AA_1} = 1 \operatorname{cotg} \gamma_1 = 6{,}67 : 3{,}0 = 2{,}22$.

und hierauf wurden die den Raddrücken $6{,}5^t$ und $4{,}5^t$ entsprechenden Ordinaten der Einflusslinien mit den Maassstäben $6{,}5^t = 25^{mm}$ bezw. $4{,}5^t = 25^{mm}$ gemessen. Für die Füllungsstäbe wurden auf Tafel 4 kleinere Maassstäbe gewählt.

Die Berechnung der von der beweglichen Belastung herrührenden Spannkräfte S_p erfolgte nach den Formeln:

$$_{max}S_p = \mu \underset{+}{\Sigma} P\eta; \quad _{min}S_p = -\mu \underset{-}{\Sigma} P\eta.$$

Die Ergebnisse wurden in Fig. 236 zusammengestellt.

4. *Einfluss der Temperaturänderung.* Ausser den Spannkräften S_g und S_p entstehen in Folge einer (hier gleichmässig vorausgesetzten) Aenderung der Aufstellungstemperatur um t° noch Spannkräfte S_t, deren absolute Werthe

$$S_t = \mu H_t$$

sind. Hinsichtlich der Vorzeichen ist zu beachten, dass ein positives H_t in der oberen Gurtung und in den Vertikalen Zugspannungen, in den übrigen Stäben Druckspannungen erzeugt. Wird $t = \pm 35^\circ$ C. angenommen, so ist (nach Seite 221) abgerundet $H_t = \pm 460\, F_o$, wo für F_o zur Sicherheit der grösste Obergurtquerschnitt (der immer einem der mittelsten Felder angehören wird) gesetzt werden soll; derselbe wird wie folgt berechnet.

Die obere Gurtung wird vorwiegend auf Druck beansprucht. Ist also σ die zulässige Spannung, so muss sein:

$$-\sigma F_o = {}_{min}O = -\mu \underset{-}{\Sigma} P\eta + O_g + O_t = -\mu \underset{-}{\Sigma} P\eta + O_g - \mu H_t$$

$$= -\mu \underset{-}{\Sigma} P\eta + O_g - \mu\, 460\, F_o$$

und hieraus folgt:

$$F_o = \frac{\mu \underset{-}{\Sigma} P\eta - O_g}{\sigma - 460\,\mu}.$$

Für das 5. Feld ist $\mu = 5{,}0$, $\underset{-}{\Sigma} P\eta = 8{,}9$, $O_g = -10{,}0$ mithin, wenn $\sigma = 700^k$ f. d. $qcm = 7000^t$ f. d. qm gestattet wird,

$$F_o = \frac{5{,}0 \cdot 8{,}9 + 10{,}0}{7000 - 460 \cdot 5.0} = 0{,}0116\, qm.$$

Für das 4. Feld ergiebt sich:

$$F_o = \frac{4{,}0 \cdot 10{,}5 + 8{,}0}{7000 - 460 \cdot 4{,}0} = 0{,}0097 < 0{,}0116$$

und man findet daher

$$H_t = \pm 460\, F_{o\,max} = \pm 460 \cdot 0{,}0116 = \pm 5{,}3^t \text{ und } S_t = \pm 5{,}3\,\mu.$$

Die hiernach berechneten Spannkräfte S_t sind in die Fig. 235 eingetragen worden; die *oberen* Vorzeichen gelten für den Fall einer *Zunahme* der Temperatur.

5. *Die Gesammtspannkräfte,* welche durch Zusammenzählung der Einflüsse der ständigen und beweglichen Belastung, sowie der Temperaturänderung erhalten werden, sind in die Fig. 237 eingeschrieben worden.

6. *Ueber die gewählten Stabquerschnitte* und die grössten Beanspruchungen giebt die folgende Tabelle Aufschluss. Zu derselben ist zu bemerken, dass die untere Gurtung in der Nähe des Scheitels denselben Querschnitt erhalten hat wie die obere Gurtung, damit die in die Rechnung eingeführte Annahme $F_o : F_u = 1$ erfüllt werde. Bei den vorzugsweise auf Druck bean-

spruchten Gurtstäben und Vertikalen wurden die Nietlöcher nicht in Abzug gebracht, wohl aber bei den von grösseren Zugkräften ergriffenen Diagonalen.

Obere Gurtung. (⊣⊢ = Querschnitt.)

Feld	Winkeleisensorte	Inhalt des vollen Querschnittes F	Grösste Spannkraft S	$\sigma = \frac{S}{F}$
5 u. 4	10.15.1,2 *cm.*	114 *qcm.*	81 000^k	710^k f. d. *qcm.*
3	10.10.1,0 „	76 „	50 000	660 „ „ „
2 u. 1	7. 7.0,9 „	47 „	30 000	640 „ „ „

Untere Gurtung. (⊣⊢ = Querschnitt.)

Feld	Winkeleisensorte	Inhalt des vollen Querschnittes F	Grösste Spannkraft S	$\sigma = \frac{S}{F}$
5 u. 4	10.15.1,2 *cm.*	114 *qcm.*	66 000^k	580^k f. d. *qcm.*
3, 2 u. 1	10.10.1,3 „	97 „	67 000^k	690 „ „ „

Diagonalen. (⅂Γ = Querschnitt.)

Feld	Winkeleisensorte	Inhalt des vollen Querschnittes F	Grösste Spannkraft S	$\sigma = \frac{S}{F - 2d\delta}$ *)
5 u. 4	14.14.1,4 *cm.*	74 *qcm.*	39 000	580^k f. d. *qcm.*
3	11.11.1,3 „	54 „	29 000	600 „ „ „
2	9.9.1,3 „	43 „	27 000	720 „ „ „
1	9.9.1,1 „	37 „	21 000	650 „ „ „

Vertikalen. (⅂Γ = Querschnitt.)

Winkeleisensorte durchweg 7,5 . 7,5 . 1,2; $F = 33$ *qcm*; $S = 21\,000^k$

$$\sigma = \frac{21\,000}{33} = 640^k \text{ f. d. } qcm.$$

Die Knickfestigkeit der gedrückten Stäbe wird am besten mittels der Euler'schen Formel beurtheilt. Hiernach soll das kleinste Trägheitsmoment J des Querschnitts bei 5facher Sicherheit mindestens sein:

$$J = \frac{5\,Ss^2}{\pi^2 E} = \frac{5\,Ss^2}{10 \,.\, 2\,000\,000},$$

wo s die Stablänge in *cm* bedeutet. Für die erste Diagonale ist z. B. erforderlich:

$$J = \frac{5 \,.\, 10\,000 \,.\, 290^2}{10 \,.\, 2\,000\,000} = 210,$$

hingegen vorhanden: $J = 2 \,.\, 139{,}7 = 279{,}4$. Auf dieselbe Weise überzeugt man sich, dass auch die übrigen Stäbe genügende Sicherheit gegen Knicken bieten

*) d = Nietdurchmesser = 2,2 *cm*; δ = Eisenstärke = 1,4 bezw. 1,3 und 1,1 *cm*.

7. *Einfluss des Querschnittsverhältnisses $F_o : F_u$.* Es sollen noch einige Rechnungsergebnisse mitgetheilt werden, welche den Einfluss des Querschnittsverhältnisses $F_o : F_u$ auf die Spannkräfte klarlegen. Nimmt man, anstatt $F_o : F_u = 1$, einmal $F_o : F_u = 0{,}7$, sodann $F_o : F_u = 1{,}2$ an, so erhält man die folgenden Ordinaten der H-Linie und Werthe H_g und H_t:*)

$$H_1 = \binom{0{,}39}{0{,}37}^{**)}; \; H_2 = \binom{0{,}77}{0{,}73}; \; H_3 = \binom{1{,}13}{1{,}06}; \; H_4 = \binom{1{,}42}{1{,}32}; \; H_5 = \binom{1{,}55}{1{,}42}$$

$$H_g = \binom{8{,}97}{8{,}38} \, g\lambda = \binom{13{,}0^t}{12{,}2}; \; H_t = \binom{540}{410} F_o$$

und hieraus ergeben sich für den stärkstbeanspruchten Obergurtstab O_5 die Werthe:

$$\Sigma P\eta = \binom{7{,}0}{10{,}1}; \quad S_g = \binom{7{,}5}{12{,}5}.$$

Der erforderliche Querschnitt F_o ist daher (vgl. Seite 240)

$$\text{für } \frac{F_o}{F_u} = 0{,}7 \qquad F_o = \frac{5{,}0 \, . \, 7{,}0 + 7{,}5}{7000 - 5 \, . \, 540} = 0{,}0099 \; qm,$$

$$\text{für } \frac{F_o}{F_u} = 1{,}2 \qquad F_o = \frac{5{,}0 \, . \, 10{,}1 + 12{,}5}{7000 - 5 \, . \, 410} = 0{,}0127 \; qm,$$

während sich für $F_o : F_u = 1{,}0$ der Werth $F_o = 0{,}0116 \; qm$ ergab.

Der Horizontalschub in Folge einer Temperaturänderung wird

$$H_t = \pm \binom{540 \, . \, 0{,}0099}{420 \, . \, 0{,}0127} = \pm \binom{5{,}3}{5{,}3}^t,$$

er stimmt also mit dem für $F_o : F_u = 1$ berechneten $H_t = \pm 5{,}3^t$ überein, so dass die in Fig. 235 zusammengestellten Spannkräfte S_t giltig bleiben.

Für den Untergurtstab U_4 (der stärker beansprucht wird als U_5) findet man

$$\Sigma P\eta = \binom{14{,}3}{11{,}7}; \; S_g = -\binom{9{,}6}{6{,}9}; \; S_t = -17{,}9; \; \mu = 3{,}37$$

$$_{min} U_4 = -\mu \, \Sigma P\eta + S_g + S_t = -\binom{76^t}{64^t}.$$

Diesen Spannkräften würden bei einer zulässigen Inanspruchnahme von $\sigma = 700^k$ f. d. qcm die Querschnitte

$$F_u = \frac{76}{0{,}700} = 109 \; qcm \text{ bezw. } F_u = \frac{64}{0{,}700} = 91 \; qcm$$

genügen. *Es ist jedoch erforderlich, das in die Rechnung eingeführte Querschnittsverhältniss $F_o : F_u$ auch der Ausführung zu Grunde zu legen, oder sich doch demselben möglichst zu nähern*, da dieses Verhältniss von bedeutendem Einfluss auf die Beanspruchung namentlich der oberen Gurtung ist; und es empfiehlt sich daher, die soeben berechneten Querschnitte F_u zu ersetzen durch

$$F_u = \frac{F_o}{0{,}7} = \frac{99}{0{,}7} = 142 \; qcm, \text{ bezw. durch } F_u = \frac{F_o}{1{,}2} = \frac{127}{1{,}2} = 106 \; qcm.$$

Für die Ausführung wäre nun streng genommen derjenige Werth $F_o : F_u$ zu ermitteln, der den billigsten Träger liefert, welche Forderung man im vorliegenden Falle auch durch die des kleinsten Trägergewichtes ersetzen darf. Die genaue Beantwortung dieser Frage würde aber sehr mühsame und zeit-

---

*) Vergl. No. 81, Seite 222.

**) In den folgenden Werthangaben bezieht sich die obere Zahl auf $F_o : F_u = 0{,}7$, die untere auf $F_o : F_u = 1{,}2$.

raubende Rechnungen verlangen und kann daher nur angenähert gegeben werden. Dazu beachte man, dass von den äusseren Kräften nur der Horizontalschub H von $F_o : F_u$ abhängt und der Einfluss einer Aenderung von H desto grösser wird, je grösser μ ist. Da die Werthe μ der Gurtstäbe nach den Kämpfern hin abnehmen, so werden auch die Unterschiede der Stabkräfte für verschiedene $F_o : F_u$ in den äusseren Feldern kleiner sein als in den mittleren. Dies zeigt in der That die folgende Tabelle, welche die absoluten Werthe der grössten Spannkräfte angiebt.

$F_o : F_u$	O_5	O_4	O_3	O_2	O_1	U_5	U_4	U_3	U_2	U_1
0,7	69	63	46	29	13	69	76	73	70	72
1,0	81	71	50	30	13	61	66	65	64	67
1,2	89	73	50	32	14	57	64	64	63	65
	Tonnen.									

Da nun weiter eine Aenderung von H auf die Spannkräfte in den Füllungsstäben einen bedeutend geringeren Einfluss hat als auf die Gurtkräfte, so ist ersichtlich, dass es hauptsächlich darauf ankommen wird, das Gewicht der Gurtungen der Mittelfelder miteinander zu vergleichen. Dieses Gewicht ist proportional $F_o + F_u$, weshalb wir noch folgende Zusammenstellung geben,

$F_o : F_u$	F_o	F_u	$F_o + F_u$
0,7	99	142	241
0,8	105	131	236
0,9	111	123	234
1,0	116	116	232
1,2	127	106	233
	qcm.		

aus welcher hervorgeht, dass sich wesentliche Unterschiede in den Gewichten der für die letzten vier Querschnittsverhältnisse berechneten Träger nicht herausstellen werden.*) Das Ergebniss, dass in der Nähe von $F_o : F_u = 1$ eine Aenderung dieses Werthes nur eine geringe Aenderung von $F_o + F_u$ nach sich zieht, fand der Verfasser auch in anderen Beispielen bestätigt, und dies ist der Grund, der ihn veranlasste, dem Werthe $F_o : F_u = 1$ den Vorzug zu geben, um so mehr als die gleichartige Ausbildung der beiden Gurtungen in der Nähe des Scheitels (Verwendung derselben Eisensorten) nur Vortheile bietet.

8. *Berücksichtigung der Längenänderungen der Füllungsstäbe bei Ermittelung der H-Linie.* Bei Berechnung der H-Linie wurden bislang die Formänderungen der Wandglieder vernachlässigt und auch hinsichtlich der Querschnittsänderung der Gurtungen Annahmen gemacht, welche der Wirklichkeit nicht ganz entsprechen. Es erscheint daher nicht unwichtig, die Zu-

*) Man erwäge auch, dass sich bei Ausarbeitung des Entwurfs stets Abweichungen zwischen den berechneten und schliesslich gewählten Querschnitten ergeben werden. Z. B. haben wir vorhin $F = 116$ durch $F = 114$ ersetzt.

lässigkeit jener Voraussetzungen zu prüfen. Wir wollen die genauere Berechnung der H-Linie nach drei verschiedenen Verfahren durchführen.

Erstes Verfahren. Es werden die Spannkräfte S' für den Zustand $H = -1$ (Figur 246, Tafel 4) und die denselben entsprechenden Längenänderungen $\Delta s = \frac{S's}{EF}$*) (Fig. 247) berechnet, am besten für $E = 1$, und nun wird für diesen Zustand ein Williot'scher Verschiebungsplan gezeichnet. Der Knotenpunkt V und die Richtung des Stabes $V5$ (vergl. Fig. 245) werden zunächst festliegend gedacht; es fällt dann V' und (da der Stab $V5$ spannungslos ist) auch $5'$ mit dem Pole O zusammen. Nach Bestimmung der Punkte $4'$, IV', $3'$, III', ... $0'$, A', welche auf die in No. 32 beschriebene Weise erfolgt, ist man im Stande, die Biegungslinie für den Zustand $H = -1$ zu zeichnen und die Aenderung δ_A der Stützweite anzugeben. Diese letztere ist doppelt so gross, wie die wagerechte Verschiebung von A gegen den Knotenpunkt V, nämlich

$$\delta_A = 2 \cdot 2200 = 4400^{dm}.$$

Aus den in die Fig. 245 eingeschriebenen Ordinaten δ_0, δ_1, ... der Biegungslinie erhält man nun die Ordinaten

$$H_m = 1 \frac{\delta_m}{\delta_A},$$

der H-Linie, nämlich

$$H_0 = \frac{41}{4400} = 0{,}01;\ H_1 = \frac{1750}{4400} = 0{,}40;\ H_2 = \frac{3350}{4400} = 0{,}76;\ H_3 = \frac{4790}{4400} = 1{,}09;$$

$$H_4 = \frac{5930}{4400} = 1{,}35;\ H_5 = \frac{6400}{4400} = 1{,}46;$$

dieselben weichen von den früher berechneten Werthen:

0; 0,38; 0,74; 1,09; 1,36; 1,47

nur unwesentlich ab. Man findet nun weiter $H_g = 12{,}6^t$ (statt $12{,}5^t$) und für den Stab $O_5: \Sigma \overline{P}r_1 = 8{,}3^t$ (statt $8{,}9^t$), erhält also nahezu dieselben Spannkräfte S_g und S_p wie früher.

Nur für H_t findet man einen wesentlich anderen Werth, nämlich (nach Seite 144)

$$H_t = \pm 1 \frac{E\delta_t{}^{**)}}{\delta_A} = \pm \frac{E\varepsilon t l}{\delta_A} = \frac{200000 \cdot 0{,}000012 \cdot 35^{\circ} \cdot 200}{4400} = \pm 3{,}8^t \text{ (statt } 5{,}3^t).$$

Im Obergurtstabe O_5 verursacht also eine Temperaturänderung um $t = 35^{\circ}$ Cels. eine Spannkraft: $S_t = \mp 5 \cdot 3{,}8 = \mp 19^t$ (statt $\mp 26{,}5^t$). Worin diese Abweichung ihren Grund hat, ist bereits auf Seite 217 gelegentlich der Untersuchung der Douro-Brücke hervorgehoben worden; es ist ein Vorzug der Näherungstheorie, für H_t stets zu grosse Werthe zu liefern, da gerade die Schätzung von t auf sehr unsicherer Grundlage beruht, und es sich deshalb dringend empfiehlt, nicht zu günstig zu rechnen. Zu beachten ist auch, dass

*) In diese Formel sind die vollen Querschnitte einzusetzen; dieselben sind in Figur 238 auf Tafel 3 zusammengestellt worden, die Stablängen in Fig. 239.

**) Die Multiplikation des Zählers mit E ist erforderlich, weil δ_A für $E = 1$ berechnet wurde. Zu beachten ist ferner, dass l in dm und E in Tonnen f. d. qdm auszudrücken sind.

ein Ausweichen der Widerlager um Δl eine Aenderung von H um $\Delta H = -1\,\frac{E\Delta l}{\delta_A}$ verursacht, so dass beispielsweise dem kleinen Werthe $\Delta l = 5^{mm} = 0{,}05^{dm}$ bereits

$$\Delta H = -\frac{200000 \,.\, 0{,}05}{4400} = 2{,}3^t$$

entspricht.

Als zweites Verfahren wählen wir das im § 2 beschriebene Stabzugverfahren und berechnen zu diesem Zwecke zunächst die Aenderungen $\Delta\vartheta$ der oberen Randwinkel ϑ. In Fig. 248 geben die auf den einzelnen Stäben stehenden Zahlen die Spannungen $\sigma' = \frac{S'}{F}$ für den Zustand $H = -1$ in Tonnen für das *qdm* an und die in die Winkel eingeschriebenen Zahlen die Cotan-

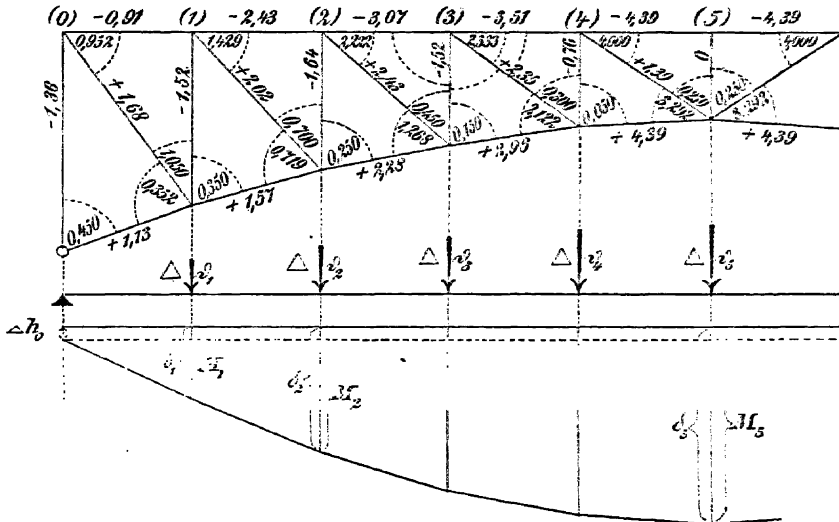



Fig. 248.

genten dieser Winkel*). Die Aenderung von ϑ_3 wird beispielsweise (für $E = 1$)

$$\Delta\vartheta_3 = 2{,}222\,(2{,}43 + 3{,}07) + 0{,}450\,(2{,}43 + 1{,}52) + 0{,}150\,(2{,}96 + 1{,}52) + 2{,}122\,(2{,}96 - 2{,}35) + 0{,}300\,(-0{,}76 - 2{,}35) = +15{,}03,$$

und auf diese Weise erhält man;

$$\Delta\vartheta_0 = -2{,}42;\ \Delta\vartheta_1 = +5{,}33;\ \Delta\vartheta_2 = -7{,}93;\ \Delta\vartheta_3 = +15{,}03;\ \Delta\vartheta_4 = +33{,}54;\ \Delta\vartheta_5 = +46{,}94.$$

Wird nun zunächst der Stab $V5$ festgehalten, so sind die Drehungswinkel ψ der Obergurtstäbe (5) (4) . . . (1), sowie der Endvertikale (h_0):

$$\psi_5 = \tfrac{1}{2}\,\Delta\vartheta_5 = 23{,}47;\ \psi_4 = \psi_5 + \Delta\vartheta_4 = 57{,}01;\ \psi_3 = \psi_4 + \Delta\vartheta_3 = 72{,}04 \text{ u. s. w.}$$
$$\psi_2 = 79{,}97;\ \psi_1 = 85{,}30;\ \psi_0 = 82{,}88$$

*) Fig. 248 wurde verzerrt gezeichnet, damit die Zahlen in der Nähe des Scheitels Platz fanden.

und die den Stäben entsprechenden Werthe ρ (d. i. Drehungswinkel mal Stablänge*)

$\rho_5 = 20 \cdot 23{,}47 = 469{,}4^{dm}$; $\rho_4 = 20 \cdot 57{,}01 = 1140{,}2^{dm}$; $\rho_3 = 20 \cdot 72{,}04 = 1440{,}8^{dm}$;
$\rho_2 = 20 \cdot 79{,}97 = 1599{,}4^{dm}$; $\rho_1 = 20 \cdot 85{,}30 = 1706{,}0^{dm}$; $\rho_0 = 30 \cdot 82{,}88 = 2486{,}4^{dm}$.

Berechnet man nun noch die (in Fig. 247 zusammengestellten) Längenänderungen $\Delta(5) = -87{,}7$, $\Delta(4) = -70{,}2$, ... $\Delta(1) = -18{,}3$, $\Delta h_o = -40{,}9$ der Stäbe (5), (4), ... (1), h_o und reiht (nach Fig. 245) die Strecken

$$\Delta(5),\ \rho_5,\ \Delta(4),\ \rho_4,\ \Delta(3),\ \rho_3,\ \ldots\ldots\ \Delta h_o,\ \rho_0$$

aneinander, so erhält man dieselben Punkte $4'$, $3'$, ... A', deren Lagen vorhin mittels des Williot'schen Verfahrens festgelegt worden sind. Das Stabzugverfahren erfordert etwas mehr Zeit, liefert aber übersichtlichere und vor allem genauere Zeichnungen.

Das dritte Verfahren besteht in der Herleitung der Biegungslinie aus den Momenten M eines einfachen Balkens, der mit den Gewichten $\Delta\mathfrak{S}_1$, $\Delta\mathfrak{S}_2$, ... $\Delta\mathfrak{S}_5$ belastet wird. Man findet für diese Momente die Werthe

$$M_1 = 1706{,}0;\ M_2 = 3305{,}4;\ M_3 = 4746{,}2;\ M_4 = 5886{,}4;\ M_5 = 6355{,}8,$$

fügt zu denselben die Verkürzung (40,9) der Endvertikale (Fig. 248) und erhält

$$\delta_1 = 1746{,}9;\ \delta_2 = 3346{,}3;\ \delta_3 = 4787{,}0;\ \delta_4 = 5927{,}3;\ \delta_5 = 6396{,}7.$$

Die dem Zustande $H = -1$ entsprechende Aenderung der Stützweite wird nach Gleich. (4) auf Seite 98 (mit $E = 1$)

$$\begin{aligned}\delta_A &= h_o \Sigma \Delta\mathfrak{S} + \lambda \Sigma \sigma' \\ &= 30\,[46{,}94 + 2\,(33{,}54 + 15{,}03 + 7{,}93 + 5{,}33 - 2{,}42)] \\ &\quad - 20\,(4{,}39 + 3{,}51 + 3{,}07 + 2{,}43 + 0{,}91)\,2 = 4400{,}4\end{aligned}$$

und es ergiebt sich daher:

$$H_o = \frac{\delta_o}{\delta_A} = \frac{40{,}9}{4400{,}4} = 0{,}01;\ H_1 = \frac{1746{,}8}{4400{,}4} = 0{,}40;\ \text{u. s. w.}$$

Ein viertes Verfahren würde in der Berechnung der δ-Linie auf dem in No. 47 gezeigten Wege bestehen. Die Gewichte w werden hier unmittelbar aus den Längenänderungen der Stäbe berechnet, während die Bestimmung von δ_A nach No. 48 zu erfolgen hat. Wir halten die Durchführung der Zahlenrechnung für entbehrlich, da dieses Verfahren bereits auf Seite 126 bis 128 durch ein Beispiel erläutert worden ist.

d. Einführung der Kämpferdrucklinie und der zweiten H-Linie.

86. Die Kämpferdrucklinie ist der geometrische Ort des Punktes F, Fig. 249, in welchem die von einer Einzellast hervorgerufenen Kämpferdrücke K_1 und K_2 diese Last treffen; zur Bestimmung derselben zeichne man die Einflusslinien für die Stützenwiderstände A und H und setze A mit $H' = H \sec \alpha$ zur Mittelkraft K_1 zusammen. Der in senkrechter Richtung gemessene Abstand η des Punktes F von der Geraden AB ist

---

*) Vergl. Seite 87. Nicht zu verwechseln mit der im § 5 eingeführten Bezeichnung $\rho = \frac{s}{EF}$.

durch die Gleich. $\eta : a = A : H$ gegeben. Mit $A = \frac{Pb}{l}$ folgt hieraus:

(42) $$\eta = \frac{P}{H} \frac{ab}{l}.$$

In Fig. 249 haben wir der Einfachheit wegen die H-Linie und auch die Kämpferdruck-Linie stetig gekrümmt gezeichnet. Meistens ist die H-Linie ein Polygon, dessen Ecken den Querträgern entsprechen, und es setzt sich dann auch die Kämpferdruck-Linie $A_0 B_0$ nach Fig. 251 aus einzelnen Kurvenstücken zusammen, die in den Trennungspunkten 2_0, 4_0, ... keine gemeinschaftlichen Tangenten besitzen.

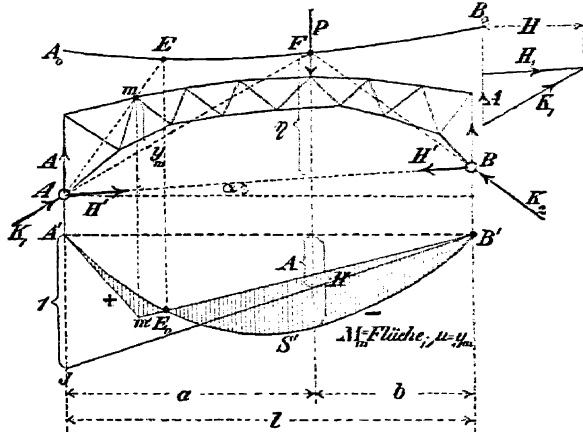



Fig. 249.

Wird die Einflusslinie für den Horizontalschub H eines Trägers von nahezu unveränderlicher Höhe h durch eine stetig gekrümmte Parabel ersetzt, deren Gleichung nach Seite 224

$$H = \frac{3\,Pab}{4\,fl}\,\nu$$

lautet, so ergiebt sich

(43) $$\eta = \frac{4\,f}{3\,\nu},$$

und hieraus folgt dann, dass die Kämpferdrucklinie eine *zur Schlusslinie AB parallele Gerade* ist.

87. Belastungsscheiden. Im I. Bande wurde die Kämpferdrucklinie des Dreigelenkbogens zur Ermittelung von Belastungsscheiden benutzt; sie lieferte gewisse ausgezeichnete Punkte der Einflusslinien und führte zu mancher Vereinfachung bei Auftragung dieser Linien. In ähnlicher Weise lässt sich natürlich auch die Kämpferdrucklinie des Bogens mit zwei Gelenken verwerthen. Wird z. B. die Einflusslinie für das Angriffsmoment M_m gesucht, so lege man durch das linke Gelenk und den Knotenpunkt m eine Gerade und bestimme den Schnitt-

punkt E derselben mit der Kämpferdrucklinie. Einer durch E gehenden Last entspricht ein durch m gehender Kämpferdruck K_1 und mithin ein Moment $M_m = 0$, woraus dann folgt, dass lothrecht unter E der Nullpunkt E_0 der gesuchten Einflussfläche liegen muss, und damit ist der Linienzug $A'm'B'$ und in Folge dessen auch die schraffirte M_m-Fläche bestimmt. Es verdient indess hervorgehoben zu werden, dass die Ermittelung der Einflussflächen auf dem in No. 84 gewiesenen Wege im allgemeinen den Vorzug verdient, weil die Aufzeichnung der Kämpferdrucklinie des Zweigelenkbogens in der Regel wesentlich umständlicher ist, als die des Bogens mit drei Gelenken. Auch liefert das frühere Verfahren schärfere Zeichnungen.

88. Die zweite H-Linie. Die Verkehrslast eines Bogenträgers sei von B aus um die Strecke ξ vorgerückt und erzeuge in dieser Lage (Fig. 250) am linken Auflager die Widerstände A und H. Letztere seien an der Stelle ξ als Ordinaten aufgetragen; ihre Endpunkte beschreiben, während die Last von B bis A vorgeschoben wird, zwei Linien, welche zur Unterscheidung von den Einflusslinien für A und H die *zweite A-Linie* bezw. die *zweite H-Linie* genannt werden sollen, und zuweilen mit Vortheil zur Berechnung der grössten Spannkräfte in den Füllungsstäben verwendet werden können. Die zweite A-Linie wurde bereits (unter der Bezeichnung: A-Polygon) im I. Bande bei der Berechnung der Balkenbrücken benutzt; ihre zeichnerische und rechnerische Ermittelung findet sich dort auf Seite 114 bis 115, 122 bis 125 und 153 (Gleich. 6). Die zweite H-Linie aber bestimmt man, indem man H für verschiedene Zugstellungen mit Hilfe der Einflusslinie für H berechnet.

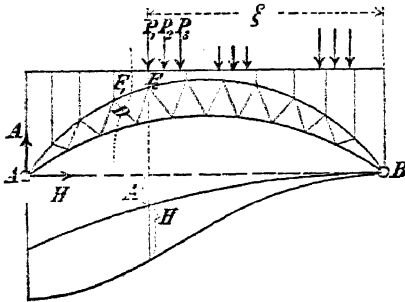



Fig. 250.

Die Anwendung dieser beiden Linien ist zu empfehlen, sobald sich für die Mehrzahl der Füllungsstäbe nur *eine* Belastungsscheide ergiebt und diese in dem Felde F_1F_2 (Fig. 223 bis 226) liegt, welches der durch den fraglichen Stab und ausserdem noch durch zwei Gurtstäbe geführte Schnitt trifft, ein Fall, der namentlich bei parabelförmigen Sichelträgern vorkommt. Hier sind die Belastungsgesetze meistens dieselben wie für den einfachen Balken, weil der Einfluss von H verhältnissmässig gering ist, und es stellt sich in der Regel heraus, dass in einer linkssteigenden Diagonale D (Fig. 250) der grösste Zug bezw.

der grösste Druck auftritt, je nachdem die Belastung von B aus bis F_2 oder von A aus bis F_1 reicht.*)

Wegen der verhältnissmässig kleinen Feldweiten der Bogenbrücken erweisen sich in der Regel die im I. Bande als *Grundstellungen* bezeichneten Lagen der Verkehrslast als die ungünstigsten; d. h. es ist die *erste* Achse des von B aus vorrückenden Zuges über F_2 zu setzen und die erste Achse des von A aus auffahrenden über F_1. Will man bei grösseren Feldweiten sicher gehen, so nehme man die erste Achse etwas stärker belastet an. Man vergl. das im I. Bande in No. 154 und 152 über die Berechnung von Balkenbrücken gesagte.

Sind nun D_A und D_H die Spannkräfte, welche in dem fraglichen Füllungsstabe D in Folge $A = 1$ bezw. $H = 1$ hervorgerufen werden, so ist der Einfluss der von B bis F_2 vorgeschobenen Verkehrslast:

$$_{max}D = A D_A + H D_H,$$

und ebenso erhält man den Einfluss der von A bis F_1 reichenden Belastung:

$$_{min}D = B D_B + H D_H$$

wo B und H die am rechten Auflager hervorgerufenen Widerstände sind und D_B die Spannkraft in Folge $B = 1$ bedeutet.

89. Zahlenbeispiel. Es liege der in Fig. 251 dargestellte Träger vor, dessen H-Linie auf Seite 214 ermittelt wurde. $A_0 2_0 4_0 \dots B_0$ ist die Kämpferdrucklinie; sie wurde nach No. 86 bestimmt; ihre äussersten Theile sind gerade Linien $A_0 2_0$ und $B_0 18_0$, welche bezw. durch B und A gehen, wie sich leicht aus Gleichung 42 folgern lässt.

Die ständige Belastung sei $g = 1{,}45^t$ f. d. $m.$, also für ein Feld: $g\lambda = 1{,}45 \cdot 2{,}0 = 2{,}9^t$; die bewegliche Belastung bestehe aus einem Eisenbahnzuge mit den in Fig. 251 angegebenen Achsenlasten und Radständen. Die in die Figur eingeschriebenen, den Knoten der oberen Gurtung entsprechenden Ordinaten der zweiten A-Linie wurden mit Hilfe der Tabelle I auf Seite 123 des I. Bandes berechnet, und die Ordinaten der zweiten H-Linie auf die in No. 79 an einem Beispiele gezeigte Weise aus der Einflusslinie für H. Gesucht seien die Grenzwerthe der Spannkraft D_8. Die Einflüsse D_A, D_B, D_H von $A = 1$, $B = 1$, $H = 1$ sind bereits auf Seite 235 berechnet worden.

Zunächst ist anzugeben, bei welchen Laststellungen diese Grenzwerthe entstehen. Bewegt sich über den Träger eine Einzellast von B bis 8, so beschreibt der zugehörige linke Kämpferdruck den Winkel $B_0 A 8_0$; er dreht stets links um den Schnittpunkt i von O und U, und es kann ihm daher nur durch einen rechts um i drehenden, am linken Trägerstücke angreifenden *Druck* D_8 das Gleichgewicht gehalten werden. Rückt die Last von A bis 6 vor, so beschreibt der rechte Kämpferdruck den Winkel $A_0 B 6_0$, er dreht links um i und erzeugt einen *Zug* D_8, welcher, am rechten Trägerstücke angreifend, rechts um i dreht. Es entsteht also $_{min}D$ bezieh. $_{max}D$, jenachdem der Eisenbahnzug von B bis 8 oder von A bis 6 vorgerückt ist.

---

*) Ob dieser Fall vorliegt oder nicht, kann auch mit Hilfe der Kämpferdrucklinie entschieden werden; vergl. No. 89.

Der von B bis zum Knoten 8 vorgeschobene Eisenbahnzug erzeugt am linken Auflager: $A = 25,7$ und $H = 59^t$. In Folge von $A = 1$ würde entstehen: $D_8 \cos \varphi_8 = -0,178$, und $H = 1$ würde erzeugen: $D_8 \cos \varphi_8 = -0,096$. Daher entsteht in Folge der Verkehrslast:

$$_{min}D_8 \cos \varphi_8 = -0,178 \cdot 25,7 - 0,096 \cdot 59 = -10,24^t.$$

Zur Hervorbringung von $_{max}D_8$ muss der Eisenbahnzug von A bis 6 vorgerückt werden; es entsteht dann am rechten Auflager: $B = 9,0^t$, $H = 31^t$*) und man erhält (da $B = 1$ den Einfluss $D_8 \cos \varphi_8 = +1,620$ ausübt):

$$_{max}D_8 \cos \varphi_8 = +1,620 \cdot 9,0 - 0,096 \cdot 31 = +11,60^t.$$

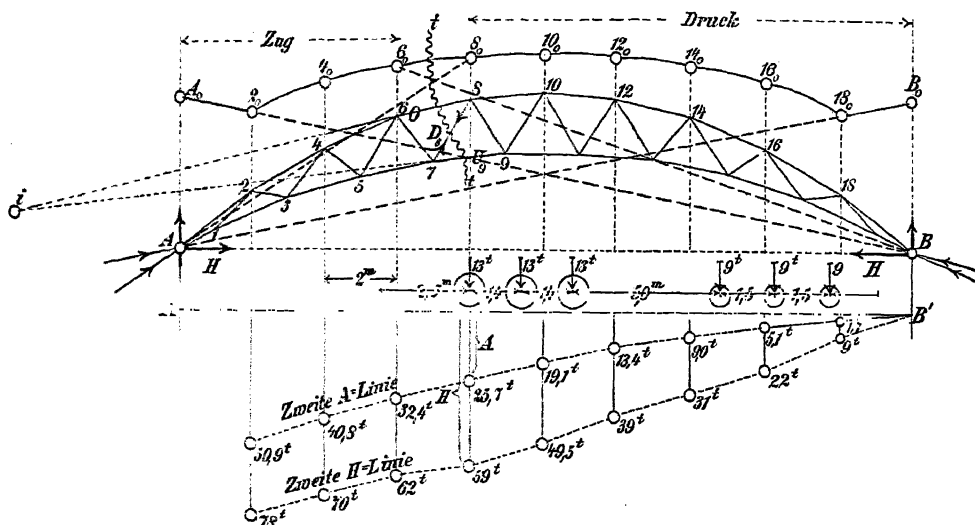



Fig. 251.

Der Einfluss der ständigen Belastung wird nun wie folgt bestimmt. Die rechts vom Schnitte tt in den Knotenpunkten 8 bis 18 angreifenden Lasten $g\lambda$ erzeugen: $A = g\lambda\left(\frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} + \frac{5}{10} + \frac{6}{10}\right) = 2,1\, g\lambda = 6,2^t$ und die links von tt angreifenden $g\lambda$ rufen $B = g\lambda\left(\frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10}\right) = 1,0\, g\lambda = 2,9^t$ hervor; ferner ist nach Seite 214 der von der gesammten ständigen Last hervorgerufene Horizontalschub $H_g = 21,5^t$, weshalb der Einfluss von g auf D_8:

$$D_8 \cos \varphi_8 = -0,178 \cdot 6,2 + 1,620 \cdot 2,9 - 0,096 \cdot 21,5 = +1,53^t$$

gefunden wird. Im ganzen erzeugt also die Belastung:

$$_{min}D_8 \cos \varphi_8 = -10,24 + 1,53 = -8,7^t$$
$$_{max}D_8 \cos \varphi_8 = +11,60 + 1,53 = +13,1^t,$$

wozu noch der Einfluss der Temperaturänderung mit $D_8 \cos \varphi_8 = -0,096\, H_t$

*) Diese Werthe sind den Spiegelbildern der in Fig. 251 gezeichneten Linien zu entnehmen; sie erscheinen in Fig. 251 unter dem Knotenpunkte 14.

$= \mp 0{,}096 \cdot 733\ F_c$ hinzutritt, wenn F_c den Mittelwerth der Gurtquerschnitte bedeutet.

In derselben Weise dürfen die Spannkräfte D_4, D_5, D_6, D_7, D_9, D_{10} berechnet werden. Für D_2 und D_3 gelangt man zu anderen Belastungsgesetzen; es verdient dann die Anwendung der Einflusslinien den Vorzug.*)

90. Näherungsformeln für die zweite H-Linie im Falle gleichmässiger Belastung. Die Verkehrslast sei $= p$ f. d. Längeneinheit der Stützweite l und bedecke die Strecke ξ, Fig. 252; einem Lasttheilchen $p\,dx$ entspreche der Horizontalschub dH. Dann ist $H = \int_o^\xi dH$, und es lässt sich H als Funktion von ξ darstellen, sobald dH als Funktion von x ausgedrückt werden kann, eine Aufgabe, deren Lösung für den in No. 80 behandelten parabelförmigen Sichelträger und den in No. 82 untersuchten Bogenträger mit nahezu unveränderlicher Höhe h zu einfachen Ergebnissen führt.

Fig. 252.

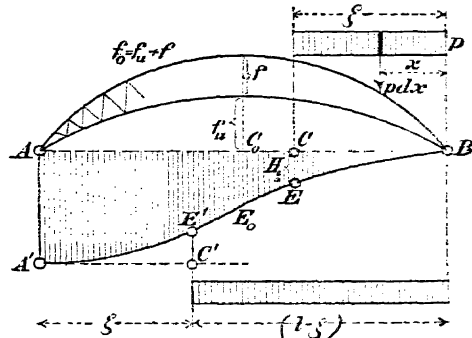
a. *Der parabolische Sichelträger.* Ersetzt man in Gleich. 14 (Seite 218) P durch $p\,dx$, ferner a durch $l - x$ und b durch x, so erhält man

$$dH = \frac{3\,p\,dx\,l\,(f_o + f_u)}{3\,l^2(f_o^2 + f_u^2) + 32\,f_o^2 f_u^2}\left\{(l^2 + 16 f_o f_u)\tfrac{1}{4}\left(\frac{x}{l}\log\text{nat.}\frac{l}{x} + \frac{l-x}{l}\log\text{nat.}\frac{l}{l-x}\right) - f_o f_u\,8\,\frac{x}{l}\,\frac{l-x}{l}\right\}$$

und, indem man diesen Ausdruck von o bis ξ integrirt:

$$(44)\quad \begin{cases} H = \dfrac{3\,p\,l^2(f_o + f_u)\,[(l^2 + 16\,f_o f_u)\,\alpha' - f_o f_u\,\alpha'']}{3\,l^2(f_o^2 + f_u^2) + 32\,f_o^2 f_u^2} \\ \text{wo } \alpha' = \tfrac{1}{8}\left\{\dfrac{\xi}{l} + \dfrac{\xi^2}{l^2}\log\text{nat.}\dfrac{l}{\xi} - \dfrac{(l-\xi)^2}{l^2}\log\text{nat.}\dfrac{l}{l-\xi}\right\} \\ \text{und } \alpha'' = \tfrac{4}{3}\,\dfrac{\xi^2}{l^2}\left(3 - 2\,\dfrac{\xi}{l}\right). \end{cases}$$

Zur Erleichterung der Berechnung diene die folgende Tabelle, in welcher die Werthe α' und α'' für $\xi = 0$ bis $\xi = 0{,}5\,l$ angegeben sind und zwar für 10 Theilpunkte der halben Stützweite. Der Verlauf der zweiten H-Linie für $\xi > 0{,}5\,l$ ergiebt sich aus der folgenden Betrachtung.

Ist C_oE_o (Fig. 252) die Ordinate der gesuchten Linie für $\xi = 0{,}5\,l$, so entspricht der vollen Belastung die Ordinate $\overline{AA'} = 2\,\overline{C_oE_o}$. Bedeckt nun die Last von B aus die Strecke $l - \xi$, so nehme man zunächst gänzliche Belastung des Trägers an und bringe den Einfluss einer von A aus um ξ vorgeschobenen Belastung in Abzug, indem man von einer durch A' zu AB gezogenen Paral-

*) Die Berechnung von D_2 ist überflüssig, da man am Bogenende ein volles Stehblech anordnen wird.

lelen aus die Strecke $C'E' = CE$ abträgt. Es ist dann E' ein Punkt der zweiten H-Linie.

$\frac{\xi}{l}$	α'	α''	$\frac{\xi}{l}$	α'	α''
0,05	0,00140	0,0097	0,30	0,02920	0,2880
0,10	0,00471	0,0373	0,35	0,03707	0,3757
0,15	0,00941	0,0810	0,40	0,04534	0,4693
0,20	0,01520	0,1387	0,45	0,05386	0,5670
0,25	0,02185	0,2083	0,50	0,06250	0,6667

In Folge gänzlicher Belastung ($\xi = l$) entsteht:

(45) $$H = \frac{p l^2 (f_o + f_u)(3 l^2 + 16 f_o f_u)}{8 [3 l^2 (f_o^2 + f_u^2) + 32 f_o^2 f_u^2]}.$$

Ersetzt man in dieser Formel p durch g, so erhält man den Einfluss der ständigen Belastung. Für den in No. 79 in anderer Weise behandelten Sichelträger ergiebt sich z. B. wegen $g = 1{,}45^t$:

$$H_g = \frac{1{,}45 \cdot 20^2 (4{,}0 + 2{,}5)(3 \cdot 20^2 + 16 \cdot 4{,}0 \cdot 2{,}5)}{8 [3 \cdot 20^2 (4{,}0^2 + 2{,}5^2) + 32 \cdot 4{,}0^2 \cdot 2{,}5^2]} = 21{,}4^t$$

ein Werth, der von dem früher erhaltenen $H_g = 21{,}5^t$ fast gar nicht abweicht.

b. *Bogenträger von nahezu unveränderlicher Höhe h* (Fig. 213 und 214 auf Seite 222). Hier empfiehlt es sich, von der parabelförmigen Einflusslinie für H auszugehen und Gleich. 29 auf Seite 224 zu benutzen. Man erhält dann für ein Lasttheilchen $p\,dx$:

$$dH = \frac{3\, p\, dx \cdot x (l - x) \nu}{4 f l}$$

und, indem man diesen Ausdruck von 0 bis ξ integrirt,

(46) $$H = \frac{p l^2}{8 f} \nu \frac{\xi^2}{l^2} \left(3 - 2 \frac{\xi}{l}\right).$$

Zur Erleichterung der Berechnung der H-Linie diene die folgende Tabelle, deren Werthe noch mit $\frac{p l^2}{8 f} \nu$ zu multipliciren sind.

$\frac{\xi}{l}$	H	$\frac{\xi}{l}$	H
0,05	0,00725	0,30	0,21600
0,10	0,02800	0,35	0,28175
0,15	0,06075	0,40	0,35200
0,20	0,10400	0,45	0,42525
0,25	0,15625	0,50	0,50000
	$\frac{p l^2}{8 f} \nu$		$\frac{p l^2}{8 f} \nu$

In Folge gänzlicher Belastung des Bogens entsteht

(47) $$H_p = \frac{p l^2}{8 f} \nu$$

und in Folge der ständigen Belastung

(48) $$H_g = \frac{g l^2}{8 f} \nu .$$

Die Ziffer ν ist nach einer der Gleichungen 28, 30, 31, 32 (Seite 224 u. 225) zu berechnen.

Aufgabe. Gesucht sei die durch eine gleichförmige Belastung p hervorgerufene Spannkraft ${}_{max}D_p$ des linkssteigenden Füllungsstabes eines Trägers von nahezu unveränderlicher Höhe h. Fig. 253. Es sollen die zweiten Linien für A und H sowie die Kämpferdrucklinie benutzt werden; wobei es erlaubt sei, die Lasten unmittelbar am Bogenträger angreifend anzunehmen*).

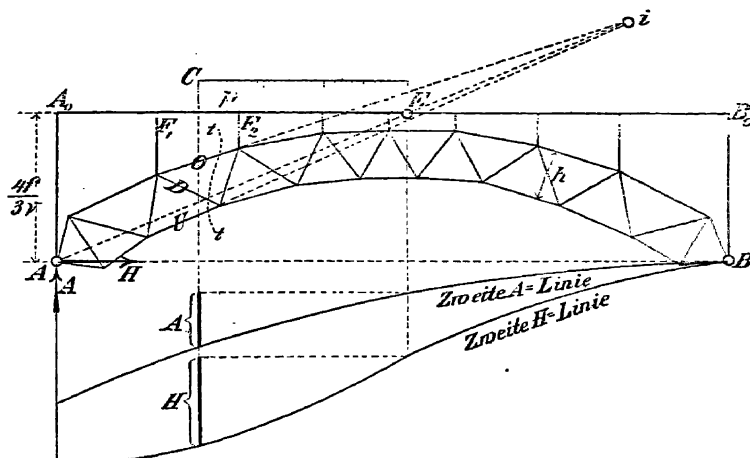



Fig. 253.

Die Kämpferdrucklinie ist nach No. 86 eine wagerechte Gerade im Abstande $4f : 3\nu$ von der AB; sie wird von der durch das Gelenk A und den Schnittpunkt i der Stäbe O und U gelegten Geraden in E geschnitten. Die Senkrechte durch E ist eine Belastungsscheide, denn eine durch E gehende Last ruft am linken Auflager einen Kämpferdruck hervor, der die Richtung Ai hat und das Moment $M_i = 0$ erzeugt. Lasten rechts von E verursachen bei A Kämpferdrücke, welche links um i drehen und den fraglichen Stab D auf Druck beanspruchen, denn eine am Trägerstück links vom Schnitt tt angreifende Zugkraft würde ebenfalls links um i drehen. Durch Lasten, welche zwischen E und F_2 aufgebracht werden, wird D gezogen, während Lasten links von F_1 wieder Drücke D hervorbringen. Dies letztere einzusehen, stelle man für die rechts von tt angreifenden Kräfte die Momentengleichung in Bezug auf i auf. Die Aufsuchung der Belastungsscheide zwischen $F_1 F_2$ darf man sparen; man rechnet genügend genau, wenn man behufs Erzeugung von ${}_{max}D$ den Träger zwischen E und der *Mitte* C des Feldes $F_1 F_2$ belastet und den auf den Querträger F_1 entfallenden Theil der Belastung des Feldes

*) Rechnet man mit gleichförmiger Belastung (die stets einer Schätzung unterliegt), so ist die Annahme unmittelbarer Belastung immer zulässig. Man gestalte dann überhaupt die Untersuchung möglichst einfach.

F_1 F_2 unberücksichtigt lässt, also links von tt nur die äusseren Kräfte A und H annimmt. Dabei ist A gleich dem Unterschiede der bei C und E gemessenen Ordinaten der zweiten A-Linie, und ganz entsprechend wird auch H gefunden. Schliesslich erhält man mit den auf Seite 234 eingeführten Bezeichnungen D_A und D_H:

$$_{max}D = D_A\, A + D_H\, H.^{*)}$$

Man könnte auch A und H zum Kämpferdrucke K zusammensetzen und hierauf nach Band I, No. 195 verfahren.

Wird $_{min}D$ gesucht, so werden die Einflüsse der auf den beiden negativen Beitragsstrecken A_0C und EB_0 aufzubringenden Belastungen getrennt ermittelt und dann zusammengezählt. Wird die Strecke A_0C belastet, so handelt es sich um die Bestimmung der am rechten Auflager hervorgerufenen Widerstände B und H.

e. Formeln für die Momente gleichmässig belasteter Bogenträger, deren H-Linie eine Parabel ist.

91. Es handle sich um Bogenträger von nahezu unveränderlicher Höhe h (Fig. 213 u. 214 Seite 222), deren H-Linie nach S. 224 eine Parabel von der Pfeilhöhe $\frac{3l}{16f}\nu = \frac{3l}{16f'}$ ist, wobei zur Abkürzung

$$\frac{f}{\nu} = f'$$

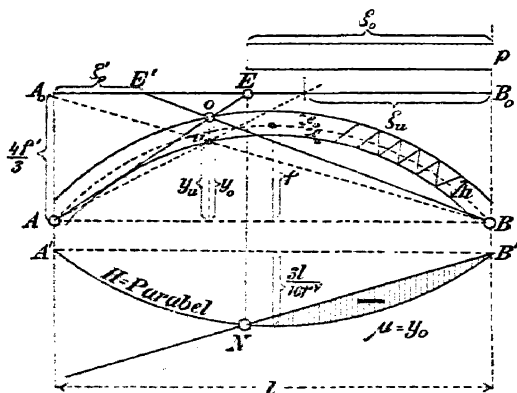
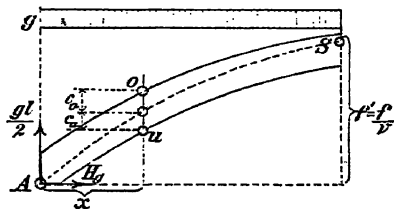



Fig. 254. Fig. 255.

gesetzt werden möge. Bie Kämpferdrucklinie ist eine wagerechte Gerade im Abstande $\frac{4}{3}f'$ von der AB.**)

*) Wir erinnern daran, dass es häufig zweckmässiger ist, $D\cos\varphi$ zu berechnen.

**) Es wird wie in der Aufgabe auf Seite 253 die zulässige Annahme unmittelbarer Belastung gemacht.

Gesucht seien die Grenzwerthe der Momente M^o und M^u für die Knotenpunkte o der oberen und u der unteren Gurtung.

Wir bestimmen zunächst den Einfluss der ständigen Belastung g, welche den Horizontalschub $H_g = \frac{g l^2}{8 f} \nu$ hervorbringt, legen durch die Kämpfergelenke A und B eine Parabel ASB, deren Pfeilhöhe

$$= \frac{g l^2}{8 H_g} = \frac{f}{\nu} = f' \text{ (Fig. 255)}$$

ist, und messen die senkrechten Abstände c_o und c_u der Punkte o und u von jener Parabel. Liegt o oberhalb und u unterhalb der Parabel ASB, so ist:

$$\text{(49)} \quad \begin{cases} M^o{}_g = - H_g c_o = - \frac{g l^2}{8 f'} c_o \\ M^u{}_g = + H_g c_u = + \frac{g l^2}{8 f'} c_u. \end{cases}$$

Gelingt es nun, die Momente ${}_{min}M^o{}_p$ und ${}_{min}M^u{}_p$ in der Form

$${}_{min}M^o{}_p = - C_o p; \quad {}_{min}M^u{}_p = - C_u p$$

darzustellen, so sind die Grenzwerthe von M_o und M_u (nach der auf Seite 185 durchgeführten Untersuchung):

$$\text{(50)} \quad \begin{cases} {}_{min}M^o = - g \frac{l^2}{8 f'} c_o - p C_o - H_t y_o \\ {}_{max}M^o = - g \frac{l^2}{8 f'} c_o + p C_o + H_t y_o \end{cases}$$

$$\text{(51)} \quad \begin{cases} {}_{min}M^u = + g \frac{l^2}{8 f'} c_u - p C_u - H_t y_u \\ {}_{max}M^u = + g \frac{l^2}{8 f'} c_u + p C_u + H_t y_u, \end{cases}$$

wo H_t den absoluten Werth des Horizontalschubes in Folge einer Temperaturänderung bedeutet.

Zur Ermittelung von ${}_{min}M^o{}_p$ legen wir durch A und o eine Gerade, welche die Kämpferdrucklinie in der Belastungsscheide E schneidet, bestimmen senkrecht unter E den Punkt N der H-Parabel und erhalten in dem schraffirten Parabelabschnitte den zur negativen Beitragsstrecke $B_o E$ gehörigen Theil der M^o-Fläche. Der Inhalt dieses Abschnittes verhält sich zum Inhalt der H-Fläche wie $\xi_o{}^3 : l^3$, ist also $= \frac{\xi_o{}^3}{l^3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3 l}{16 f} \nu \cdot l = \frac{\xi_o{}^3}{8 l f'}$ und daraus folgt, dass die von B_o bis E reichende Belastung das Moment

$$\text{(53)} \quad {}_{min}M^o{}_p = - p \mu \frac{\xi_o{}^3}{8 l f'} = - \frac{p y_o \xi_o{}^3}{8 f' l}$$

erzeugt. Schneidet nun eine durch B und o gelegte Gerade die Kämpferdrucklinie innerhalb der Stützweite in E', wie dies Fig. 254 voraussetzt, so muss noch die Strecke $A_o E'$ belastet werden, und es entsteht dann:

$$\text{(54)} \quad {}_{min}M^o{}_p = - \frac{p y_o}{8 f' l} (\xi_o{}^3 + \xi_o'^3).$$

In diesem Falle ist

$$\text{(55)} \quad C_o = \frac{y_o}{8 f' l} (\xi_o{}^3 + \xi_o'^3).$$

Liegt E' links von A_0, so ist in vorstehender Gleichung $\xi_0' = 0$ zu setzen.

Ganz ebenso erhält man für C_u den Ausdruck

$$C_u = \frac{y_u}{8f'l}(\xi_u^3 + \xi_u'^3). \tag{56}$$

Anmerkung. Weitere analytische Untersuchungen dieser Art findet der Leser in des Verfassers „Theorie und Berechnung der eisernen Bogenbrücken“, Berlin 1880. Dort ist allerdings nur der Fall $\nu = 1$ behandelt worden, und es unterscheiden sich daher die gewonnenen Formeln von den hier abgeleiteten dadurch, dass f an die Stelle von f' tritt. Dem Leser wird es hiernach keine Schwierigkeiten bereiten, auch die in dem angeführten Buche für *Einzellasten* gegebenen einfachen und bequemen Gleichungen für den Fall eines von 1 verschiedenen Werthes ν umzubilden.

§ 8.

Zweigelenkbogen mit gesprengter Zugstange und verwandte Trägerarten.

92. Eine für Dachstühle wichtige Anordnung des Bogens mit zwei Gelenken ist die in Fig. 256 dargestellte. Die Kämpfer A und B sind durch ein Zugband verbunden, welches mit dem Fachwerkbogen durch senkrechte Stäbe befestigt ist; das Auflager A ist fest, das andere (B) wird auf einer wagerechten Geraden geführt. Zur Bestimmung der Stützenwiderstände sind die Gleichgewichtsbedingungen ausreichend; der Träger verhält sich in dieser Beziehung wie ein einfacher Balken; er ist jedoch *innerlich statisch unbestimmt.* Als statisch nicht bestimmbare Grösse wird zweckmässig die wagerechte Projektion H der Spannkraft des Zugbandes eingeführt; dieselbe ist für alle Glieder gleich gross. Zieht man von einem Punkte O aus Parallelen zu den Stäben I, II, III, ... so schneiden diese auf

Fig. 256.

einer im Abstande H von O eingetragenen Senkrechten die Spannkräfte Z der Hängestangen ab, und die Längen der von O ausgehenden Strahlen geben die Spannkräfte S_I, S_{II}, S_{III}, ... der Stäbe I, II, III, ... an. Damit sind alle am Fachwerkbogen angreifenden Kräfte bekannt.

Will man die Stabkräfte aus den Momenten M berechnen, so führe man durch m einen senkrechten Schnitt und zerlege die Spannkraft der geschnittenen Zugstange in eine senkrechte und eine wagerechte Seitenkraft; die erstere geht durch den Drehpunkt m, und die letztere übt das Angriffs-Moment $-Hy_m$ aus. Da nun die äusseren Kräfte mit denen eines einfachen Balkens übereinstimmen, so erhält man

$$(1) \qquad M_m = M_{om} - Hy_m,$$

d. i. dieselbe Gleichung, welche auf Seite 225 für den Bogen mit festen Kämpfergelenken gefunden wurde. Nur bedeutet jetzt y nicht mehr den Abstand des fraglichen Knotenpunktes von der Geraden AB, sondern von dem Zugbande.

Wird behufs Berechnung einer Spannkraft D das Angriffs-Moment für den Schnittpunkt i der an D grenzenden Gurtstäbe O und U gesucht, so misst man den senkrechten Abstand y_i des Punktes i von demjenigen Gliede der Zugstange, welches der durch O, D, U geführte Schnitt tt trifft, und erhält:

$$(2) \qquad M_i = M_{oi} - Hy_i,$$

oder allgemeiner

$$M_i = M_{oi} \pm Hy_i,$$

wobei das Vorzeichen von der Lage des Punktes i abhängt.

Es bedarf jetzt nur eines Hinweises darauf, dass die in No. 84 gelehrten Verfahren, die Einflussflächen für senkrechte Belastung aus ein und derselben H-Linie, *deren Bestimmung in No. 93 gezeigt werden wird,* zu ermitteln, auch auf den vorliegenden Fall angewendet werden dürfen; man hat nur auf die andere Bedeutung von y zu achten.

Hinsichtlich der Gestalt des Stabzuges I, II, III, ... ist die vorstehende Untersuchung an keinerlei Voraussetzungen gebunden. Dieser Stabzug darf auch nach unten gesprengt werden; es entstehen dann Träger der in den Fig. 257 bis 260 dargestellten Art. Die senkrechten Zwischenstäbe werden hier auf Druck beansprucht. Die Tragwerke in den Figuren 259 und 260 bezeichnet man auch als verspannte Balken, und den Träger in Fig. 258 als versteifte Kette, und man nennt dann das Dreieckfachwerk $ACBA$ den *Versteifungsbalken der Kette ASB.* Nicht unzweckmässig dürfte es sein, den mit dem Dreieckfachwerk durch senkrechte Stäbe verbundenen Stabzug in allen den hier vorgeführten Fällen die *dritte Gurtung* zu nennen und festzusetzen, dass, falls kurz von der

oberen und der *unteren* Gurtung gesprochen wird, hierunter die Gurtungen des Dreieckfachwerks zu verstehen sind. Die dritte Gurtung kann auch oberhalb des Dreieckfachwerks liegen; sie wird dann auf Druck beansprucht, während die Zwischenstäbe (eine durchweg nach unten hohl liegende dritte Gurtung vorausgesetzt) Zugspannungen erlei-

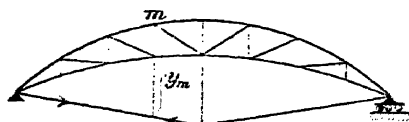
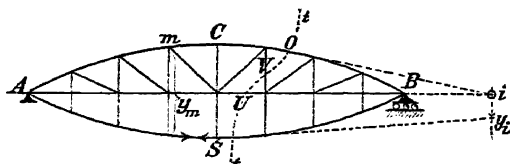
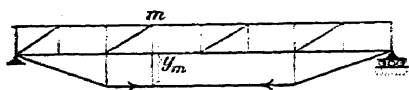



Fig. 257.

Fig. 258.

Fig. 259.

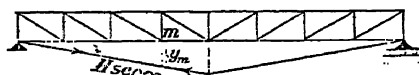



Fig. 260.

den. Bezeichnet man für diesen in Figur 261 dargestellten Fall mit H die wagerechte Seitenkraft des in der dritten Gurtung auftretenden *Druckes*, so bleibt die Gleichung $M_m = M_{om} - Hy_m$ gültig. Für M_i erhält man je nach der Lage des Punktes i gegen den vom Schnitte t—t getroffenen Stab der dritten Gurtung: $M_i = M_{oi} \pm Hy_i$.

Den in Fig. 261 abgebildeten Träger pflegt man auch einen durch einen Balken versteiften Stab-Bogen zu nennen und bezeichnet dann das Dreieckfachwerk als den *Versteifungsbalken des Stabbogens*.*) Dieser Balken, welcher zugleich bestimmt ist, den Horizontalschub des Bogens

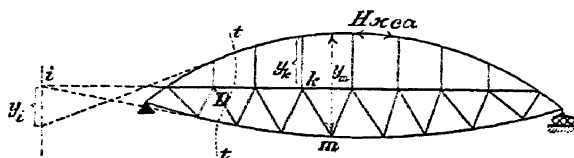



Fig. 261.

aufzunehmen, erhält meistens (abgesehen von den Endfeldern) parallele Gurtungen. Die Untersuchung der Füllungsstäbe gestaltet sich dann besonders einfach. Es handele sich z. B. um die linkssteigende Diagonale D des Trägers in Fig. 262. Führt man den Schnitt tt, zerlegt den Druck $H \sec\alpha$ des von tt getroffenen Stabes der dritten Gurtung in die Seitenkräfte H (wagerecht) und $H \operatorname{tg}\alpha$ (senkrecht) und setzt

*) Unseres Wissens ist diese Trägerart zuerst von dem verstorbenen österreichischen Ingenieur Langer gegeben worden und dürfte daher wohl am besten *Langer'scher Balken* genannt werden.

man schliesslich die Summe aller links vom Schnitte tt wirkenden lothrechten Kräfte $= 0$, so erhält man:

$$A - \sum_o^t P - D \sin \varphi - H \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

wo $\sum_o^t P$ die Summe der links vom Schnitte tt angreifenden Lasten bedeutet. Hierin ist nun

$$A - \sum_o^t P = Q_o$$

die Querkraft für den Schnitt tt eines *einfachen Balkens* AB, und es ergiebt sich daher

$$D \sin \varphi = Q, \text{ wo}$$

$$(3) \qquad Q = Q_o - H \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \, (Q_o \operatorname{cotg} \alpha - H).$$

Fig. 262.

Man nennt Q die Querkraft für den Schnitt tt des *Versteifungsbalkens,* betrachtet $\operatorname{tg} \alpha$ als Multiplikator und erhält dann die Einflussfläche für Q als den Unterschied der $Q_o \operatorname{cotg} \alpha$-Fläche und der H-Fläche. Macht man also (Figur 262) $A'A'' = 1 \operatorname{cotg} \alpha$, zieht $A''B'$, hierauf $A'L_1 \parallel B'A''$, schliesslich $L_1 L_2$, so ist die schraffirte Fläche die Q-Fläche; denn wäre $A'A'' = 1$, so würde nach Band I, Seite 109 der Linienzug $A'L_1L_2B'$ die auf die Achse $A'B'$ bezogene Q_o-Linie sein.

Auf dieselbe Weise werden die Spannkräfte in den Füllungsstäben der in den Figuren 259, 260, 271 abgebildeten Versteifungsbalken bestimmt.

93. Die Bestimmung der Einflusslinie für H unterscheidet sich von der in No. 77 gelehrten Weise, die H-Linie eines Zweigelenkbogens zu berechnen, nur dadurch, dass die Summe: $\Sigma \frac{S'^2 s}{EF}$, welche sich bisher nur auf die Stäbe des Bogens bezog, und für welche der Ausdruck $\frac{1}{EF_c} \Sigma z_m$ gefunden wurde, um die der dritten Gurtung und den senkrechten Zwischenstäben entsprechenden Glieder vermehrt werden muss. Sind nun $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ die Neigungswinkel der Glieder der dritten Gurtung, so sind die Spannkräfte S und Z,

$$(4) \qquad S_1 = H \sec \alpha_1; \quad S_2 = H \sec \alpha_2; \ldots{}^{*)}$$

$$(5) \qquad Z_1 = H(\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2); \quad Z_2 = H(\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_3); \ldots$$

und man erhält für die allgemein mit S' bezeichneten Spannkräfte des Zustandes $H = -1$ die absoluten Werthe:

$$(6) \qquad \begin{cases} S'_r = \sec \alpha_r \text{ für das } r^{\text{te}} \text{ Glied des Zugbandes,} \\ S'_r = (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1}) \text{ für die } r^{\text{te}} \text{ Zwischenstange.} \end{cases}$$

Sind also die Längen dieser Stäbe $= s_r$ bezw. z_r und ihre Querschnitte $= F_{sr}$ bezw. $= F_{zr}$, so ergiebt sich:

$$(7) \qquad \Sigma \frac{S'^2 s}{EF} = \frac{1}{EF_c} \Sigma z_m + \Sigma \frac{s_r \sec^2 \alpha_r}{EF_{sr}} + \Sigma \frac{z_r (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1})^2}{EF_{zr}}.$$

Man darf nun stets die Annahme machen, dass sich der Querschnitt der dritten Gurtung so ändert, dass die Spannung $\sigma = \frac{H \sec \alpha_r}{F_{sr}}$ einen festen Werth annimmt. Erfordert also H den Querschnitt F_b (d. i. den Querschnitt eines wagerechten Gliedes der dritten Gurtung), so wird $F_{sr} = F_b \sec \alpha_r$, und man erhält, wenn man für alle Zwischenstäbe denselben Querschnitt F_z annimmt,

$$(8) \qquad \Sigma \frac{S'^2 s}{EF} = \frac{1}{EF_c} \left\{ \Sigma z_m + \frac{F_c}{F_b} \Sigma \lambda_r \sec^2 \alpha_r + \frac{F_c}{F_z} \Sigma z_r (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1})^2 \right\},$$

wo λ_r die Horizontalprojektion von s_r bedeutet (Fig. 256c).

Die Bestimmung der H-Linie geschieht jetzt nach folgender Regel:

Man berechne die Momente $M_{w \cdot m}$ eines mit den Gewichten $w_m = \frac{y_m s_m}{r_m^2} \frac{F_c}{F_m}$ belasteten einfachen Balkens $A'B'$ (vergleiche

---

*) Es sind dies die absoluten Werthe. Die unterhalb des Dreieckfachwerks liegende dritte Gurtung (Fig. 256 bis 260) wird gezogen; ist sie nach oben gesprengt, so werden die lothrechten Zwischenstäbe auf Zug beansprucht, sonst auf Druck. Liegt die dritte Gurtung oberhalb des Dreieckfachwerks, Fig. 261, so wird sie gedrückt; die Zwischenstäbe werden dann gezogen.

Fig. 201) *und dividire sie durch*

$$(9) \qquad \mathfrak{N} = \Sigma z_m + \frac{F_c}{F_b} \Sigma \lambda_r \sec^2 \alpha_r + \frac{F_c}{F_z} \Sigma z_r (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1})^2,$$

wobei $z_m = y_m w_m$. *Das Ergebniss ist:* $H_m = \frac{M_{wm}}{\mathfrak{N}}$.

Die beiden letzten Glieder des Ausdruckes für $\mathfrak{N}$ sind von verhältnissmässig geringem Einfluss auf H und lassen sich meistens erheblich vereinfachen. Liegen z. B. die Knotenpunkte der dritten Gurtung in einer Parabel mit der Gleichung

$$y_b = 4 f_b \frac{x (l - x)}{l^2} \quad \text{(Fig. 256)}$$

und folgen auch die Längen z der Zwischenstäbe dem Gesetze:

$$z = 4 f_z \frac{x (l - x)}{l^2},$$

so darf man stets genügend genau setzen:

$$\Sigma \lambda_r \sec^2 \alpha_r = \int_0^l dx \left[1 + \left(\frac{d y_b}{d x}\right)^2\right] = l \left[1 + \frac{16}{3} \frac{f^2{}_b}{l^2}\right]$$

$$\Sigma z_r (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1})^2 = \lambda_b \Sigma z_r \frac{(\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1})^2}{\lambda_b} = \lambda_b \int_0^l z\, dx \left[\frac{d (\operatorname{tg} \alpha)}{d x}\right]^2$$

$$= \lambda_b \int_0^l z\, dx \frac{d^2 y_b}{d x^2} = \lambda_b \left(\frac{8 f_b}{l^2}\right)^2 \int_0^l z\, dx = \frac{128}{3} \lambda_b \frac{f^2{}_b f_z}{l^3},$$

wo λ_b den Mittelwerth der annähernd gleich grossen Feldweiten λ_r bedeutet, und man erhält dann den schnell zu berechnenden Ausdruck:

$$10) \qquad \mathfrak{N} = \Sigma z_m + \frac{F_c}{F_b} l \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f^2{}_b}{l^2}\right) + \frac{128}{3} \frac{F_c}{F_z} \lambda_b \frac{f^2{}_b f_z}{l^3}.$$

Für den Fall eines *Zweigelenkbogens mit wagerechter Zugstange* ($f_b = 0$ in Fig. 256) ergiebt sich

$$(11) \qquad \mathfrak{N} = \Sigma z_m + \frac{F_c}{F_b} l,$$

ein Werth, der auch bei geringer Sprengung des Zugbandes genügend genau ist und daher auch für die in den Fig. 257 und 276 dargestellten Träger brauchbar bleibt. Bei Berechnung von Dachbindern dieser Art ist es sogar zulässig, $\mathfrak{N} = \Sigma z_m$ zu setzen, weil ja die Bestimmung des grössten Schneedruckes und besonders des Winddrucks auf einer ziemlich unsicheren Schätzung beruht.

Kürzungen der Werthe w_m und z_m ziehen natürlich auch eine entsprechende Aenderung der beiden letzten Glieder des Ausdruckes $\mathfrak{N}$ nach sich. Nimmt man z. B. bei Untersuchung des in Fig. 262 dargestellten Trägers für alle Obergurtstäbe denselben Querschnitt F_o an und für alle Untergurtstäbe denselben Querschnitt F_u, und setzt man die willkürliche Querschnittsfläche $F_c = F_o$, so empfiehlt es sich, einem Knotenpunkte m der unteren Gurtung das Gewicht

$$(12) \quad \ldots w_m = y_m \left(\text{statt } w_m = \frac{y_m s_m}{r^2_m} = \frac{y_m \lambda}{h^2}\right)$$

zuzuschreiben und einem oberen Knotenpunkte k das Gewicht:

$$(13) \quad \ldots . w_k = y_k \frac{F_o}{F_u} \left(\text{statt } w_k = \frac{y_k \lambda}{h^2} \frac{F_o}{F_u}\right).$$

Diese besonderen Werthe w sind aus den allgemeineren durch Division mit $\lambda : h^2$ erhalten worden, und es müssen daher auch die beiden letzten Glieder von $\mathfrak{N}$ mit $\lambda : h^2$ dividirt werden. Man erhält:

$$(14)\ \mathfrak{N} = \Sigma y^2_m + \frac{F_o}{F_u} \Sigma y^2_k + \frac{h^2}{\lambda}\left[\frac{F_o}{F_b} \Sigma \lambda_r \sec^2 \alpha_r + \frac{F_o}{F_z} \Sigma z_r (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1})^2\right],$$

wofür man stets

$$(15)\ \mathfrak{N} = \Sigma y^2_m + \frac{F_o}{F_u} \Sigma y^2_k + \frac{h^2}{\lambda}\left[\frac{F_o}{F_b} l_b \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f^2_b}{l^2_b}\right) + \frac{128}{3} \frac{F_o}{F_z} \lambda \frac{f^3_b}{l^3_b}\right]^{*)}$$

setzen darf; auch ist es in der Regel erlaubt, das zweite Glied des Klammerausdruckes und den Faktor $\left(1 + \frac{16}{3} \frac{f^2_b}{l^2_b}\right)$ zu streichen. Man erhält dann:

$$(16) \qquad \mathfrak{N} = \Sigma y^2_m + \frac{F_o}{F_u} \Sigma y^2_k + \frac{h^2 l_b}{\lambda} \frac{F_o}{F_b}.$$

94. Der Einfluss einer Temperaturänderung auf H ist durch die allgemeine, für jedes einfach statisch bestimmte Fachwerk gültige Gleichung gegeben:

$$(17) \qquad H_t = \frac{\Sigma S' \varepsilon t s}{\Sigma \frac{S'^2 s}{EF}},$$

wo S' die Stabkraft für $H = -1$ ist. Sind ε und t für sämmtliche Stäbe gleich gross, so wird $H_t = 0$; denn setzt man in die dem Span-

*) Für die Stäbe AC und EB, deren Spannkräfte nur von den Stützendrücken abhängen, ergiebt sich $S' = 0$; die dritte Gurtung reicht nur von C bis E. Ihr Pfeil ist $= f_b$, ihre Spannweite $= l_b$.

nungszustande $H = -1$ entsprechende Arbeitsgleichung

$$\Sigma S' \Delta s = 0,$$

welche für beliebige mögliche Δs gilt, $\Delta s = \omega s$, wobei ω eine Konstante ist, d. h. nimmt man an, dass die geänderte Form des Fachwerks der ursprünglichen ähnlich ist, so findet man

$$\Sigma S' s = 0.$$

Wird nun vorausgesetzt, dass sich die dem spannungslosen Anfangszustande entsprechenden Wärmegrade der Stäbe des Dreieckfachwerks und der Zwischenstäbe um t ändern, diejenigen der dritten Gurtung hingegen um $t + \Delta t$, so erhält man für H_t den Werth

$$H_t = \frac{\varepsilon t \Sigma_I S' s + \varepsilon \Delta t \Sigma_{II} S_r' s_r}{\Sigma \frac{S'^2 s}{EF}},$$

wobei sich Σ_I über sämmtliche Stäbe erstreckt, hingegen Σ_{II} nur über die dritte Gurtung. Erstere Summe ist $= 0$, und letztere geht für den Fall einer *gezogenen* dritten Gurtung [wegen $S_r = + H \sec \alpha_r$ und $S_r' = - \sec \alpha_r$] in $- \Sigma \lambda_r \sec^2 \alpha_r$ über, weshalb sich

$$(18) \qquad H_t = - \frac{\varepsilon \Delta t \Sigma \lambda_r \sec^2 \alpha_r}{\Sigma \frac{S'^2 s}{EF}}$$

$$= - \frac{\varepsilon E F_c \Delta t \Sigma \lambda_r \sec^2 \alpha_r}{\Sigma z_m + \frac{F_c}{F_b} \Sigma \lambda_r \sec^2 \alpha_r + \frac{F_c}{F_z} \Sigma z_r \left(\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1}\right)^2}$$

ergiebt, und hieraus folgt: wird die dritte Gurtung stärker erwärmt als die übrigen Theile des Bogens, so nimmt der Horizontal*zug* ab: im Gegenfalle wächst H um ein positives H_t. Für den in der Fig. 261 dargestellten Träger findet man, dass der Horizontal*druck* H zu- oder abnimmt, je nachdem die dritte Gurtung mehr oder weniger erwärmt wird, als der Versteifungsbalken.

Es ist nun stets zulässig, die Formel (18) durch die einfachere:

$$(19) \qquad H_t = \mp \frac{\varepsilon E F_c l \Delta t}{\Sigma z_m}$$

zu ersetzen; denn, da die Wahl von Δt einer groben Schätzung unterliegt, so hat es natürlich keinen Zweck, die übrigen Glieder allzu peinlich zu berechnen. Für z_m ist in (19) der Werth $z_m = \frac{y_m^2 s_m}{r_m^2} \frac{F_c}{F_m}$ einzuführen. Eine Kürzung der z bedingt auch eine entsprechende Aenderung des Zählers von H_t. Setzt man z. B. für den Träger in Fi-

gur 262, $w_m = y_m$ und $w_k = y_k \frac{F_o}{F_u}$, ferner $z_m = y^2{}_m$, $z_k = y^2{}_k \frac{F_o}{F_u}$, so muss man den Zähler von H_t in Gleich. (19) durch $\frac{s}{r^2} = \frac{\lambda}{h^2}$ dividiren; es ergiebt sich dann:

$$(20) \qquad H_t = \mp \frac{\varepsilon E F_c l h^2 \Delta t}{\lambda \left[\Sigma y^2{}_m + \frac{F_o}{F_u} \Sigma y^2{}_k\right]}.$$

95. Näherungsformeln für den durch einen Balken mit parallelen Gurtungen versteiften Parabelbogen. Wir bezeichnen mit h_o und h_u die Abstände der Gurtungen von der die Bogenenden AB verbindenden wagerechten Geraden, mit y' die auf die Gerade AB bezogene Ordinate des Bogens an der Stelle x; sodann betrachten wir den Bogen als stetig gekrümmt und setzen für eine Einzellast P (unter Vernachlässigung der Dehnung der Hängestangen*):

$$H = P \frac{M_w}{\Sigma y^2{}_m \lambda + \frac{F_o}{F_u} \Sigma y_k{}^2 \lambda + h^2 \frac{F_o}{F_b} l \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f^2}{l^2}\right)}$$

$$= P \frac{M_w}{\int\limits_o^l (y' + h_u)^2 dx + \int\limits_o^l (y' - h_o)^2 dx + h^2 \frac{F_o}{F_b} l \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f^2}{l^2}\right)}$$

$$\text{wobei} - \frac{d^2 M_w}{dx^2} = y_m + y_k \frac{F_c}{F_u} = y' + h_u + (y' - h_o) \frac{F_o}{F_u}$$

$$\text{und } y' = \frac{4 f x (l - x)}{l^2}.$$

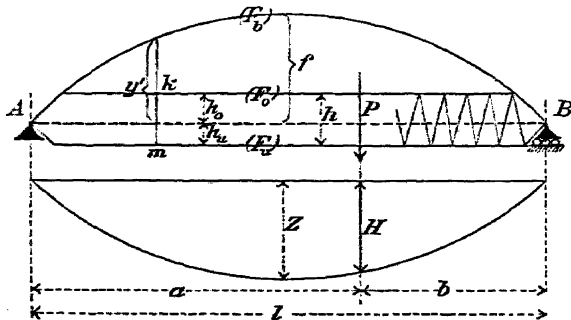



Fig. 263.

*) Dafür wollen wir die Abmessungen l_b und f_b (Fig. 262) durch die grösseren l und f ersetzen.

Man vergleiche die ähnliche Entwickelung wie in No. 82, Seite 223; in derselben Weise wie dort ergiebt sich

$$(21)\quad \begin{cases} H = \dfrac{5P}{8fl^3\omega}\, a\,(l-a)\left[l^2 + a(l-a) + \dfrac{3}{2}\dfrac{l^2}{f}\,\dfrac{h_u F_u - h_o F_o}{F_u + F_o}\right], \text{ wo} \\ \omega = 1 + \dfrac{5}{2}\,\dfrac{h_u F_u - h_o F_o}{f(F_u + F_o)} + \dfrac{15}{8}\,\dfrac{h_u^2 F_u + h_o^2 F_o}{f^2(F_u + F_o)} + \dfrac{15}{8}\,\dfrac{h^2}{f^2}\left(1 + \dfrac{16}{3}\dfrac{f^2}{l^2}\right)\dfrac{F_u F_o}{F_b(F_u + F_o)}. \end{cases}$$

Die hiernach aufgetragenene H-Linie weicht nur wenig von einer Parabel ab; sie darf durch eine Parabel von der Pfeilhöhe

$$(22)\qquad Z = \frac{3\,Pl}{16f}\,\nu$$

ersetzt werden, wobei

$$(23)\quad \nu = \frac{f(F_u + F_o) + 1{,}25\,(h_u F_u - h_o F_o)}{f(F_u + F_o) + 2{,}5\,(h_u F_u - h_o F_o) + \dfrac{15}{8f}(h_u^2 F_u + h_o^2 F_o) + \dfrac{15}{8}\dfrac{h^2}{f}\left(1 + \dfrac{16}{3}\dfrac{f^2}{l^2}\right)\dfrac{F_u F_o}{F_b}}$$

ist. Sollen die Längenänderungen der Hängestangen berücksichtigt werden, so tritt im Nenner noch das Glied

$$+\frac{15}{8}\frac{h^2}{f}\,\frac{128}{3}\,\frac{F_u F_o}{F_z}\,\frac{\lambda f^3}{l^4} = 90\,\frac{h^2 \lambda f^2}{l^4}\,\frac{F_u F_o}{F_z}$$

hinzu. Für die in den Figuren 264 und 265 dargestellten Sonderfälle erhält man:

$$(25)\quad \nu = \frac{f\left(\dfrac{F_u}{F_o} + 1\right) - 1{,}25\,h}{f\left(\dfrac{F_u}{F_o} + 1\right) - 2{,}5\,h + \dfrac{15}{8}\dfrac{h^2}{f}\left[1 + \left(1 + \dfrac{16}{3}\dfrac{f^2}{l^2}\right)\dfrac{F_u}{F_b}\right]} \quad \text{(Fig. 264).}$$

$$(26)\quad \nu = \frac{f\left(\dfrac{F_o}{F_u} + 1\right) + 1{,}25\,h}{f\left(\dfrac{F_o}{F_u} + 1\right) + 2{,}5\,h + \dfrac{15}{8}\dfrac{h^2}{f}\left[1 + \left(1 + \dfrac{16}{3}\dfrac{f^2}{l^2}\right)\dfrac{F_o}{F_b}\right]} \quad \text{(Fig. 265).}$$

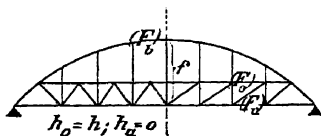



Fig. 264.

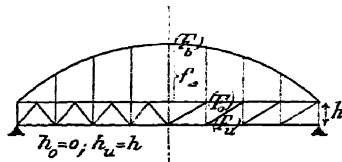



Fig. 265.

In Folge einer von B aus um die Strecke ξ vorgeschobenen gleichförmigen Belastung p entsteht:

$$(27)\qquad H = \frac{pl^2}{8f}\,\nu\,\frac{\xi^2}{l^2}\left(3 - 2\,\frac{\xi}{l}\right)^{*)}$$

*) Vergl. Seite 252, Gleichung 46.

Der Einfluss einer den ganzen Träger bedeckenden gleichförmigen Belastung ist:

$$H_p = \frac{p l^2}{8 f} \nu. \tag{28}$$

Die ständige Belastung erzeugt:

$$H_g = \frac{g l^2}{8 f} \nu. \tag{29}$$

In Folge einer Temperaturänderung entsteht:

$$H_t = \frac{15}{8} \frac{h^2}{f} \frac{\varepsilon E F_o F_u \Delta t \nu}{f(F_o + F_u) + 1{,}25\,(h_u F_u - h_o F_o)} \text{*)}, \tag{30}$$

wobei zu beachten ist, dass der Horizontal*druck* H in der dritten Gurtung vergrössert wird, sobald diese Gurtung um Δt mehr erwärmt wird als die übrigen Theile des Fachwerks.

Für den Fall einer *gleichförmigen* ständigen und beweglichen Belastung lassen sich sehr einfache Formeln gewinnen, welche den in No. 91 für den Zweiggelenkbogen abgeleiteten ähnlich sind.

1. *Angriffsmomente.* Wäre $H = 0$, so würde sich für den Knotenpunkt u (Fig. 266) in Folge der ständigen Belastung das Angriffsmoment $M_g{}^u = g \frac{x x'}{2}$ ergeben, und es entsteht daher mit Berücksichtigung von $H_g = \frac{g l^2}{8 f} \nu$ das Moment:

$$M_g{}^u = g \frac{x x'}{2} - \frac{g l^2}{8 f} \nu\,(y' + h_u), \tag{31}$$

woraus, wegen $y' = 4 f \frac{x x'}{l^2}$, nach Division durch h**)

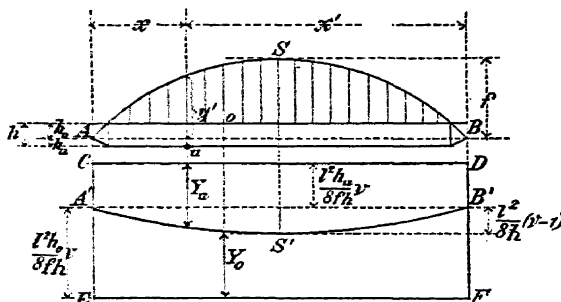



Fig. 266.

---

*) Abgeleitet aus $H_t = \frac{15 \varepsilon E \Delta t h^2 F_o F_u}{8 f^2 (F_o + F_u)\,\omega}$, welche Formel der Gleichung (25) auf Seite 224 entspricht.

**) Wir berechnen die $\frac{M}{h}$, weil die Spannkräfte in den Gurtstäben diesen Werthen proportional sind.

(32) $$\frac{M_g^u}{h} = -\frac{g l^2}{8fh} \nu h_u - g \frac{x x'}{2h} (\nu - 1).$$

Ebenso erhält man für einen Knotenpunkt der oberen Gurtung:

(33) $$\frac{M_g^o}{h} = \frac{g l^2}{8fh} \nu h_o - g \frac{x x'}{2h} (\nu - 1).$$

Zeichnet man also eine Parabel $A'S'B'$, deren Pfeil $= \frac{l^2}{8h}(\nu - 1)$ ist, zieht die zu $A'B'$ parallelen Geraden CD und EF in den Abständen $\frac{l^2 \nu h_u}{8fh}$ bezw. $\frac{l^2 \nu h_o}{8fh}$ von der $A'B'$, und misst entsprechend u und o die Abstände Y_u und Y_o der Parabel von jenen Geraden, so findet man

(34) $$\frac{M_g^u}{h} = -g Y_u; \quad \frac{M_g^o}{h} = +g Y_u,$$

denn die auf $A'B'$ bezogene Ordinate der Parabel an der Stelle x ist $= \frac{4}{l^2} \cdot \frac{l^2(\nu-1)}{8h} x x' = \frac{x x'(\nu-1)}{2h}$. Figur 266 setzt voraus, dass $\nu > 1$ ist. Ergiebt sich $\nu < 1$, so liegt S' oberhalb $A'B'$.

Behufs Ermittelung von M^u_p bringen wir die untere Gurtung des Versteifungsbalkens in A_u und B_u mit den Auflagersenkrechten zum Schnitt, bestimmen den lothrecht über u gelegenen Punkt u' des Bogens und folgern aus der Gleich. $M_u = M_o - H y_u$, in welcher M_o das Moment für den Querschnitt x eines einfachen Balkens bedeutet, dass M_u dieselbe Form hat wie das Moment für den Punkt u' eines in den Punkten A_u und B_u gestützten Zweigelenkbogens. Diesem Zweigelenkbogen muss natürlich der für den versteiften Bogen gefundene Werth ν (Gleich. 23, Seite 265) zugeschrieben werden. Die Kämpferdrucklinie ist eine Wagerechte im Abstande $\frac{4f}{3\nu}$ von der $A_u B_u$ und werde von den Geraden $A_u u'$ und $B_u u'$ in Punkten E, E' geschnitten, deren Abstände von den Auflagersenkrechten bezw. ξ_u und ξ_u' sind, Fig. 267.

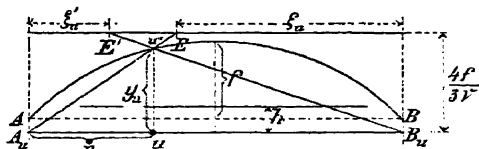



Fig. 267.

Dann ergiebt sich ${}_{min}\frac{M^u_p}{h} = p C_u$, wo

(35) $$C_u = \frac{y_u (\xi_u^3 + \xi'^3_u) \nu}{8flh}.$$

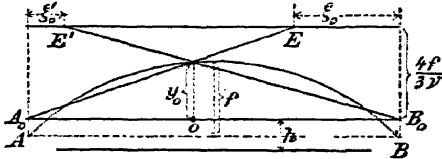
Die beiden Grenzwerthe von $M_u : h$ sind nun

(36) $$\begin{cases} {}_{min}\frac{M_u}{h} = -g Y_u - p C_u \\ {}_{max}\frac{M_u}{h} = -q Y_u + p C \end{cases}$$

und ebenso ergiebt sich:

$$(37)\qquad \begin{cases} \frac{{}^{min}M_o}{h} = + g\,Y_o - p\,C_o \\ \frac{{}^{max}M_o}{h} = + g\,Y_o + p\,C_o, \text{ wo} \end{cases}$$

Fig. 268.

$$(38)\qquad C_o = \frac{y_o\,(\xi_o^3 + \xi'^3_o)\,\nu}{8flh}.$$

Die Ermittelung von ξ_o und ξ'_o zeigt die ohne weitere Erklärung verständliche Figur 268. Liegt E' links von A, so ist $\xi' = 0$ zu setzen, hingegen $\xi = 0$, wenn E rechts von B fällt. — Durch die vorstehenden Formeln sind die Spannkräfte in den Gurtungen bestimmt.

2. *Querkräfte.* Wird zunächst $H_g = 0$ angenommen, so entstehen Momente M_{og}, welche gleich den Ordinaten eines in eine Parabel vom Pfeil $\frac{gl^2}{8}$ eingeschriebenen Polygons sind, und für das m^{te} Feld ergiebt sich die Querkraft:

$$Q_{omg} = \frac{M_{omg} - M_{o(m-1)g}}{\lambda} = \operatorname{tg}\beta_m. \quad \text{Fig. 269.}$$

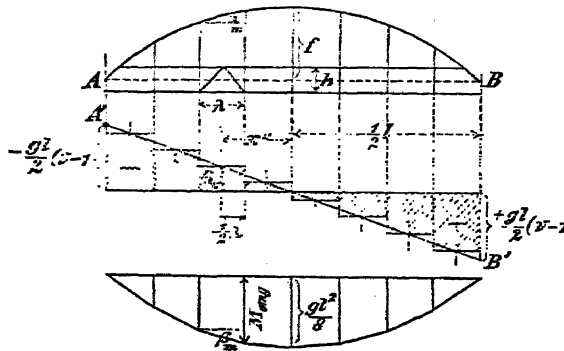



Fig. 269.

Mit Berücksichtigung von H_g erhält man also:

$$Q_{mg} = Q_{omg} - H_g \operatorname{tg}\alpha_m = \operatorname{tg}\beta_m - \frac{gl^2}{8f}\,\nu \operatorname{tg}\alpha_m$$

und wegen $\operatorname{tg}\alpha_m : \operatorname{tg}\beta_m = f : \frac{gl^2}{8}$,

$$(39)\qquad Q_{mg} = - Q_{omg}\,(\nu - 1).$$

Man hat also nur nöthig, die im ersten Bande Seite 105 für die Querkräfte Q_{og} des einfachen Balkens gewonnenen Werthe mit $-(\nu - 1)$ zu mul-

tipliciren und gelangt zu der in Fig. 269 dargestellten Querkraftsfläche. Will man rechnen, so setze man

(40) $$Q_{mg} = -g\, x_m'' (\nu - 1).$$

Die Bestimmung des Einflusses der beweglichen Belastung p geschieht sehr übersichtlich wie folgt.

Im Abstande $\frac{4f}{3\nu}$ von der AB wird die Wagerechte $A'B'$ gezogen, und durch A eine Parallele zum m^{ten} Stabe $(F'F'')$ der dritten Gurtung gelegt (Fig. 270), welche die $A'B'$ in E schneidet. Eine durch E gehende Last P erzeugt — eine stetig gekrümmte H-Linie vorausgesetzt —

$$H = \frac{3Pab}{4fl}\nu = \frac{Pb}{l}\frac{a}{\frac{4f}{3\nu}} = \frac{Pb}{l}\operatorname{cotg}\alpha_m = A\operatorname{cotg}\alpha_m$$

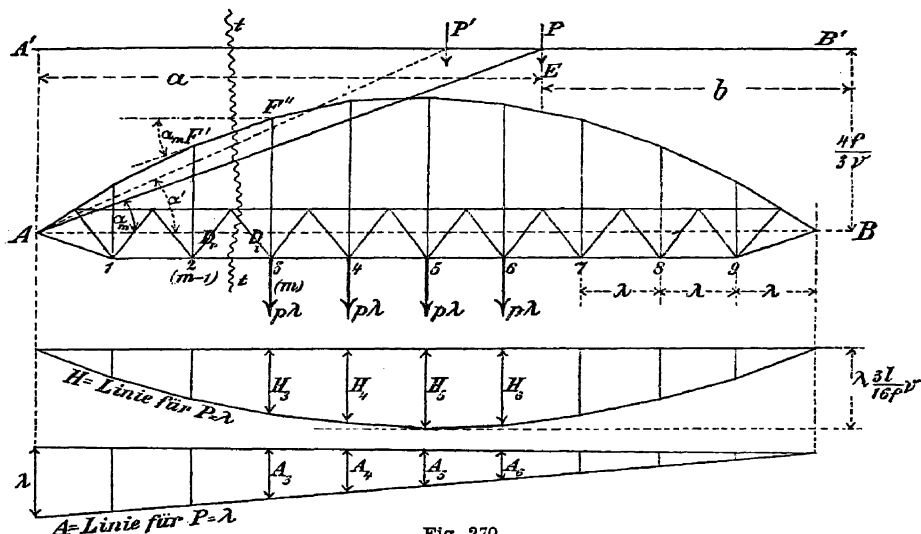



Fig. 270.

und bringt die Querkraft

$$Q_m = A - H\operatorname{tg}\alpha_m = 0$$

hervor. Eine links von E liegende Last P' verursacht $H = A\operatorname{cotg}\alpha'$ und die Querkraft $Q_m = A - A\operatorname{cotg}\alpha'\operatorname{tg}\alpha_m = A\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha_m}{\operatorname{tg}\alpha'}\right)$, welche positiv ist, weil $\operatorname{tg}\alpha_m < \operatorname{tg}\alpha'$ ist, während Lasten rechts von E negative Querkräfte Q_m erzeugen. Liegt aber P links von $m-1$, so entsteht

$$Q_m = A - P - H\operatorname{tg}\alpha_m = -B - H\operatorname{tg}\alpha_m$$

und hieraus darf man schliessen, dass zur Erzielung von ${}_{max}Q_{mp}$ nur die zwischen dem Schnitte tt und der Senkrechten durch E gelegenen Knotenpunkte (mit je $p\lambda$) zu belasten sind.*) Zeichnet man nun die Einflusslinie

---

*) Wir machen die zweckmässige (etwas zu ungünstige) Annahme fester Knotenlasten $p\lambda$. Vergl. Band I Seite 96.

für H und A unter der Voraussetzung, dass sich über den Träger die Last $1 \cdot \lambda$ bewegt, und addirt die unter den belasteten Knotenpunkten gemessenen Ordinaten H und A, so erhält man

$$_{max}Q_{mp} = (\Sigma A - \operatorname{tg} \alpha_m \Sigma H)\, p,$$

wobei in dem in der Fig. 270 dargestellten Falle

$$\Sigma A = A_3 + A_4 + A_5 + A_6; \quad \Sigma H = H_3 + H_4 + H_5 + H_6$$

ist. Die beiden Grenzwerthe von Q sind nun

$$_{max}Q_m = -g x_m'' (\nu - 1) + p (\Sigma A - \operatorname{tg} \alpha_m \Sigma H)$$
$$_{min}Q_m = -q x_m'' (\nu - 1) - p (\Sigma A - \operatorname{tg} \alpha_m \Sigma H);$$

durch dieselben sind die Spannkräfte der beiden Diagonalen D_r und D_l bestimmt.

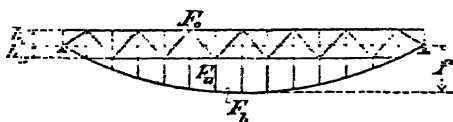



Fig. 271.

Die vorstehend abgeleiteten Formeln lassen sich auch zur Berechnung der Spannkräfte des in der Fig. 271 dargestellten Trägers benutzen. In den Gleichungen (31) bis (33) zur Bestimmung von H muss man h_o mit h_u vertauschen, F_o mit F_u.

96. Zahlenbeispiel. Es soll die H-Linie des in Fig. 272 dargestellten Trägers zunächst angenähert, sodann aber mit Berücksichtigung der Längenänderungen sämmtlicher Stäbe ermittelt werden. Die Knotenpunkte der dritten Gurtung liegen in einer Parabel, deren Pfeil $f = 6{,}12^m$ ist.*)

1. *Vernachlässigung der Längenänderungen der Füllungsstäbe.* Die Gewichte w der einzelnen Knotenpunkte des Versteifungsbalkens sind nach den Gleich. (12) und (13) zu berechnen, worauf $\mathfrak{N}$ durch Gleich. (16) und H durch die Formel

$$H = P \frac{M_w}{\mathfrak{N}}$$

bestimmt ist. Geschätzt seien: $\frac{F_o}{F_u} = 0{,}37$; $\frac{F_o}{F_b} = 0{,}40$. Man erhält

$$\text{für einen unteren Knoten } m\text{: } w_m = y_m$$

$$\text{für einen oberen Knoten } k\text{: } w_k = y_k \frac{F_o}{F_u} = 0{,}37\, y_k,$$

und wenn die den Knoten 1, 3, 5, 7, ... entsprechenden w auf die Angriffspunkte 2, 4, 6, ... der Querträger vertheilt werden:

$$w_2 = 1{,}87 + \tfrac{1}{2} \cdot 1{,}435 \cdot 0{,}37 = 2{,}14$$
$$w_4 = \tfrac{1}{2} \cdot 1{,}435 \cdot 0{,}37 + 3{,}40 + \tfrac{1}{2} \cdot 2{,}795 \cdot 0{,}37 = 4{,}18$$
$$w_6 = \tfrac{1}{2} \cdot 2{,}795 \cdot 0{,}37 + 4{,}59 + \tfrac{1}{2} \cdot 3{,}815 \cdot 0{,}37 = 5{,}80$$
$$w_8 = \tfrac{1}{2} \cdot 3{,}815 \cdot 0{,}37 + 5{,}44 + \tfrac{1}{2} \cdot 4{,}495 \cdot 0{,}37 = 6{,}95$$
$$w_{10} = \tfrac{1}{2} \cdot 4{,}495 \cdot 0{,}37 + 5{,}95 + \tfrac{1}{2} \cdot 4{,}835 \cdot 0{,}37 = 7{,}64$$
$$w_{12} = \tfrac{1}{2} \cdot 4{,}835 \cdot 0{,}37 + 6{,}12 + \tfrac{1}{2} \cdot 4{,}835 \cdot 0{,}37 = 7{,}88.$$

---

*) Figur 272 stellt den Hauptträger einer 1889 in *Hannover* nach den Plänen des Verfassers erbauten *Strassenbrücke über die Ihme* dar.

Die Angriffsmomente M_w des mit diesen Gewichten w belasteten Balkens $A'B'$ sind, wenn die Feldweite $\lambda = 1$ gesetzt wird:*)

$M_{w2} = 30{,}65$	$M_{w6} = 83{,}49$	$M_{w10} = 113{,}60$
$M_{w4} = 59{,}16$	$M_{w8} = 102{,}02$	$M_{w12} = 117{,}54.$

Nun findet man:

$$\mathfrak{N} = \Sigma y_m^2 + \frac{F_o}{F_u} \Sigma y_k^2 + \frac{h^2 l_b}{\lambda} \frac{F_o}{F_b} = 2\,(1{,}87^2 + 3{,}40^2 + 4{,}59^2 + 5{,}44^2 + 5{,}95^2) + 6{,}12^2$$

$$+ 0{,}37 \cdot 2\,(1{,}435^2 + 2{,}795^2 + 3{,}815^2 + 4{,}495^2 + 4{,}835^2) + \frac{1{,}2^2 \cdot 33{,}5}{3{,}125}\, 0{,}40 = 296{,}20$$

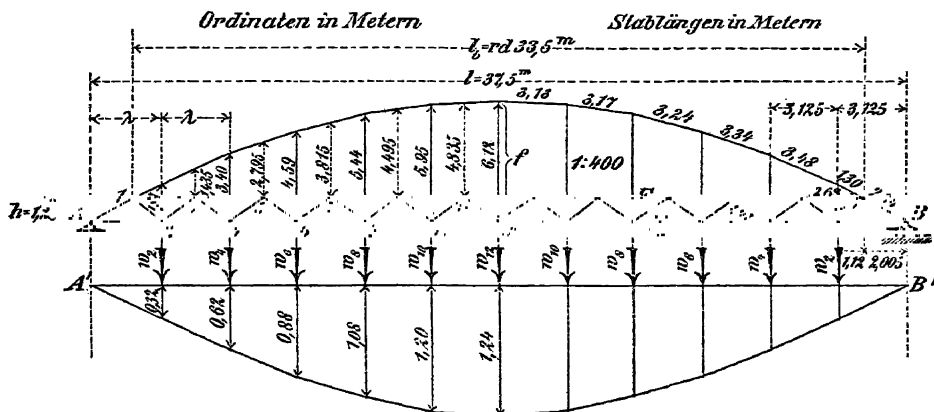



Fig. 272.

und (da die M_w vorhin für $\lambda = 1$ berechnet worden sind) mit $P = 1$:

$$H = \frac{M_w \cdot \lambda}{296{,}20} = \frac{M_w \cdot 3{,}125}{296{,}20} = \frac{M_w}{94{,}78}, \text{ also}$$

$$H_2 = \frac{30{,}65}{94{,}78} = 0{,}32;\ H_4 = 0{,}62;\ H_6 = 0{,}88;\ H_8 = 1{,}08;\ H_{10} = 1{,}20;\ H_{12} = 1{,}24.$$

2. *Berücksichtigung der Längenänderungen sämmtlicher Stäbe.* Die Inhalte der Stabquerschnitte (ohne Abzug für Nietlöcher) sind in Fig. 273 zusammengestellt worden. Zur Ermittelung der H-Linie soll Gleichung (V) auf Seite 163 benutzt werden. Dieselbe liefert

$$H_m = P_m \frac{\delta_m}{\Sigma \frac{S'^2 s}{EF}},$$

wo S' die Stabkraft in Folge $H = -1$ und δ_m die durch diesen Belastungszustand verursachte lothrechte Verschiebung des Knotenpunktes m bedeutet. Die Summe Σ umfasst sämmtliche Stäbe des Fachwerks. Den Kräfteplan für $H = -1$ zeigt Fig. 274[a]. Man denke sich in den Stäben der dritten Gur-

*) Vergl. Seite 214. Die rechnerische Bestimmung der M_w ist der zeichnerischen Ermittelung unbedingt vorzuziehen.

tung Zugkräfte S'_1, S'_2, ... hervorgerufen, deren wagerechte Seitenkraft $= 1$ ist, bestimme die in den lothrechten Zwischenstäben hierdurch erzeugten Drücke $S' = Z'$ (welche beim Parabelbogen von gleicher Feldweite den konstanten Werth $-\frac{8 f \lambda}{l^2} = -\frac{8 \cdot 6{,}12}{37{,}5 \cdot 12} = -0{,}11$ annehmen) und zeichne hierauf für den mit den Kräften S'_1 und Z' belasteten Versteifungsbalken einen Cremona'schen Plan.

Fig. 273.

Die Ergebnisse sind in die Fig. 274b eingeschrieben, ebenso (in Klammern) die den Stäben der dritten Gurtung entsprechenden Werthe $\frac{S'^2 s}{EF}$. Bei Berechnung der letzteren wurde die für alle Stäbe gleiche Elasticitätsziffer E, deren Grösse auf das Verhältniss $\delta_m : \Sigma \frac{S'^2 s}{EF}$ ohne Einfluss ist, $= 1$ gesetzt. Als Einheiten wurden die Tonne und das *cm* gewählt, so dass sich beispielsweise für das dritte Feld der Werth

$$\frac{S'^2 s}{EF} = \frac{1{,}07^2 \cdot 334}{1 \cdot 519} = 0{,}738$$

ergab.

Jetzt wurden für den Zustand $H = -1$ die Längenänderungen $\Delta s = \frac{S' s}{EF}$ der Stäbe des Versteifungsbalkens berechnet und in Fig. 275*) zusammengestellt (nicht eingeklammerte Zahlen), desgleichen die Werthe $\frac{S'^2 s}{EF} = S' \Delta s$ (eingeklammerte Zahlen). Für den zweiten Untergurtstab wurden z. B. erhalten:

$$\Delta s = \frac{1{,}20 \cdot 312{,}5}{1 \cdot 515} = 0{,}7282 = 0{,}73 \text{ und } S' \Delta s = 1{,}20 \cdot 0{,}7282 = 0{,}874.^{**)}$$

Die Durchbiegungen δ_m lassen sich als Momente M_w eines einfachen Balkens $A'B'$ (Fig. 272) deuten, welcher mit Gewichten w belastet wird, zu deren Berechnung die Gleichungen (6) und (7) auf Seite 105 dienen. Wegen $\sec \varphi_1 = \frac{1{,}64}{\frac{1}{2} \cdot 3{,}125} = 1{,}46$ und $\sec \varphi = \frac{1{,}97}{\frac{1}{2} \cdot 3{,}125} = 1{,}26$ ergeben sich, wenn die

---

*) Diese Figur ist verzerrt gezeichnet worden, um Platz für die Zahlen zu gewinnen.

**) Die Stablängen (in Metern) sind in Fig. 272 angegeben.

überall gleiche Abmessung h zunächst $=1$ gesetzt wird, für die unteren Knoten die Werthe:

$$w_2 = 2{,}61 + 1{,}49 . 1{,}46 - 2{,}32 . 1{,}26 = 1{,}8622$$
$$w_4 = 4{,}09 + (2{,}32 - 1{,}83) . 1{,}26 = 4{,}7074$$
$$w_6 = 5{,}54 + (1{,}83 - 1{,}30) . 1{,}26 = 6{,}2078$$
$$w_8 = 6{,}55 + (1{,}30 - 0{,}59) . 1{,}26 = 7{,}4446$$
$$w_{10} = 9{,}69 + (0{,}59 - 0{,}20) . 1{,}26 = 10{,}1814$$
$$w_{12} = 9{,}96 + (0{,}20 + 0{,}20) . 1{,}26 = 10{,}4640$$

Fig. 274.

Fig. 275.

und für die oberen Knotenpunkte:

$w_1 = -1{,}49 . 1{,}46 = -2{,}18$	$w_7 = 1{,}93$
$w_3 = 0{,}73$*)	$w_9 = 2{,}28$
$w_5 = 1{,}41$	$w_{11} = 2{,}45$

*) An jedem Knoten 3, 5, 7, ... greifen zwei Diagonalen an, deren Längenänderungen entgegengesetzt gleich sind und sich daher tilgen.

Werden die Gewichte der oberen Knoten auf die Querträger-Angriffspunkte 2, 4, 6, ... vertheilt, so erhält man für diese letzteren die Gewichte:

$$w_2 = 1{,}8622 - 2{,}18\frac{2{,}005}{3{,}125} + \tfrac{1}{2}0{,}73 = 0{,}83 \qquad w_8 = 7{,}4446 + \tfrac{1}{2}(1{,}93 + 2{,}28) = 9{,}55$$

$$w_4 = 4{,}7074 + \tfrac{1}{2}(0{,}73 + 1{,}41) = 5{,}78 \qquad w_{10} = 10{,}1814 + \tfrac{1}{2}(2{,}28 + 2{,}45) = 12{,}55$$

$$w_6 = 6{,}2078 + \tfrac{1}{2}(1{,}41 + 1{,}93) = 7{,}88 \qquad w_{12} = 10{,}4640 + \tfrac{1}{2}(2{,}45 + 2{,}45) = 12{,}91,$$

denselben entsprechen mit $\lambda = 1$ die Momente:

$$M_{w2} = 43{,}045 \quad M_{w6} = 121{,}695 \quad M_{w10} = 169{,}255$$

$$M_{w4} = 85{,}260 \quad M_{w8} = 150{,}250 \quad M_{w12} = 175{,}710.$$

Die Zusammenzählung der in die Figuren 274 und 275 eingeschriebenen (eingeklammerten) Werthe $\frac{S'^2 s}{EF}$ giebt für beide Trägerhälften:

$$\Sigma \frac{S'^2 s}{EF} = 362{,}937$$

und hierzu tritt noch für die Hängestangen, für welche durchweg $S' = -0{,}11$ und $F = +90\ qcm$ ist, das Glied:

$$\frac{0{,}11^2 \cdot}{1 \cdot 90}[2(1{,}87 + 3{,}40 + 4{,}59 + 5{,}44 + 5{,}95) + 6{,}12] = 0{,}654^{*}),$$

weshalb

$$\Sigma \frac{S'^2 s}{EF} = 362{,}937 + 0{,}654 = 363{,}59.$$

Da nun bei Berechnung der M_w sowohl $h = 1$ als auch $\lambda = 1$ gesetzt wurde, so folgt jetzt für $P = 1$

$$H = \frac{M_w}{363{,}59} \cdot \frac{\lambda}{h} = \frac{M_w \cdot 312{,}5}{363{,}59 \cdot 120} = \frac{M_w}{139{,}62}, \text{ also}$$

$$H_2 = \frac{43{,}045}{139{,}62} = 0{,}31;\ H_4 = 0{,}61;\ H_6 = 0{,}87;\ H_8 = 1{,}08;\ H_{10} = 1{,}21;\ H_{12} = 1{,}26.$$

Diese genaueren Werthe weichen von den vorhin berechneten nur unwesentlich ab.

Wir empfehlen dem Leser, zur Uebung die δ_m-Linie noch mit Hilfe eines Williot'schen Planes oder mittels des Stabzugverfahrens zu bestimmen.

97. Einfluss schräger Lasten. Wir schliessen diesen § mit einer Untersuchung des Einflusses schräger Lasten auf einen Zweigelenkbogen mit gesprengter Zugstange (Dachbinder) und machen auf diejenigen Annahmen aufmerksam, welche zur Vereinfachung des im § 5 erledigten strengeren Verfahrens gemacht werden dürfen. Der allgemeine Ausdruck für H in Folge einer Einzellast P_m ist (nach der ersten der Gleichungen V auf Seite 163):

$$H = P_m \frac{\delta_m'}{\Sigma \frac{S'^2 s}{EF}}, \tag{41}$$

---

*) Man übersieht hier recht deutlich den geringen Einfluss dieses Gliedes.

worin S' die dem Zustande $H = -1$ entsprechende Spannkraft irgend eines Stabes des Fachwerks ist, und δ_m' die Verschiebung bedeutet, welche der Angriffspunkt m der Last P_m im Sinne von P_m erfährt, sobald nur die Ursache $H = -1$ wirkt. Die Ermittelung der Verschiebungen δ', die in Fig. 276 mit Hilfe eines Williot'schen Planes erfolgte, darf stets unter der Voraussetzung starrer Füllungsstäbe durchgeführt werden; auch ist es zulässig, sämmtlichen Gurtstäben denselben

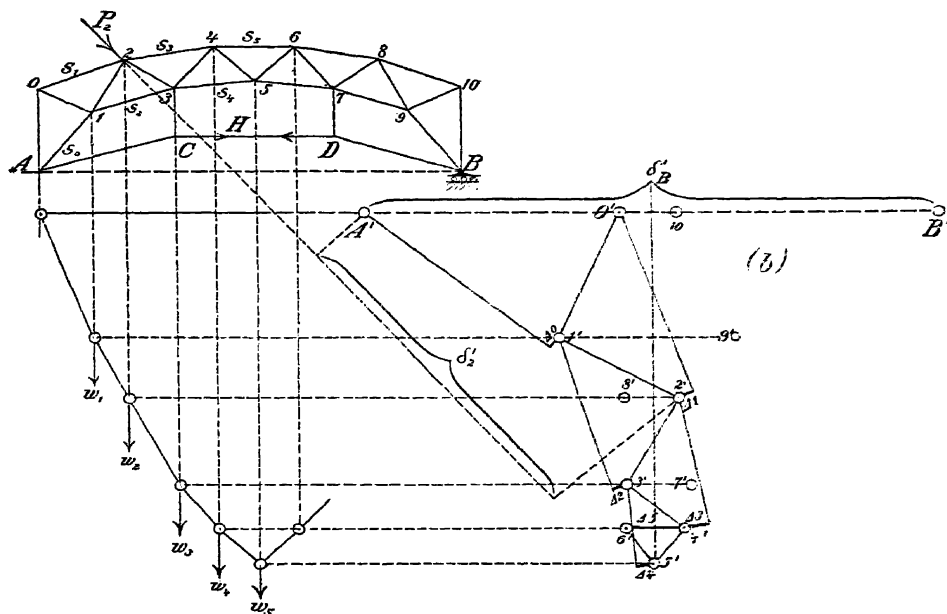



Fig. 276.

Querschnitt F_c zuzuschreiben. Setzt man dann bei der Berechnung der Längenänderungen $\Delta s = \dfrac{S' s}{E F_c}$ der Gurtstäbe sowohl $E = 1$ als auch $F_c = 1$, so muss man in Gleich. (41) den Nenner durch den Werth $\Sigma S'^2 s \dfrac{F_c}{F}$ ersetzen. In Fig. 276 liegt ein symmetrischer Träger vor. Es wurde bei Aufzeichnung des Verschiebungsplanes zunächst der Mittelpunkt und die Richtung des Stabes s_5 als festliegend angesehen, hierauf $6'4' = \Delta 5$*) gemacht und $5'4' \perp 54$, $5'6' \perp 56$ gezogen.

*) Wir erinnern an die Bezeichnung $\Delta s_5 = \Delta 5$.

Die Anschliessung der Punkte $3'$, $1'$, $0'$, A' erfolgte nach No. 32. — Die Punkte $8'$, $10'$, B' liegen in Bezug auf die Senkrechte durch $5'$ symmetrisch zu $2'$, $1'$, A'; und ebenso würde man, falls auch in den Knoten 1, 3, 5, 7, 9, C, D Lasten angreifen sollten, die symmetrisch zu $3'$ und $1'$ gelegenen Punkte $7'$, $9'$ eintragen und endlich C' D', welche in Fig. 276 fortgelassen sind, bestimmen. Behufs Erfüllung der wirklichen Auflagerbedingungen musste schliesslich der Verschiebungspol aus dem Mittelpunkte von $\Delta 5$ in den dem festen Auflager A entsprechenden Punkt A' gelegt werden, worauf sich beispielsweise die Verschiebung δ_2' des Knotens 2 im Sinne von P_2 gleich der Projektion des Strahles $A'2'$ auf die Richtung von P_2 ergab.*)

Wären nun Zugstange und Zwischenstäbe nicht vorhanden, so würde sich

$$\Sigma S'^2 s \frac{F_c}{F} = \delta_B' = \overline{A'B'}$$

ergeben, d. h. gleich der Verschiebung, welche B in Folge des Belastungszustandes $H = -1$ erfährt. Im vorliegenden Falle ist aber

$$\Sigma S'^2 s \frac{F_c}{F} = \delta_B' + \Sigma_z S'^2 s \frac{F_c}{F},$$

wobei sich das Zeichen Σ_z über die Glieder der Zugstange und die Zwischenstäbe erstreckt, und hierfür darf stets

$$\Sigma S'^2 s \frac{F_c}{F} = \delta_B' + l \frac{F_c}{F_b}$$

gesetzt werden,**) womit sich

$$H = P_m \frac{\delta_m'}{\delta_B' + l \dfrac{F_c}{F_b}}$$

ergiebt, oder, falls man die Lasteinheit durch eine Strecke von der Länge $\delta_B' + l \frac{F_c}{F_b}$ darstellt,

$$H = P_m \delta_m'.$$

Will man die Punkte $5'$, $6'$, $4'$, ... in Fig. 276[b] aus der nach No. 93 für die lothrechte Lastenrichtung ermittelten Biegungslinie ableiten, was manchmal vortheilhaft ist, so beachte man die Beziehung:

---

*) Die bei unsymmetrischem Träger nach No. 33, Seite 61, zu zeichnende Figur $A'''\,0''\,1''\ldots B''$ schrumpft hier zu einem mit A' sich deckenden Punkte zusammen.

**) Vergl. Seite 261, Gleich. (11).

$w_m \frac{\Delta s_m}{r_m}$ *(absolut genommen).* Hat man also die Gewichte w nicht mittels der Gleichungen auf Seite 260 berechnet, sondern von den später gezeigten Vereinfachungen Gebrauch gemacht, so muss man bei Aufzeichnung des Linienzuges 5′, 4′ 2′, 0′, 1′, A' die Längenänderungen $\Delta s = w r$ auftragen und auch das Glied $l \frac{F_c}{F_b}$ entsprechend ändern. Liegt z. B. ein Sichelträger vor und wird nach Seite 213 das Gewicht $w_m = \frac{y_m}{r^2_m}$ (statt $\frac{y_m s_m}{r^2_m}$) eingeführt, so folgt für den dem Knoten m gegenüberliegenden Gurtstab: $\Delta s_m = \frac{y_m}{r_m}$ und es muss $\frac{l}{s_c} \frac{F_c}{F_b}$ an die Stelle von $l \frac{F_c}{F_b}$ treten, wo s_c die mittlere Gurtstablänge bedeutet. Sind sämmtliche Füllungsstäbe mit Ausnahme eines etwa vorhandenen Endständers gegen die Lothrechte geneigt, so bestimme man 4′, 3′, 2′, 0′, indem man 5′—4′ ⊥ 5—4, 4′—3′ ⊥ 4—3, 3′—2′ ⊥ 3—2, 2′—1′ ⊥ 2—1 und 1′—0′ ⊥ 1—0 zieht, worauf A' am schnellsten mit Hilfe von $\Delta s_0 = \Delta 0$ festgelegt wird.

Schliesslich sei noch daran erinnert, dass sich die Punkte 4′, 2′, 0′, A' auch nach dem Stabzugverfahren ermitteln lassen, wie das in No. 85 durchgeführte Zahlenbeispiel gezeigt hat.

Wird die Zugstange durch geneigte Stäbe mit dem Fachwerkbogen verbunden, Fig. 277*), so führe man die Spannkraft X irgend eines

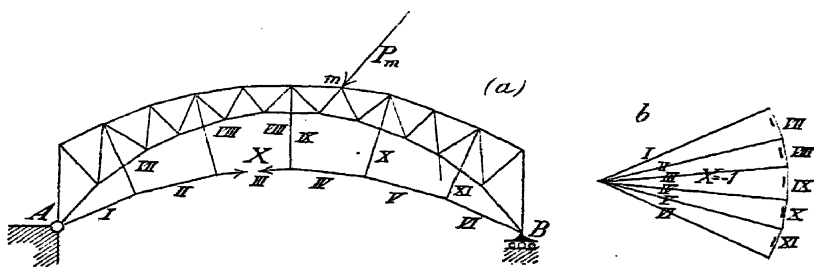



Fig. 277.

Gliedes derselben als statisch nicht bestimmbare Grösse ein, ermittele die von der Ursache $X = -1$ hervorgerufenen Spannkräfte und Längenänderungen und zeichne — wie in Figur 276 — einen Williot'schen Verschiebungsplan. Die Bestimmung der S' für die Glieder der Zug-

*) In dieser Weise sind z. B. die Dachbinder der Queens-Street-Station der North British R. in Glasgow angeordnet.

stange und für die Zwischenstäbe hat hierbei nach Fig. 277[b] zu erfolgen.*) Zu betonen ist, dass alle vorhin als zulässig bezeichneten Annahmen auch für den Fall schräger Hängestangen statthaft sind; die Berechnung von X darf dann bei der üblichen geringen Sprengung der Zugstange mittels der Formel

$$X = P_m \frac{\delta_m'}{\delta_B' + l \dfrac{F_c}{F_b}} \quad \text{(vergl. Seite 276)}$$

erfolgen.

Hinsichtlich der bei der Berechnung von Dachbindern in Betracht zu ziehenden Belastungsfälle wird auf Band I, § 43 verwiesen.

§ 9.

Kette, versteift durch einen Fachwerkbalken.

98. Eine sehr wichtige Trägerart, deren Berechnung sich von der Untersuchung der im vorigen § behandelten Stabgebilde nur wenig unterscheidet, ist die in Fig. 278 dargestellte, durch einen einfachen Balken versteifte Kette. Bei R und T seien auf wagerechter Bahn geführte Auflager angeordnet; die Hängestangen seien lothrecht.

Da es zweckmässig ist, den Versteifungsbalken nur durch die bewegliche Belastung zu beanspruchen, so wird man das Bauwerk zunächst als unversteifte Kettenbrücke ausführen und die Dreiecke des Versteifungsbalkens erst dann schliessen, wenn die Kettenglieder und die Hängestangen die der ständigen Relastung entsprechenden Längenänderungen erfahren hahen.

Die Aufsuchung der Form der meistens durch drei angenommene Punkte R, W, T geführten Kette und die Ermittelung der Spannkräfte in Folge der ständigen Belastung ist bereits im I. Bande (S. 402—406) unseres Buches beschrieben worden, und wir fügen nur noch hinzu, dass auf dem dort angegebenen Wege die Gestalt der durch die ständige Belastung *gespannten* Kette — nicht diejenige der *spannungslosen* — gefunden wird, dass also die Längen, welche den Kettengliedern und Hängestangen in der Werkstatt zu geben sind, $= s - \dfrac{S_g s}{EF}$ sein müssen,

*) Die Unterschiede in den Spannkräften der einzelnen Glieder werden stets gering sein; durch entsprechende Neigung der Hängestangen lässt sich sogar erreichen, dass in allen Theilen der Zugstange dieselbe Spannkraft X auftritt.

wenn allgemein s die Länge des fraglichen Stabes auf Grund der erwähnten Formbestimmung und S_g die Spannkraft in Folge der ständigen Belastung bedeutet. Dass ausserdem noch der Unterschied zwischen Aufstellungs- und Werkstattstemperatur berücksichtigt werden muss, ist selbstverständlich, ebenso dass bei Bemessung der Pfeilerhöhen der Verkürzung Rechnung zu tragen ist, welche die Pfeiler in Folge der ständigen Belastung erfahren werden.

Wird nur ein Theil (g_v) der ständigen Belastung (g) *vor* Ausführung der Versteifung aufgebracht, der Rest (g_n) erst *nach* Einfügung des Balkens, so ist in der vorstehenden Betrachtung S_{gv} an die Stelle von S_g zu setzen. Die beschriebene Formbestimmung liefert die Gestalt der mit g_v belasteten Kette und der Einfluss von g_n muss, ebenso wie derjenige der beweglichen Belastung, nach den in den folgenden Untersuchungen abgeleiteten Verfahren festgestellt werden.

Andererseits könnte man aber auch ausser der gesammten ständigen Belastung (g) noch eine Belastung g' auf die unversteifte Brücke bringen und nach Vollendung des Versteifungsbalkens wieder entfernen. Es würde dann, bei Untersuchung der nach der Versteifung hinzutretenden Lasten, g' als eine negative Belastung aufzufassen sein.

Aehnliche Verhältnisse lassen sich natürlich bei jedem statisch unbestimmten Träger herbeiführen. So könnte man z. B. einen Zweigelenkbogen zunächst mit Scheitelgelenk ausführen und dieses Gelenk nach Aufbringung der gesammten ständigen Belastung g oder eines Theiles von g vernichten; auch eine später wieder zu beseitigende Belastung g' könnte zuweilen von Vortheil sein.

Die Untersuchung des Einflusses der nach erfolgter Versteifung der Kette auf den Balken gebrachten Belastungen beginnen wir wie immer mit der Betrachtung der Wirkung einer Einzellast.

99. Der Horizontalzug H in Folge einer Einzellast. Verbindet man die senkrecht über den Balkenstützen A, B gelegenen Punkte A'', B'' der Kette durch eine Gerade (die *Schlusslinie*) und bezeichnet die Strecke, welche Kette und Schlusslinie auf der Lothrechten durch irgend einen Knotenpunkt m abschneiden, mit y_m (Fig. 278), so ist das auf m bezogene Angriffsmoment:

$$M_m = M_{om} - Hy_m,$$

wo M_{om} den Werth von M_m für den Fall bedeutet, dass der von den Lasten P ergriffene Balken nicht an der Kette hängt, sondern nur in A und B gestützt wird. Für den Zustand $H = -1$ ergiebt sich $M_m' = y_m$ und hieraus folgt, dass die Berechnung des von einer Einzellast P hervorgerufenen Horizontalzuges H sich von der Ermittelung der Werthe H für die im vorigen § behandelten Trägerarten nur in-

sofern unterscheidet, als die im Nenner des allgemeinen Ausdrucks für H stehende Summe $\Sigma \frac{S'^2 s}{EF}$ von den Rückhaltketten beeinflusst wird. Die Spannkraft der unter α' geneigten linken Rückhaltkette ist $= H \sec \alpha'$ und nimmt für $H = -1$ den Werth $S' = -\sec \alpha'$ an. Ist also die Länge dieser Kette $= s'$ und der Querschnitt $F = F_k \sec \alpha'$, wo F_k den zur Aufnahme der Spannkraft $S = H_{max}$ bestimmten Scheitel-Querschnitt der Tragkette RWT bedeutet, so ergiebt sich

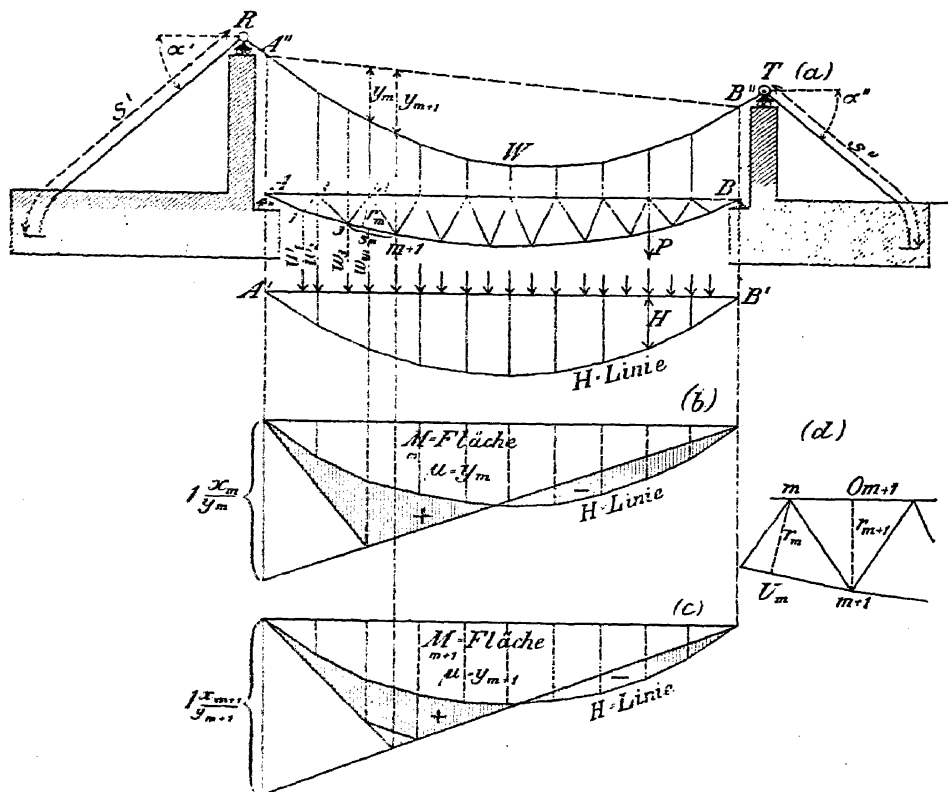



Fig. 278.

$\frac{S'^2 s}{EF} = \frac{s' \sec \alpha'}{EF_k}$, wobei allerdings vorausgesetzt wird, dass sämmtliche Glieder der Rückhaltkette gleich gespannt sind, dass also die Stützung derselben auf die in Figur 164 (Seite 169) dargestellte Weise erfolgt. Bezeichnen s'' und α'' die entsprechenden Werthe der rechten Rückhaltkette, so führen die vorstehenden Betrachtungen zu der folgenden Bestimmungsweise der Einflusslinie für H.

Man berechne die Momente M_w *eines mit den Gewichten* $w_m = \frac{y_m s_m}{r^2_m} \frac{F_c}{F_m}$ *belasteten einfachen Balkens* $A'B'$ *(unter* F_c *eine beliebig grosse, aber konstante Querschnittsfläche verstanden) und dividire dieselben durch*

$$(1) \qquad \mathfrak{N} = \Sigma z_m + \frac{F_c}{F_k} (\Sigma \lambda_r \sec^2 \alpha_r + s' \sec \alpha' + s'' \sec \alpha'') + \frac{F_c}{F_z} \Sigma z_r (tg\, \alpha_r - tg\, \alpha_{r+1})^2,$$

worin $z_m = y_m w_m$. *Das Ergebniss ist* $H = \frac{M_w}{\mathfrak{N}}$.*)

Die zweite der Summen in Gleichung (1) erstreckt sich über sämmtliche Glieder der Tragkette, die dritte über alle Hängestangen. Für beide Summen lassen sich einfache, genügend genaue Näherungsformeln

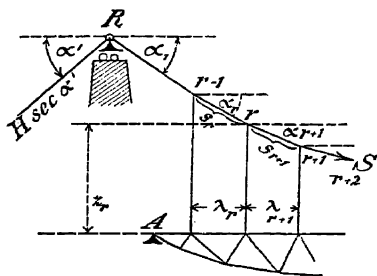
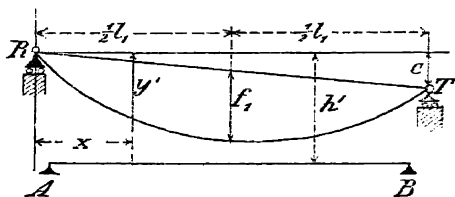



Fig. 279. Fig. 280.

ableiten. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Kette als stetig gekrümmte Parabel und setzen mit Bezugnahme auf die Bezeichnungen in Fig. 280:

$$y' = \frac{4 f_1 x (l_1 - x)}{l^2_1} + \frac{c x}{l_1} \quad \text{und}$$

$$\Sigma \lambda_r \sec^2 \alpha_r = \int_0^{l_1} dx \left[1 + \left(\frac{dy'}{dx}\right)^2\right] = l_1 \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f^2_1}{l^2_1} + \frac{c^2}{l^2_1}\right),$$

ferner $\Sigma z_r (\text{tg}\, \alpha_r - \text{tg}\, \alpha_{r+1})^2 = \lambda \Sigma (h' - y') \lambda \left(\frac{\text{tg}\, \alpha_r - \text{tg}\, \alpha_{r+1}}{\lambda}\right)^2$

*) Die Bezeichnungen sind dieselben wie im vorigen §; sie wurden überdies in die Figuren 278 und 279 eingetragen. Die Knotenpunkte des Balkens und der Kette wurden für sich nummerirt; ... $m-1$, m, $m+1$ ... sind die Ordnungsziffern der Knotenpunkte des Balkens, ... $r-1$, r, $r+1$ ... diejenigen der Knotenpunkte der Kette.

$$= \lambda \int_o^{l_1} (h' - y')\, dx \left(\frac{d^2 y'}{dx^2}\right)^2 = \lambda \left(\frac{8 f_1}{l^2_1}\right)^2 \int_o^{l_1} (h' - y')\, dx$$

$$= \lambda \left(\frac{8 f_1}{l^2_1}\right)^2 l_1 \left(h' - \frac{2}{3} f_1 - \frac{c}{2}\right).$$

Wir erhalten dann:

$$(2) \quad \mathfrak{N} = \Sigma z_m + \frac{F_c}{F_k} s_o + \frac{64 f^2_1\, (3h' - 2 f_1 - 1{,}5\, c)\, \lambda}{3 l^3_1} \frac{F_c}{F_z}, \text{ wo}$$

$$(3) \quad s_0 = l_1 \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f^2_1}{l^2_1} + \frac{c^2}{l^2_1}\right) + s' \sec \alpha' + s'' \sec \alpha''.$$

Das von den Abmessungen der Hängestangen abhängige letzte Glied von $\mathfrak{N}$ darf in der Regel gestrichen werden; sein Einfluss ist sehr gering. Bei Berechnung der Werthe w_m und z_m ist es zulässig, allen Gurtstäben denselben Querschnitt zuzuschreiben. Man setze daher

$$(4) \qquad w_m = \frac{y_m s_m}{r^2_m}$$

und verstehe unter dem bislang willkürlichen F_c den Mittelwerth der Gurtquerschnitte.

Erfolgt die Versteifung der Kette durch einen nach Fig. 283 (S. 287) angeordneten Parallelträger von der Höhe h, so nimmt bei gleichlangen Feldern der Ausdruck $\frac{s_m}{r^2_m}$ den festen Werth $\frac{\lambda}{h^2}$ an. Setzt man dann

$$(5) \qquad w_m = y_m \text{ und } z_m = y_m w_m = y^2_m,$$

so muss man mit

$$(6) \quad \mathfrak{N} = \Sigma y^2_m + \frac{h^2}{\lambda} \left[\frac{F_c}{F_k} s_0 + \frac{64 f^2_1\, (3h' - 2 f_1 - 1{,}5 c)\, \lambda}{3 l^3_1} \frac{F_c}{F_z}\right]$$

rechnen.

Für die durch einen Parallelträger versteifte Kette ist aber noch eine weitere Vereinfachung möglich, bestehend in der Einführung einer parabelförmigen H-Linie. Die Entwickelung ist ähnlich der in No. 82 für den Horizontalschub eines Zweigelenkbogens gegebenen Ableitung. Man betrachte die Kette als stetig gekrümmte Parabel, deren Gleichung

$$y = \frac{4 f x (l - x)}{l^2}$$

ist (Fig. 281), und ersetze die Einzelgewichte w durch eine stetige Belastung, so zwar, dass das Balkentheilchen dx mit $2 y\, dx$ belastet wird, wobei die Ziffer 2 ausdrückt, dass an der Stelle dx die Gewichte *zweier* Knoten (eines oberen und eines unteren) zu berücksichtigen sind. Man erhält dann an der

Angriffsstelle von P das Moment

$$M_w = \frac{2f}{3l^2}(al^3 - 2la^3 + a^4)^{*)}$$

und findet nun: $H = \frac{PM_w}{\mathfrak{N}}$, wo

$$\mathfrak{N} = 2\int_0^l y^2\,dx + h^2 \frac{F_c}{F_k} s_0 = 2\,\frac{8}{15} f^2 l + \frac{h^2 F_c}{F_k} s_0.$$

Der unwesentliche Einfluss der Hängestangen ist hierbei vernachlässigt worden. Ersetzt man die auf diese Weise erhaltene H-Linie durch eine Parabel (vergl. Seite 224), so findet man den Pfeil derselben:

(7) $$Z = \frac{3\,Pl\,\nu}{16\,f}, \text{ wo}$$

(8) $$\nu = \frac{1}{1 + \frac{15}{16}\frac{h^2}{f^2}\frac{s_0}{l}\frac{F_c}{F_k}}.$$

Fig. 281.

Die Gleichung der Parabel ist

(9) $$H = \frac{3\,Pab\,\nu}{4\,fl}.$$

Der Werth s_0 ist nach Gleich. (3) zu berechnen. F_c bedeutet den mittleren Querschnitt der Balkengurtung, F_k den Querschnitt der Kette im Scheitel.

100. Horizontalzug in Folge einer Temperaturänderung. Eine gleichmässige Aenderung der Aufstellungstemperatur um t° erzeugt:

(10) $$H_t = \frac{\varepsilon t \Sigma S' s}{\Sigma \frac{S'^2 s}{EF}} = \frac{\varepsilon E F_c t \Sigma S' s}{\Sigma S'^2 s \frac{F_c}{F}} = \frac{\varepsilon E F_c t \Sigma S' s}{\mathfrak{N}},$$

wo $\mathfrak{N}$ der durch Gleichung (1) auf Seite 281 bestimmte Werth ist Zahlenrechnungen beweisen, dass der Einfluss der Spannkräfte S' der Stäbe des Balkens auf die Summe $\Sigma S's$ ganz unwesentlich ist, und dass es genügt, in den Zähler der Gleichung (10) nur die den Kettengliedern und den Hängestangen entsprechenden Werthe $S's$ einzusetzen.

*) Vergl. den Ausdruck für M_w auf Seite 223. An die Stelle von x ist a getreten; f wurde durch $2f$ ersetzt; die Glieder $\frac{F_o}{F_u}$ und $\frac{1}{2}\left(h_o \frac{F_o}{F_u} - h_u\right)$. $x(l-x)$ wurden gestrichen.

Wir führen ein:

für die Tragkette: $\Sigma S's = -\Sigma \sec \alpha' s = -\Sigma \lambda \sec^2 \alpha$

$$= -l_1 \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f^2_1}{l^2_1} + \frac{c^2}{l^2_1}\right)$$

„ „ Rückhaltketten: $\Sigma S's = -(s' \sec \alpha' + s'' \sec \alpha'')$

„ „ Hängestangen: $\Sigma S's = -\Sigma z_r (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1})$

$$= -\Sigma (h' - y') \lambda \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1}}{\lambda}\right) = +\int_0^{l_1} (h' - y')\, dx \frac{d^2 y'}{dx^2}$$

$$= -\left(\frac{8 f_1}{l^2_1}\right) \int_0^{l_1} (h' - y')\, dx = -\frac{8 f_1}{l^2_1} l_1 \left(h' - \frac{2}{3} f_1 - \frac{c}{2}\right)$$

und erhalten:

$$(11) \quad H_t = -\frac{\varepsilon E F_c t}{\mathfrak{N}} \left[s_0 + \frac{8 f_1 (3 h' - 2 f_1 - 1{,}5\, c)}{3 l_1}\right],$$

wobei $\mathfrak{N}$ und s_0 nach Gleichung (2) und (3) zu berechnen sind.

Das Vorzeichen deutet an, dass in Folge einer Erhöhung der Aufstellungstemperatur der Horizontalzug der Kette abnimmt.

Wird die Kette durch einen Parallelträger versteift, so lässt sich Gleich. (11) noch erheblich vereinfachen. Man ersetze dann nach Streichung des unwesentlichen Einflusses der Hängestangen und Einführung eines mittleren Gurtquerschnittes den Werth

$$\mathfrak{N} = \Sigma \frac{y^2_m s_m}{r^2_m} + \frac{F_c}{F_k} s_0$$

durch

$$\mathfrak{N} = 2 \int_0^l \frac{y^2 dx}{h^2} + \frac{F_c}{F_k} s_0 = \frac{16}{15} \frac{f^2 l}{h^2} + \frac{F_c}{F_k} s_0,$$

um dann zu erhalten:

$$H_t = -\varepsilon E F_k t \frac{15 h^2}{16 f^2} \frac{s_0}{l} \frac{F_c}{F_k} \frac{1}{1 + \frac{15}{16} \frac{h^2}{f^2} \frac{s_0}{l} \frac{F_c}{F_k}},$$

oder nach einfacher Umformung:

$$(12) \quad H_t = -\varepsilon E F_k t (1 - \nu),$$

wo ν nach Gleich. (8) auf Seite 283 zu berechnen ist.

101. Einflussflächen. Die Einflussflächen für die Momente

$$M_m = M_{om} - H y_m \quad \text{und} \quad M_{m+1} = M_{om+1} - H y_{m+1}$$

sind in den Figuren 278[b] und 278[c] (für den Fall in den oberen Balkenknoten angreifender Lasten) dargestellt worden. Ihre Aufzeichnung be-

darf keiner weiteren Erläuterung mehr, da sie nach den in den §§ 7 und 8 für die M-Flächen gegebenen Regeln erfolgt. Nach Berechnung der Momente M_m, M_{m+1} findet man die Spannkräfte in den Gurtungen:

$$U_m = + \frac{M_m}{r_m}; \quad O_{m+1} = - \frac{M_{m+1}}{r_{m+1}} \quad \text{(vergl. Fig. 278}^d\text{)}.$$

Auch die Ermittelung der Spannkräfte in den Füllungsstäben gestaltet sich ganz ähnlich wie beim Zweigelenkbogen und bei den im § 9 untersuchten Trägerarten. Wir führen durch A und B (Fig. 282) lothrechte Schnitte, welche die Tragkette in A'' bezieh. B'' treffen, zerlegen die Spannkräfte S_1 und S_n der äussersten Kettenglieder in die

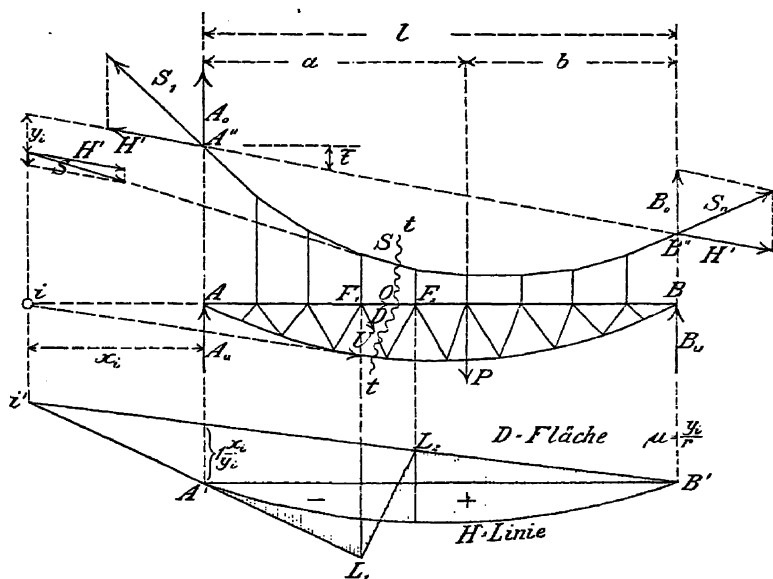



Fig. 282.

lothrechten Seitenkräfte A_o, B_o und die in die Schlusslinie fallenden Seitenkräfte H', und finden zunächst aus der auf B'' bezogenen Momentengleichung:

$$(A_o + A_u)\, l - Pb = 0,$$

dass $A_o + A_u$ ebenso gross ist, wie der Stützenwiderstand $A = \dfrac{Pb}{l}$ eines einfachen Balkens AB, und dass ferner $B_o + B_u = B = \dfrac{Pa}{l}$ ist. Sodann führen wir behufs Bestimmung von D den Schnitt tt, wählen

den Treffpunkt i von O und U zum Drehpunkt, bestimmen die Strecke y_i, welche der Kettenstab S und die Schlusslinie $A''B''$ auf der Lothrechten durch i abschneiden, zerlegen die Spannkraft S (welche auf die in der Fig. 282 angegebene Weise in ihrer Richtung verschoben wird) in eine lothrechte Seitenkraft und in die zur Schlusslinie parallele $H' = H \sec \tau$ (wo τ den Neigungswinkel der Schlusslinie bedeutet) und erhalten die Momentengleichung

$$M_{oi} - Hy_i + Dr_i = 0. \tag{13}$$

Hierin bedeutet M_{oi} das auf den Punkt i bezogene Angriffsmoment für den Fall, dass AB ein einfacher, nicht an der Kette hängender Balken ist, ein Balken also, dessen Stützenwiderstände $A_o + A_u = A$ und $B_o + B_u = B$ sind; r_i aber ist der Hebelarm von D in Bezug auf i. Die Gleichung (13) hat dieselbe Form wie Gleichung 34 auf Seite 225, und hieraus folgt die aus der Figur 282 ersichtliche Bestimmungsweise der D-Fläche. Man vergleiche die Figuren 223 bis 226 auf Seite 231 und beachte behufs Feststellung der Vorzeichen, dass bei der in Fig. 282 angenommenen Lage des Punktes i der Einfluss von H auf D gleich $+ H \frac{y_i}{r_i}$ (also positiv) ist, während sich im Falle $H = 0$ die Momentengleichung

$$-(A_o + A_u)\, x_i + Dr_i = 0$$

und hieraus der ebenfalls positive Werth

$$D = + A \frac{x_i}{r_i}$$

ergeben würde.

Es leuchtet ein, dass sich auch die anderen im § 7 zur Bestimmung der D-Flächen angegebenen Verfahren auf den vorliegenden Fall anwenden lassen; wir führen dies aber hier nicht weiter aus, empfehlen vielmehr dem Leser, diese leichte Arbeit selbst vorzunehmen, und weisen nur noch auf den wichtigsten Sonderfall hin, nämlich den in Fig. 283 abgebildeten Versteifungsbalken mit parallelen Gurtungen. Hier ergeben sich die Spannkräfte in den Füllungsstäben in bekannter Weise aus den Querkräften Q, und es genügt daher, die Ermittelung der Q-Fläche für irgend ein Feld $F_1 F_2$ zu zeigen.*)

Sind M_1 und M_2 die Angriffsmomente für die Knoten F_1, F_2, so besteht, da auf den Balken nur lothrechte Kräfte wirken, die Be-

---

*) Bildet die vom Schnitte t getroffene Diagonale (D) mit der Wagerechten den Winkel φ, so ist $D \sin \varphi = Q$.

ziehung

$$Q = \frac{M_2 - M_1}{\lambda} = \frac{M_{o2} - Hy_2 - M_{o1} + Hy_1}{\lambda} = Q_o - H\frac{y_2 - y_1}{\lambda},$$

wo Q_o die Querkraft für das Feld $F_1 F_2$ eines einfachen nicht an der Kette hängenden Balkens AB bedeutet. Trägt man die Ordinaten $y_1 y_2$ nach Fig. 283[b] von einer wagerechten Schlusslinie aus auf und

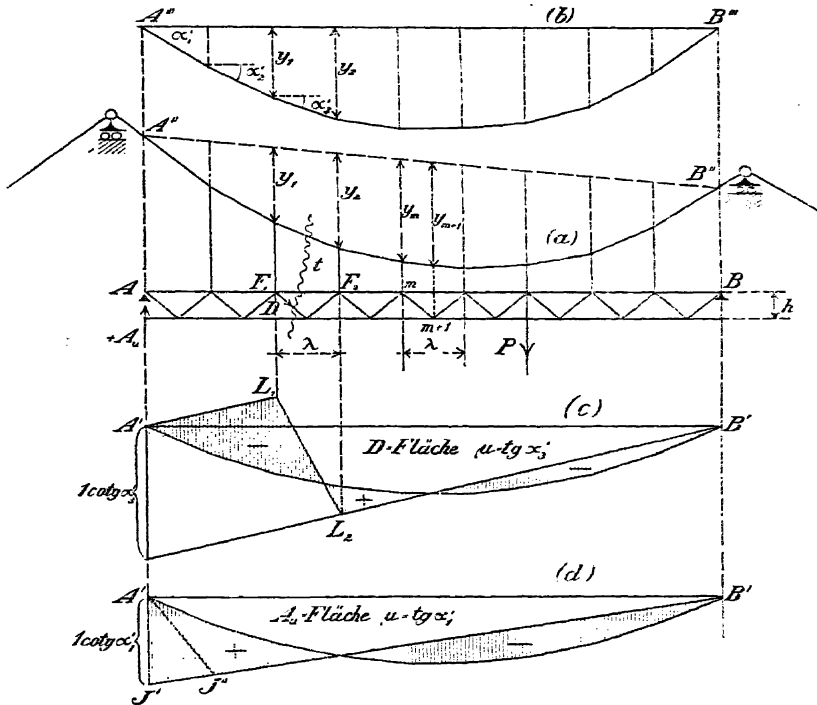



Fig. 283.

bezeichnet man die Neigungswinkel der auf diese Weise erhaltenen neuen Kettenlinie mit α', so erhält man die Gleichung

$$(14) \qquad Q = Q_o - H \operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} \alpha' (Q_o \operatorname{cotg} \alpha' - H),$$

welche dieselbe Form hat wie Gleichung (3) auf Seite 259; sie führt zu der in Figur 283[c] angegebenen Darstellungsweise der Q-Fläche. Figur 283[d] zeigt schliesslich die Einflussfläche für den Auflagerdruck A_u, unter der Voraussetzung dass bei A ein Querträger angeordnet ist; sie gilt für Träger beliebiger Gurtform und folgt ohne weiteres daraus,

dass dem Balkenquerschnitte A die Querkraft $Q = A_u$ entspricht. Fehlt der Endquerträger, wird also der erste Zwischenträger unmittelbar auf das Widerlager gelegt, so ist das Dreieck $A'J'B'$ durch das Dreieck $A'J''B'$ zu ersetzen.*)

102. Formeln für den gleichmässig belasteten Versteifungsbalken mit parallelen Gurtungen. Wird die statische Berechnung auf Grund der stets zulässigen Annahme durchgeführt, es liegen die Knoten der Kette in einer Parabel, deren Gleichung $y = \frac{4fx(l-x)}{l^2}$ ist, Fig. 281, und wird ferner die auf Seite 283 abgeleitete parabelförmige H-Linie benutzt, so lassen sich die von einer gleichförmigen Belastung verursachten Momente M und Querkräfte Q auch schnell durch Rechnung bestimmen. Die bezüglichen Formeln und Regeln sollen hier zusammengestellt werden; sie werden in ähnlicher Weise entwickelt, wie die auf Seite 254—255 und 266—268 für den Zweigelenkbogen bezw. den versteiften Stabbogen hergeleiteten Gesetze.

1. *Kette und Hängestangen.* Es möge der allgemeinere Fall vorausgesetzt werden, dass nur ein Theil (g_v) der ständigen Belastung g *vor* Ausführung der Versteifung aufgebracht werde, der Rest $g_n = g - g_v$ hingegen erst *nach* Vollendung des Balkens. Die Belastung g_v erzeugt: $H_1 = \frac{g_v l^2}{8f}$**), während g_n nur $H_2 = \frac{g_n l^2 \nu}{8f}$ hervorbringt. In Folge gänzlicher gleichförmiger Belastung des Balkens mit p entsteht $H_p = \frac{pl^2\nu}{8f}$ und in Folge einer Erniedrigung der Aufstellungstemperatur $H_t = + \varepsilon E F_k t (1 - \nu)$, weshalb der Grösstwerth von H:

$$H_{max} = \frac{l^2}{8f}[g_v + (g_n + p)\nu] + \varepsilon E F_k t (1 - \nu) \tag{15}$$

ist. Die grösste Spannkraft in einem unter α geneigten Gliede der Kette ist nun

$$S_{max} = H_{max} \sec \alpha \tag{16}$$

und die grösste Spannkraft in einer Hängestange:

$$Z_{max} = H_{max}(\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1}) = H_{max} \frac{8f\lambda}{l^2}. \tag{17}$$

2. *Momente und Querkräfte des gänzlich belasteten Balkens.* Ist der ganze Balken mit p für die Längeneinheit belastet, so entsteht an der Stelle x das Moment

$$M_p = \frac{px(l-x)}{2} - H_p y = \frac{px(l-x)}{2} - \frac{pl^2}{8f}\nu \cdot \frac{4fx(l-x)}{l^2}, \text{ d. i.}$$

$$M_p = \frac{px(l-x)}{2}(1 - \nu) \tag{18}$$

---

*) Die Auflager des Versteifungsbalkens und des ersten Zwischenträgers sind bündig liegend angenommen.

**) Wir vernachlässigen hier den Umstand, dass die Stützweite der Kette in der Regel etwas grösser ist, als die des Balkens.

und im Felde $F_1 F_2$ (Fig. 287), dessen Mitte von der Trägermitte den Abstand x'' haben möge, die Querkraft:

$$Q_p = \frac{pl}{2} - px - H_p \operatorname{tg} \alpha'' = px'' - \frac{pl^2 \nu}{8f} \operatorname{tg} \alpha''.$$

Der Winkel α'', den das Kettenglied des fraglichen Feldes mit der vorerst in eine wagerechte Lage gebrachten Schlusslinie $A''B''$ bildet, ist ebenso gross, wie der Neigungswinkel einer an der Stelle x an die Parabel vom Pfeile f gelegten Tangente, weshalb

$$\operatorname{tg} \alpha'' = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2}(l - 2x) = \frac{8f}{l^2}\left(\frac{l}{2} - x\right) = \frac{8f}{l^2} x''$$

und

$$Q_p = px''(1 - \nu). \tag{19}$$

M_p und Q_p sind also ebenso gross wie Moment bezieh. Querkraft für den Querschnitt x eines nicht an der Kette hängenden, nur bei A und B aufliegenden Balkens, der gleichmässig bei $p(1 - \nu)$ für die Längeneinheit belastet ist.

Den Einfluss M_g bezieh. Q_g der ständigen Belastung erhält man, indem man p durch g_n ersetzt.

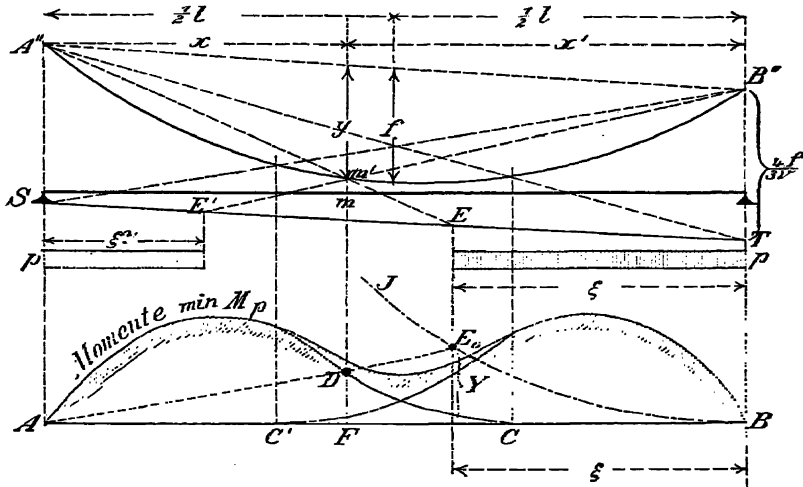



Fig. 284.

3. *Grenzwerthe der Momente in Folge der beweglichen Belastung.* Um das Moment ${}_{min}M_{pm}$ für einen (oberen oder unteren) Knoten m an der Stelle x zu bestimmen (Fig. 284, in welcher der Parallelträger durch eine Gerade ersetzt ist) mache man $B''T = \frac{4f}{3\nu}$, ziehe $TS \parallel B''A''$, lege durch den Kettenpunkt m' (senkrecht über m) die Geraden $A''E$ und $B''E'$ und belaste den Balken rechts von E und links von E'. Es entsteht dann (vergl. Seite 255):

(20) $$_{min}M_p = -\frac{p y \nu}{8 f l}(\xi^3 + \xi'^3),$$

während die Belastung der positiven Beitragsstrecke EE' hervorbringt:

(21) $$_{max}M_p = +\frac{p y \nu}{8 f l}(\xi^3 + \xi'^3) + \frac{p x (l - x)}{2}(1 - \nu),$$

weil $_{min}M_p + _{max}M_p = M_p$ ist.

Die Ergebnisse der Gleich. (20) lassen sich auch recht übersichtlich wie folgt durch Zeichnung darstellen. Man trage von der Geraden AB (Fig. 284) aus eine kubische Parabel BJ auf, deren Gleichung

$$Y = \frac{p \xi^3}{6 l}$$

ist, und verbinde den lothrecht unter E liegenden Punkt E_0 dieser Parabel mit A. Die Gerade AE_0 schneidet dann auf der Lothrechten durch m die Strecke

$$\overline{FD} = Y \frac{y}{\frac{4f}{3\nu}} = \frac{p y \nu \xi^3}{8 f l} \text{ (absolut genommen)}$$

ab, und es ist deshalb D ein Punkt der $_{min}M_p$-Linie, zunächst allerdings unter der Voraussetzung, dass nur *eine* Belastungsscheide E in Betracht kommt. Bestimmt man aber die Punkte D für alle Querschnitte, die zwischen A und der Stelle C liegen, welcher $\xi = 0$ entspricht, zeichnet dann das Spiegelbild $C'B$ der so erhaltenen Kurve und addirt schliesslich zwischen C' und C die Ordinaten beider Kurven, so erhält man die endgültige $_{min}M_p$-Linie. Dieselbe wurde in Fig. 284 durch Schraffirung hervorgehoben. Behufs Aufzeichnung der kubischen Hilfsparabel berechne man für irgend eine Abscisse ξ_1 die Ordinate $Y_1 = \frac{p \xi_1^3}{6 l}$ und bringe dann die Gleichung der Parabel auf die Form: $Y = Y_1 \frac{\xi^3}{\xi_1^3}$. Eine bequeme Konstruktion dieses Ausdrucks ist in der ohne weiteres verständlichen Fig. 285 angegeben; die Geraden LM und NO sind parallel zur Abscissenachse.

Fig. 285.

Die Ordinaten Y wachsen sehr schnell, weshalb es sich empfiehlt, ξ_1 nicht grösser anzunehmen, als gerade erforderlich, damit die Zeichnung nicht zu viel Raum beansprucht. Am besten ist es, die Punkte der kubischen Parabel nur für diejenigen Querschnitte zu bestimmen, für welche die Momente gesucht werden. Man vergleiche das auf Tafel 5 durchgeführte Beispiel.

Will man die Momente rechnen, so setze man (indem man zunächst nur die Belastungsscheide E berücksichtigt):

$$_{min}M_p = -\frac{p y \nu \xi^3}{8 f l}.$$

und beachte, dass $y = \frac{4fx(l-x)}{l^2}$, ferner

$$(l - \xi) : x = \frac{4f}{3\nu} : y$$

ist. Man erhält dann für die Kurve ADC (Fig. 284) die Gleichung

$$(22) \qquad {}_{min}M_p = -\frac{px[3\nu x' - l]^3}{54\nu^2 x'^2},$$

Fig. 286.

worin $x' = l - x$ ist. Die Berücksichtigung der zweiten Belastungsscheide erfolgt in derselben Weise wie beim zeichnerischen Verfahren. Der Punkt C (Fig. 284) liegt bei $x = l - \frac{l}{3\nu}$ und der Punkt C' bei $x = \frac{l}{3\nu}$.

4. *Die Momente M_t in Folge einer Temperaturänderung* sind:

$$(23) \qquad M_t = \mp H_t y = \mp \frac{8H_t f}{l^2} \frac{x(l-x)}{2};$$

sie sind ebenso gross wie die Momente eines nicht an der Kette hängenden einfachen Balkens AB, welcher gleichmässig mit $\mp \frac{8H_t f}{l^2}$ für die Längeneinheit belastet ist.

5. *Die Gesammtmomente:*

$$\begin{aligned} {}_{min}M &= {}_{min}M_p - H_t y + M_g \\ {}_{max}M &= {}_{max}M_p + H_t y + M_g \\ &= -{}_{min}M_p + M_p + H_t y + M_g \end{aligned}$$

lassen sich nun sehr übersichtlich wie folgt darstellen.

Man zeichne zuerst die Linie $ADSB$, deren Ordinaten die grössten negativen Momente ${}_{min}M_p$ angeben, und addire hierzu die Ordinaten einer Parabel AS_1B von der Pfeilhöhe

$$\overline{S_1 J} = -H_t f + \frac{g_n l^2}{8f}(1 - \nu).$$

Je nachdem $H_t f \gtrless \frac{g_n l^2}{8f}(1 - \nu)$ ist, wird diese Parabel unterhalb oder oberhalb der AB aufgetragen; ihre Ordinate an der Stelle x ist

$$\overline{ED_1} = -H_t y + g_n \frac{x(l-x)}{2}(1 - \nu) = -H_t y + M_g$$

und es ergiebt sich daher: ${}_{min}M = -\overline{DD_1}$.

Jetzt zeichnet man eine zweite Parabel AS_2B, welche die Pfeilhöhe

$$\overline{S_2 J} = H_t f + (p + g_n)\frac{l^2}{8f}(1 - \nu)$$

hat und deren Ordinate an der Stelle x

$$\overline{ED_2} = H_t y + (p + g_n)\frac{x(l-x)}{2}(1-\nu) = H_t y + M_p + M_g$$

ist, weshalb man ${}_{max}M = + \overline{DD_2}$ erhält.

6. *Das grösste aller Balken-Momente* entsteht sehr nahe der Stelle $x = \frac{1}{4} l$. Es kommt dort nur *eine* Belastungsscheide in Betracht, und es ist daher (wegen $y = \frac{3}{4} f$):

$$\begin{aligned} {}_{max}M &= {}_{max}M_p + M_g + H_t y = - {}_{min}M_p + M_p + M_g + \frac{3 H_t f}{4} \\ &= \frac{p x [3\nu x' - l]^3}{54 \nu^2 x'^2} + \frac{p x x'}{2}(1-\nu) + \frac{g_n x x'}{2}(1-\nu) + \frac{3 H_t f}{4}. \end{aligned}$$

Mit $x = \frac{1}{4} l$ und $x' = \frac{3}{4} l$ geht dieser Werth über in

$$M = \frac{3 p l^2}{32 \nu^2}\left(\nu - \frac{4}{9}\right)^3 + \frac{3}{32}(p + g_n) l^2 (1-\nu) + \frac{3}{4} H_t f. \tag{24}$$

Für den Gurtquerschnitt des Versteifungsbalkens ergiebt sich nun an der betrachteten Stelle der Werth

$$F = \frac{M}{h\sigma},$$

wo σ die zulässige Spannung bedeutet. *Es empfiehlt sich, den auf diese Weise gefundenen Querschnitt der Berechnung der Ziffer ν zu Grunde zu legen, weil die Momente mit abnehmendem ν wachsen und es deshalb rathsam ist, den Werth ν eher etwas zu klein als zu gross zu nehmen.* Wir setzen daher:

$$F_c = \frac{3 l^2}{32 h\sigma}\left[\frac{p}{\nu^2}\left(\nu - \frac{4}{9}\right)^3 + (p + g_n)(1-\nu)\right] + \frac{3 H_t f}{4 h \sigma}. \tag{25}$$

7. *Grenzwerthe der Querkräfte in Folge der beweglichen Belastung.* Nachdem die Schlusslinie $A''B''$ in wagerechte Lage gebracht worden ist (Fig. 283 u. 287), wird im Abstande $\overline{S'B''} = 4f : 3\nu$ die Wagerechte SS' eingetragen.*) Hierauf wird, behufs Ermittelung der Querkraft ${}_{max}Q_p$ des Feldes $F_1 F_2$, durch A'' eine Parallele zu dem Kettengliede $F'F''$ gezogen, der Schnittpunkt E dieser Geraden mit SS' bestimmt und (vorausgesetzt dass E links von B'' liegt) der Balken zwischen E und der Feldmitte belastet. Für diesen Belastungszustand werden nun mit Hilfe der zweiten A-Linie und der zweiten H-Linie die Werthe A und H dargestellt und dann wird gefunden:

$${}_{max}Q_p = A - H \operatorname{tg} \alpha'', \tag{26}$$

wo α'' den Winkel bedeutet, welchen $F'F''$ mit der Wagerechten einschliesst. Die zweite A-Linie ist eine Parabel, deren Scheitel bei B_0 liegt, und die zweite H-Linie wird in derselben Weise bestimmt wie beim Bogen mit zwei Gelenken (Gleich. 46, Seite 252); nur mit dem Unterschiede, dass ν einen anderen Werth annimmt. Vergleiche auch die auf Seite 253 gelöste Aufgabe.

*) Damit Figur 287 recht deutlich werde, nahmen wir die Balkenachse zusammenfallend mit der Geraden SS' an.

Liegt E rechts von B_0, so wird der Balken von der Mitte des Feldes $F_1 F_2$ bis B belastet.

Zur Berechnung von ${}_{min}Q_p$ dient schliesslich die Gleichung

(27) $${}_{min}Q_p + {}_{max}Q_p = Q_p = p x'' (1 - \nu).$$

Ein zweites Verfahren, ${}_{max}Q_p$ zu ermitteln, ist auf Seite 269 und 270 erläutert worden; dasselbe setzt gleiche Feldweiten und feste Werthe der Knotenlasten voraus; und ein drittes Verfahren, ebenfalls für gleichlange Felder und feste Knotenlasten, ergiebt sich wie folgt:

Belastet man r Knotenpunkte, von B aus gezählt, Fig. 288, mit je $p\lambda$, so entsteht

(28) $$A_r = \frac{p r \lambda (r+1) \lambda}{2l}$$

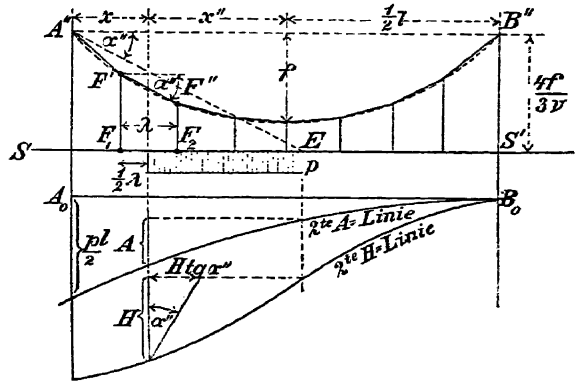



Fig. 287.

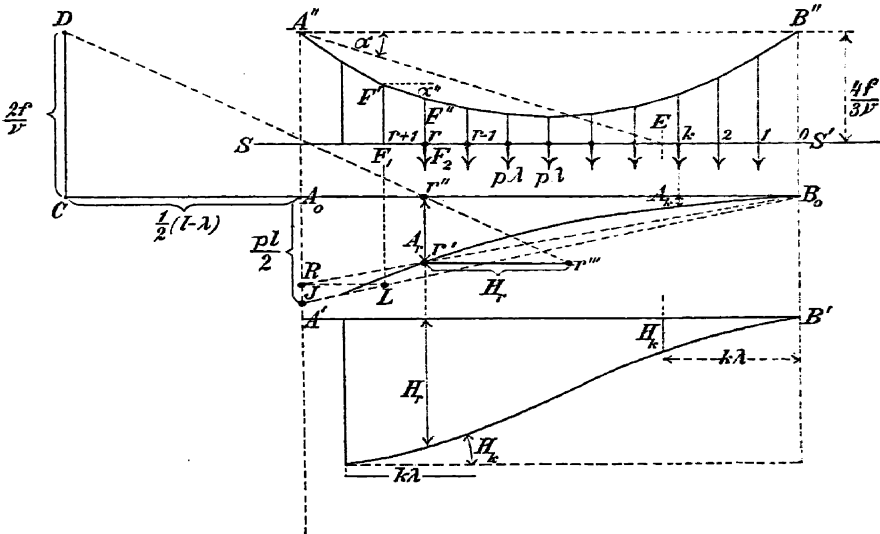



Fig. 288.

und (nach der Formel 9, Seite 283, mit $l = n\lambda$):

(29) $$\begin{cases} H_r = \dfrac{3 p \lambda \nu}{4 f l} \left[1(n-1) + 2(n-2) + 3(n-3) + \ldots + r(n-r) \right] \lambda^2 \\ \quad = \dfrac{p \lambda^3 \nu}{8 f l} r (r+1)(3n - 2r - 1), \end{cases}$$

wofür man mit Rücksicht auf Gleich. 28 auch schreiben darf

$$H_r = A_r \frac{1,5\,l - 0,5\,\lambda - r\lambda}{2f}\,\nu. \tag{30}$$

Zur zeichnerischen Bestimmung der Werthe A_r und H_r mache man (nach Fig. 288) $\overline{A_0 J} = \frac{pl}{2}$, bestimme senkrecht unter $r+1$ auf der Geraden $B_0 J$ den Punkt L, ziehe $LR \parallel A_0 B_0$ und verbinde R mit B_0. Die Geraden $B_0 A_0$ und $B_0 R$ schneiden auf der Senkrechten durch r die Kraft $\overline{r'' r'} = A_r$ ab.

Verlängert man jetzt $B_0 A_0$ um $A_0 C = 0,5\,(l-\lambda)$, macht $CD = 2f : \nu$ und bringt die Gerade Dr'' mit der Wagerechten durch r' in r''' zum Schnitt, so erhält man $r' r''' = H_r$, welcher Werth nun von einer Wagerechten $A'B'$ aus als Ordinate aufgetragen wird.

Soll nun die Querkraft ${}_{max}Q_p$ für das Feld $F_1 F_2$ bestimmt werden, so suche man mit Hilfe von $A''E \parallel F'F''$ die Belastungsscheide E auf und nehme nur die zwischen E und dem Schnitte tt gelegenen Knoten belastet an. Es seien dies die Knoten r, $(r-1)$, ... k. Dann entsteht

$$A = A_r - A_k; \quad H = H_r - H_k; \quad {}_{max}Q_p = A - H \operatorname{tg} \alpha''.^{*)}$$

8. *Die Querkräfte Q_t in Folge einer Temperaturänderung* sind

$$Q_t = \mp H_t \operatorname{tg} \alpha'' = \mp \frac{8fH_t}{l^2}\,x'';$$

sie sind ebenso gross wie die Querkräfte eines nicht an der Kette hängenden einfachen Balkens AB, welcher gleichmässig mit $\mp \frac{8fH_t}{l^2}$ f. d. Längeneinheit belastet ist.

9. *Die Gesammtquerkräfte:*

$$
\begin{aligned}
{}_{max}Q &= {}_{max}Q_p + \frac{8fH_t}{l^2}\,x'' + Q_g{}^{**)}\\
{}_{min}Q &= {}_{min}Q_p - \frac{8fH_t}{l^2}\,x'' + Q_g\\
&= -\,{}_{max}Q_p + Q_p - \frac{8fH_t}{l^2}\,x'' + Q_g
\end{aligned}
$$

lassen sich jetzt übersichtlich wie folgt darstellen.

Man trage von der Wagerechten $A'B'$ aus (Fig. 289) die Querkräfte ${}_{max}Q_p$ auf und addire zu denselben die Querkräfte eines gleichmässig mit $g_n(1-\nu) + \frac{8fH_t}{l^2}$ für die Längeneinheit belasteten Balkens, welche letztere in bekannter Weise mittels einer Geraden $J_1 M$ gewonnen werden, wobei $A'M = \frac{1}{2}\,l$ und $\overline{J_1 A'} = g_n(1-\nu)\frac{l}{2} + \frac{4fH_t}{l}$ ist. Das Ergebniss ist:

$${}_{max}Q_p + \overline{A'J_1}\,\frac{x''}{0,5\,l} = {}_{max}Q_p + \frac{8fH_t}{l^2}\,x'' + g_n(1-\nu)\,x'' = {}_{max}Q.$$

---

*) Dieses Verfahren lässt sich selbstverständlich auch beim Zweigelenkbogen mit annähernd konstanter Höhe h, sowie bei dem im vorigen § behandelten Versteifungsbalken mit parallelen Gurtungen anwenden.

**) H_t sei der absolute Werth des Horizontalzuges in Folge einer Temperaturänderung.

Ersetzt man die Gerade $J_1 M$ durch die mit Hilfe von

$$\overline{A'J_2} = \frac{4fH_t}{l} - (g_n + p)(1 - \nu)\frac{l}{2}$$

bestimmte Gerade $J_2 M$, so erhält man:

$$_{max}Q_p + \overline{A'J_2}\frac{x''}{0{,}5\,l} = {}_{max}Q_p + \frac{8fH_t}{l^2}x'' - p(1-\nu)x'' - g(1-\nu)x''$$

$$= {}_{max}Q_p + \frac{8fH_t}{l^2}x'' - Q_p - Q_g = -{}_{min}Q.$$

Innerhalb eines Feldes hat Q einen festen Werth.

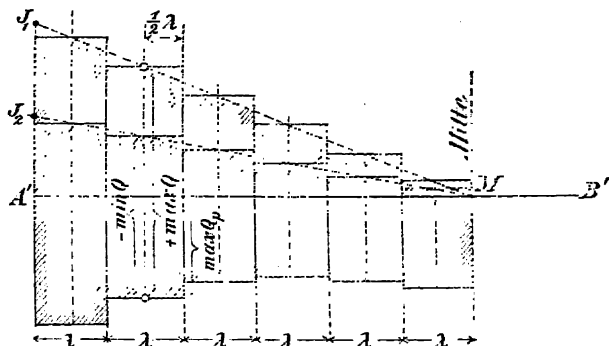



Fig. 289.

103. ***Zahlenbeispiel*** (Tafel 5). Es soll eine versteifte Kettenbrücke mit folgenden Abmessungen berechnet werden:

Stützweite der Kette $l_1 = 75^m$, des Balkens $l = 72^m$; Pfeil der Kette, gemessen bis zur Schlusslinie $f = 9{,}0^m$ (f_1 = rund $9{,}7^m$); Länge der unter $\alpha' = 35°$ geneigten Rückhaltkette $s' = 27^m$; Höhe des Versteifungsbalkens $h = 2{,}0^m$; Feldweite $\lambda = 3^m$.

Die ständige Belastung für jede der beiden die Brückenbahn stützenden Hauptträger sei $g = 2{,}8^t$ f. d. Meter, die bewegliche $p = 1{,}5^t$. Es sei in Aussicht genommen, die Brücke zuerst unversteift auszuführen (vergl. Seite 279), weshalb $g_v = g = 2{,}8^t$ und $g_n = 0$. Die Temperaturänderung sei $t = \pm 40°$ Cels.

1. *Abschätzung des Querschnittsverhältnisses* $F_c : F_k$ (F_c = Gurtquerschnitt des Balkens, F_k = Querschnitt der Kette im Scheitel) behufs Berechnung der Ziffer ν. Es ist

$$\frac{s_0}{l} = \frac{l_1}{l}\left[1 + \frac{16}{3}\frac{f_1^2}{l_1^2} + 2\frac{s'}{l}\sec\alpha'\right] = 2{,}09 \text{ und}$$

$$\nu = \frac{1}{1 + \frac{15}{16}\frac{h^2}{f^2}\frac{s_0}{l}\cdot\frac{F_c}{F_k}} = \frac{1}{1 + 0{,}0968\frac{F_c}{F_k}}.$$

Schätzt man zuerst $F_c : F_k = 0{,}40$ bis $0{,}45$, so erhält man $\nu = 0{,}962$ bis $\nu = 0{,}957$, also rund $\nu = 0{,}96$. Aus der Formel

$$\sigma F_k = H_{max} = \frac{l^2}{8f}[g_v + (g_n + p)\nu] + \varepsilon E F_k t(1 - \nu)$$

folgt nun der erforderliche Ketten-Querschnitt im Scheitel

$$F_k = \frac{l^2 [g_v + (g_n + p)\, \nu]}{8f\, [\sigma - \varepsilon E t\, (1 - \nu)]}$$

und, wenn für eine schmiedeeiserne Flacheisenkette die Beanspruchung

$$\sigma = 1000^k \text{ f. d. } qcm = 10000^t \text{ f. d. } qm$$

zugelassen und $\varepsilon E = 240^t$ f. d. qm gesetzt wird:

$$F_k = \frac{72^2\, (2{,}8 + 1{,}5 \cdot 0{,}96)}{8 \cdot 9\, [10000 - 240 \cdot 40 \cdot 0{,}04]} = 0{,}0317 \ qm.$$

Der Neigungswinkel α der äussersten Glieder der parabelförmig gerechneten Kette ist durch

$$\sec \alpha_1 = \sqrt{1 + \frac{4f^2}{l^2}} = \sqrt{1 + \frac{4}{16}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

bestimmt, und es muss daher der Kettenquerschnitt bis zu $F_k \sec \alpha_1 = \frac{0{,}0317}{2}\sqrt{5}$ $= 0{,}0356\ qm$ anwachsen. Im vorliegenden Falle empfiehlt es sich, der Kette den überall gleichen Querschnitt 0,0356 qm zu geben, also auch $F_k = 0{,}0356$ zu setzen.

Nun ergiebt sich der Horizontalzug in Folge der Temperaturänderung:

$$H_t = \varepsilon E F_k t\, (1 - \nu) = 240 \cdot 0{,}0356 \cdot 40 \cdot 0{,}04 = 13{,}7^t$$

und der Gurtquerschnitt des Balkens nach Gleich. 25 (wegen $g_n = 0$):

$$F_c = \frac{3 l^2 p}{32 h \sigma} \left[\frac{1}{\nu^2}\left(\nu - \frac{4}{9}\right)^3 + (1 - \nu)\right] + \frac{3 H_t f}{4 h \sigma}.$$

Wird $\sigma = 750^k$ f. d. $qcm = 7500^t$ f. d. qm gestattet, so folgt:

$$F_c = \frac{3 \cdot 72^2 \cdot 1{,}5}{32 \cdot 2{,}0 \cdot 7500} \left[\frac{1}{0{,}96^2}\left(0{,}96 - \frac{4}{9}\right)^3 + 0{,}04\right] + \frac{3 \cdot 13{,}7 \cdot 9{,}0}{4 \cdot 2{,}0 \cdot 7500} = 0{,}0154.$$

Hiernach ist:

$$\frac{F_c}{F_k} = \frac{0{,}0154}{0{,}0356} = 0{,}433 \text{ und } \nu = \frac{1}{1 + 0{,}0968 \cdot 0{,}433} = 0{,}9598,$$

also rund $\nu = 0{,}96$, übereinstimmend mit dem zuerst gefundenen Werthe von ν. Eine Wiederholung der Rechnung ist daher nicht erforderlich, und es darf die Untersuchung des Versteifungsbalkens mit $\nu = 0{,}96$ durchgeführt werden.

Der grösste Horizontalzug der Kette ist

$$_{max}H = \frac{l^2}{8f}(g + p\nu) + H_t = \frac{72^2}{8 \cdot 9{,}0}(2{,}8 + 1{,}5 \cdot 0{,}96) + 13{,}7 = 319^t$$

und der grösste Zug in einer Hängestange:

$$_{max}Z = H_{max}(\operatorname{tg}\alpha_m - \operatorname{tg}\alpha_{m+1}) = H_{max}\frac{8f\lambda}{l^2} = 319\,\frac{8 \cdot 9{,}0 \cdot 3{,}0}{72^2} = 14^t.$$

Für die Rückhaltkette erhält man:

$$S_{max} = H_{max} \sec 35^\circ = 389^t,$$

und der Druck auf den Kettenpfeiler ist:

$$H_{max}(\operatorname{tg} 35^\circ + \operatorname{tg}\alpha_1)^{*)} = 319\,[0{,}7 + 0{,}5] = 383^t.$$

---

*) Genügend genau ist $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{4f}{l}$.

2. *Spannkräfte in den Gurtungen*, Fig. 290. Die zur Ermittelung der Belastungsscheiden dienende Wagerechte SS' liegt im Abstande

$$\frac{4f}{3\nu} = \frac{4 \cdot 9,0}{3 \cdot 0,56} = 12,5^m$$

von der $A''B''$; ihre Schnittpunkte 1_0, 2_0, 3_0, ... mit den Geraden $A''1'$, $A''2'$, $A''3'$, ... bestimmen die den Knotenpunkten 1, 2, 3, ... entsprechenden Belastungsscheiden. In Fig. 290 wurde die Kette parabolisch angenommen. Auf der Senkrechten durch B'' wurde die Strecke $B''0'' = 4f = 36^m$ aufgetragen und in 24 gleiche Theile zerlegt. Die von den Theilpunkten $1''$, $2''$, $3''$, ... nach A'' gezogenen Strahlen schneiden dann die Senkrechten durch 1, 2, 3, ... in den Kettenpunkten $1'$, $2'$, $3'$ ... und die Geraden SS' in den Punkten 1_0, 2_0, 3_0, ...

Die Werthe $\frac{M}{h}$ wurden nach dem auf Seite 289 bis 291 zur Ermittelung der Momente M benutzten Verfahren bestimmt. Punkt 1_0 liegt im Abstande $\xi_1 = 45,91^m$ von der Senkrechten $B''B'$ und es ist daher die zugehörige Ordinate der nach Fig. 285, Seite 290 aufzutragenden kubischen Hilfsparabel:

$$\frac{p\,\xi_1^3}{6lh} = \frac{1,5 \cdot 45,91^3}{6 \cdot 72 \cdot 2,0} = 168,0 \text{ Tonnen.}$$

Die Pfeilhöhen der gemeinen Parabeln $A'L_1B'$ und $A'L_2B'$ sind (wegen $g_n = 0$), bezw.

$$\frac{H_t f}{h} = \frac{13,7 \cdot 9,0}{2,0} = 61,65 \text{ Tonnen} = \text{rund } 62 \text{ Tonnen}$$

und

$$\frac{H_t f}{h} + \frac{pl^2}{8h}(1 - \nu) = 61,65 + \frac{1,5 \cdot 72^2 \cdot 0,04}{8 \cdot 2,0} = \text{rund } 81 \text{ Tonnen.}$$

Die Zeichnung liefert für die Knoten 1, 2, 3, ... 12:

$$_{max}\frac{M}{h} = +32;\ +59;\ +80;\ +97;\ +108;\ +115;\ +118;\ +118;\ +115;$$
$$+111;\ +109;\ +108 \text{ Tonnen}$$

$$_{min}\frac{M}{h} = -29;\ -53;\ -72;\ -86;\ -95;\ -101;\ -102;\ -101;\ -97;$$
$$-93;\ -90;\ -89 \text{ Tonnen.}$$

Durch diese Werthe sind die in Fig. 293 zusammengestellten Spannkräfte in den Gurtungen bestimmt.

3. *Spannkräfte D in den Diagonalen.* In einer unter dem Winkel φ gegen die Wagerechte geneigten Diagonale entsteht die Spannkraft

$$D = \pm \frac{Q}{\sin\varphi},$$

wo Q die Querkraft für das fragliche Feld bedeutet. Das obere Vorzeichen gilt für eine linkssteigende, das untere für eine rechtssteigende Diagonale. Da φ für sämmtliche Diagonalen gleich gross ist $\left(\frac{1}{\sin\varphi} = 1,8028\right)$, so wurden an Stelle der Querkräfte Q sofort die Werthe $Q' = \frac{Q}{\sin\varphi}$ dargestellt und zwar nach dem auf Seite 293, Fig. 288 und 289 für die Ermittelung der Kräfte Q angegebenen Verfahren. Hiernach sind die Ordinaten der für feste Knotenlasten $p\lambda$ aufgetragenen zweiten $(A : \sin\varphi)$-Linie durch die Strecke

$$\overline{A_0 J} = \frac{pl}{2 \sin \varphi} = \frac{1,5 \cdot 72 \cdot 1,8028}{2} = 97,35^t$$

bestimmt. Die Ordinaten der zweiten ($H : \sin \varphi$)-Linie wurden nach Festlegung des Punktes D [mittels $\overline{A_0 C} = \frac{1}{2}(l - \lambda) = \frac{1}{2}(72 - 3) = 34,50^m$ und $\overline{CD} = \frac{2f}{\nu} = \frac{2 \cdot 9,0}{0,96} = 18,75^m$] auf die früher beschriebene Weise (Fig. 288) aus den Werthen $A : \sin \varphi$ hergeleitet; die Hilfslinien sind grösstentheils wieder ausgelöscht worden. Für $A : \sin \varphi$ und $H : \sin \varphi$ wurden auf Tafel 5 die kürzeren Zeichen A' bezw. H' eingeführt.

Wird nun beispielsweise $_{max}Q_p'$ für das dritte Feld gesucht, so zieht man von A'' aus zu dem Kettengliede III eine Parallele, bringt diese mit der Wagerechten SS' in III_0 zum Schnitt und erhält in der Senkrechten durch III_0 eine Belastungsscheide.*) Hierauf nimmt man die zwischen dem fraglichen Felde und III_0 gelegenen Knotenpunkte 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 mit je $p\lambda$ belastet an und findet für diesen Zustand:

$$\frac{A}{\sin \varphi} = A_3' - A_{11}'; \quad \frac{H}{\sin \varphi} = H_3' - H_{11}', \text{ mithin}$$

$$_{max}Q_p' = (A_3' - A_{11}') - (H_3' - H_{11}') \operatorname{tg} \alpha_3.$$

Der Kürze wegen haben wir auf Tafel 5 den Werth $A_3' - A_{11}'$ mit A_{III} bezeichnet und den Werth $(H_3' - H_{11}') \operatorname{tg} \alpha_3$ mit T_{III}. Die letztere Kraft ist mittels der zum Kettengliede III rechtwinkligen Geraden III' bestimmt worden.

Auf dieselbe Weise wurde die Kraft $_{max}Q_p'$ für alle Felder der linken Balkenhälfte in der Form dargestellt:

$$_{max}Q'_{pI} = A_I - T_I; \quad _{max}Q'_{pII} = A_{II} - T_{II}; \text{ u. s. w.}$$

wobei zu beachten ist, dass nur den Feldern I bis $VIII$ Belastungsscheiden $I_0, \ldots VIII_0$ entsprechen. Für das IXte Feld entsteht $_{max}Q_p'$, sobald sämmtliche rechts von diesem Felde gelegenen Knoten belastet sind, weshalb $A_{IX} = A_9'$ und $T_{IX} = H_9' \operatorname{tg} \alpha_9$, und ebenso folgt $A_X = A_{10}'$, $T_X = H_{10}' \operatorname{tg} \alpha_{10}$ u. s. w.

Die so gewonnenen Kräfte $_{max}Q_p'$ sind in Fig. 292 im Maassstabe $1^{mm} = 1^t$ von der Geraden AM aus nach unten aufgetragen worden. Hierauf wurde die Gerade $J_1 M$ mittels

$$AJ_1 = \frac{4fH_t}{l \sin \varphi} = \frac{4 \cdot 9,0 \cdot 13,7}{72} \cdot 1,8028 = 12,35^t$$

festgelegt und für jedes Feld die Kraft $_{max}Q'$ nach dem auf Seite 294, Fig. 289, angegebenen Verfahren bestimmt.

Zur Ermittelung der $_{min}Q'$ müsste die Gerade $J_1 M$ durch eine Gerade $J_2 M$ (Fig. 289) ersetzt werden, wobei

$$AJ_2 = \frac{4fH_t}{l \sin \varphi} - p(1 - \nu) \frac{l}{2 \sin \varphi} = 11,96^t$$

zu machen wäre. Es unterscheiden sich aber die Ordinaten der Geraden $J_1 M$ und $J_2 M$ so wenig von einander, dass es im vorliegenden Falle erlaubt ist, $_{min}Q' = - {_{max}Q'}$ zu setzen.

---

*) Ist die Kette parabelförmig, so sind die von A'' aus nach den bereits in Fig. 290 benutzten Punkten 1″, 3″, 5″, 7″, ... gezogenen Geraden beziehungsweise parallel zu den Kettengliedern $I, II, III, IV, \ldots$

Die Ergebnisse lauten für die Felder 1, 2, 3, ... 12:

$$\left.\begin{matrix} max \\ min \end{matrix}\right\} Q' = \pm 39^t;\ 33^t;\ 29^t;\ 26^t;\ 24^t;\ 23^t;\ 23^t;\ 24^t;\ 25^t;\ 25^t;\ 25^t;\ 25^t.$$

Denselben entsprechen die in die Figur 293 eingeschriebenen Spannkräfte D.

Der Widerstand A am linken Auflager des Balkens ist, falls kein Endquerträger angeordnet wird:

$$A = D_1 \sin\varphi, \text{ woraus } {}_{max}A = +21{,}6^t;\ {}_{min}A = -21{,}6^t.$$

Der positive Widerstand ist nach oben gerichtet, der negative Werth A muss durch einen Anker aufgenommen werden.

Ist ein Endquerträger vorhanden, so entsteht

$${}_{max}A = 21{,}6 + \frac{p\lambda}{2} = 21{,}6 + \frac{1{,}5 \cdot 3{,}0}{2} = +24^t,$$

während ${}_{min}A$ den oben angegebenen Werth behält, weil bei der Belastung, welche ${}_{min}A$ erzeugt, der Knoten 0 unbelastet bleibt.

Wir empfehlen dem Leser, auf Grund der angegebenen Spannkräfte nunmehr die Längenänderungen sämmtlicher Stäbe zu berechnen, die genauere Einflusslinie für H als Biegungslinie für den Zustand $H = -1$ darzustellen und für einige Momente und Querkräfte die Einflussflächen abzuleiten. Diese schärfere Ermittelung der H-Linie erfolgt genau wie bei dem in No. 96 behandelten Zahlenbeispiele und es dürfte deshalb überflüssig sein, hier näher darauf einzugehen.

104. Der Stabbogen mit darüber liegendem Versteifungsbalken, Fig. 194, lässt sich als umgekehrte versteifte Kette deuten und mit Hilfe der im vorstehenden entwickelten Verfahren untersuchen. Die Glieder des Stabbogens und die senkrechten Zwischenstäbe werden natürlich auf *Druck* beansprucht; auch muss man zur Bestimmung der Punkte A'' und B'' die äussersten Glieder des Bogens über R bezieh. T hinaus verlängern. Endlich sind bei Berechnung des Horizontalschubes H mit Hilfe der für den Horizontalzug der Kette abgeleiteten Formeln die Längen s' und s'' der Rückhaltketten gleich Null zu setzen.

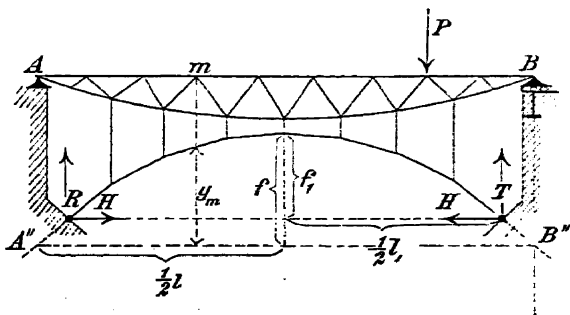



Fig. 294.

In Fig. 294 ist ein bei A und B auf den Pfeilern gelagerter Balken gezeichnet worden, in Fig. 295 ein an den Enden mit den Kämpfergelenken durch senkrechte Stäbe verbundenes Versteifungsfachwerk

Während das erstere Tragwerk Lasten beliebiger Richtung aufzunehmen vermag, ist letzteres nur senkrechten Lasten gewachsen. Damit es fähig werde, auch wagerechte Lasten auf die Pfeiler zu übertragen, lege man *einen* Knoten des Versteifungsbalkens auch im wagerechten Sinne fest, z. B. B in Fig. 295[a]. Führt man dagegen den Stabbogen bis an den Balken heran, Fig. 296, so erhält man ein Fachwerk, welches nur in den Punkten R und T gestützt zu werden braucht; dasselbe ist steif und einfach statisch unbestimmt.

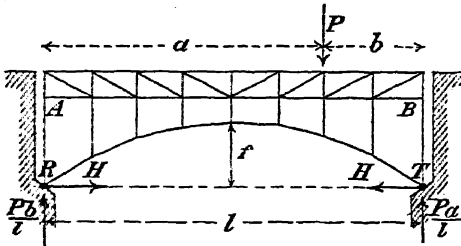
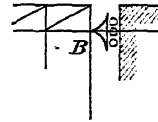



Fig. 295. Fig. 295 a.

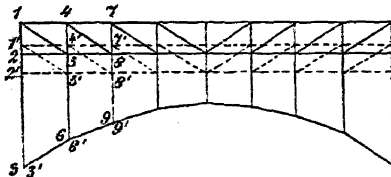
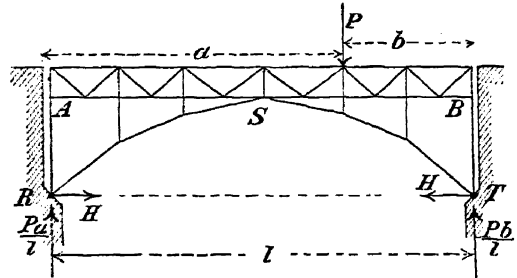



Fig. 295 b. Fig. 296.

Für den in Fig. 295 dargestellten Träger ist die Anzahl der Knotenpunkte $k = 27$, der Stäbe $s = 50$ und der Seitenkräfte der Stützenwiderstände $a = 4$,*) mithin

$$2\,k = s + a \quad \text{(d. h. } 54 = 50 + 4\text{)},$$

so dass man versucht sein könnte, den Träger für einen statisch bestimmten zu halten. Ein Blick auf die in Fig. 295[b] eingetragene Figur F' lehrt aber, dass hier ein bewegliches Stabgebilde vorliegt, ein Tragwerk, welches sich nur in gewissen Belastungsfällen als brauchbar erweist, dann aber statisch unbestimmt ist; und zwar ist leicht einzusehen, dass einer am Versteifungsbalken angreifenden wagerechten Last erst dann von den Spannkräften der

*) Wir erinnern daran, dass bei Ermittelung der Zahl a der Widerstand eines festen Auflagers in zwei Seitenkräfte zerlegt werden muss. Einem beweglichen Auflager entspricht $a = 1$.

anfänglich senkrecht stehenden Zwischenstäbe das Gleichgewicht gehalten werden kann, wenn diese Stäbe in Folge einer Verschiebung des Balkens eine geneigte Lage angenommen haben. Fällt der Stabbogen mit der Geraden RT zusammen ($f = 0$), so ist das Fachwerk ein solches von endlicher Beweglichkeit; Gleichgewicht ist in diesem Falle bei einer wagerechten Belastung des Versteifungsbalkens überhaupt nicht möglich. Sonst ist die Beweglichkeit — starre Stäbe vorausgesetzt — eine unendlich kleine, und es liegt einer der auf Seite 37 hervorgehobenen Ausnahmefälle vor.

Haben Stabbogen und Versteifungsbalken einen Knotenpunkt gemein und wird trotzdem das eine Balkenauflager fest gemacht (Fig. 297), so entsteht ein steifes, zweifach statisch unbestimmtes Fachwerk. Als statisch nicht bestimmbare Grössen führt man zweckmässig die wagerechten Auflagerwiderstände H_o und H_u ein; man berechne sie mit

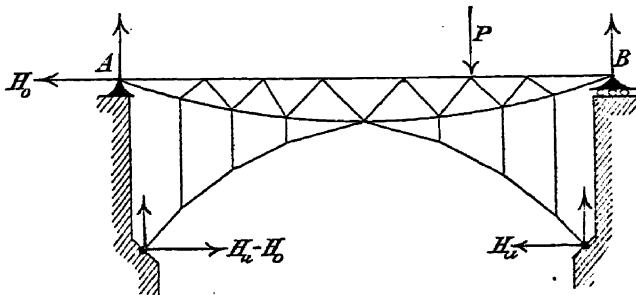



Fig 297.

Hilfe des im § 5 gelehrten allgemeinen Verfahrens und leite die Einflusslinie für H_o und H_u aus den Biegungslinien für die Zustände $H_o = -1$ und $H_u = -1$ ab.

Eine solche zweifache statische Unbestimmtheit entsteht natürlich auch, wenn eine der Hängestangen der in Fig. 278 dargestellten versteiften Kettenbrücke die Länge Null erhält; und man kann hieraus schon schliessen, dass im Falle sehr kurzer mittlerer Hängestangen die unter der Voraussetzung einer einfachen statischen Unbestimmtheit gewonnenen Ergebnisse nicht mehr ganz scharf sein können, eine Thatsache, die sich auch in der Weise erklären lässt, dass die Neigungswinkel sehr kurzer Stäbe schon bei einer geringen Formveränderung des Fachwerks sich wesentlich vergrössern oder verkleinern können, was dann zur Folge hat, dass die Annahme verschwindend kleiner Winkeländerungen nicht mehr zutrifft.

§ 10.

Einfach statisch unbestimmte Bogen- und Kettenbrücken mit mehreren Oeffnungen.

105. Die nächste Untersuchung beschäftigt sich mit einer Reihe *einfach statisch unbestimmter Bogen- und Kettenbrücken mit mehreren Oeffnungen,* deren Berechnung sich eng an die Untersuchungen der vorigen Paragraphen anschliesst. Als statisch nicht bestimmbare Grösse wird durchweg der Horizontalschub (bezieh. Horizontalzug) H eingeführt, und zur Ermittelung von H in Folge einer senkrechten, in m angreifenden Last P_m wird die Gleichung

$$H = P_m \frac{\delta_m'}{\Sigma S'^2 s \frac{F_c}{F}}$$

benutzt, wobei δ' die mit EF_c multiplicirte senkrechte Verschiebung bedeutet, welche m bei Eintreten des gedachten Belastungszustandes $H = -1$ erfahren würde, während S' die Stabkraft für den Zustand $H = -1$ ist. Die zu betrachtenden Tragwerke lassen sich in zwei Gruppen scheiden; bei den Gebilden der einen Gruppe besteht das statisch bestimmte Hauptnetz aus einer Reihe von *Einzelbalken,* während die anderen im Falle $H = 0$ in *Gerber'sche Balken* übergehen.

a. Das statisch bestimmte Hauptnetz besteht aus einer Folge von Einzelbalken.

106. Bogenbrücke mit mehreren Oeffnungen. Die über einem Mittelpfeiler zusammentreffenden Bögen erhalten dort ein gemeinschaftliches, auf wagerechter Bahn geführtes Kämpfergelenk, damit diese Pfeiler nur senkrechte Drücke erfahren. An den Enden sind feste Kämpfergelenke angeordnet, Fig. 298.

Liegen sämmtliche Gelenke in einer wagerechten Geraden, so sind die senkrechten Stützenwiderstände A, B, C unabhängig von H und ebenso gross, als bestände das Tragwerk aus einzelnen Balken AC_1, C_1C_2, . . . Man erhält z. B. für die in Fig. 298 angenommene Belastung:

$$A = P_1 \frac{b_1}{l_1}; \; C_1 = P_1 \frac{a_1}{l_1} + P_2 \frac{b_2}{l_2}; \; C_2 = P_2 \frac{a_2}{l_2} + P_3 \frac{b_3}{l_3}; \; B = \frac{P_3 a_3}{l_3}.$$

Um die H-Linie zu bestimmen, berechne man für jede einzelne Oeffnung die den Gewichten $w = \frac{ys}{r^2} \frac{F_c}{F}$ entsprechenden einfachen Balkenmomente M_w — *genau wie beim Zweigelenkbogen* (Seite 208) —

und dividire dieselben durch die über die Knotenpunkte *sämmtlicher* Oeffnungen auszudehnende Summe: $\Sigma z = \Sigma y w$. Man erhält für $P = 1$:

$$H = \frac{M_w}{\Sigma z}.$$

Aus der durchweg positiven H-Linie werden alle übrigen Einflusslinien ganz in derselben Weise abgeleitet wie beim Zweigelenkbogen.

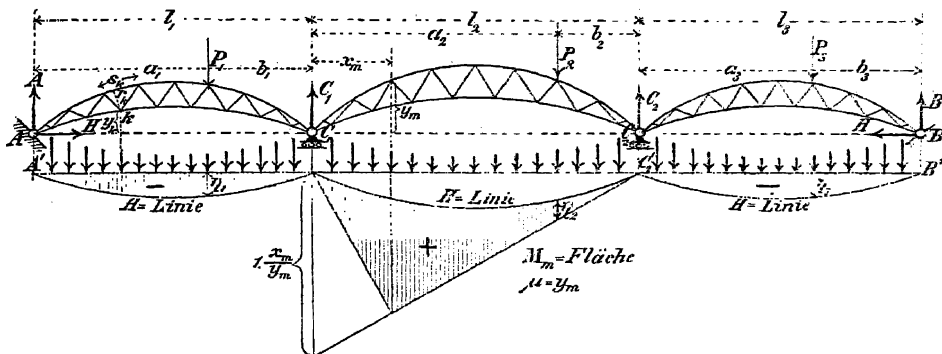



Fig. 298.

In Fig. 298 ist beispielsweise die M_m-Fläche für einen Knotenpunkt m der Mittelöffnung $C_1 C_2$ dargestellt worden; sie unterscheidet sich von der M_m-Fläche eines Zweigelenkbogens $C_1 C_2$ (abgesehen von den kleineren Ordinaten der H-Linie) nur dadurch, dass sie links von C_1 und rechts von C_2 einen aus den negativ zu nehmenden H-Flächen bestehenden Zuwachs erhält. Denn Lasten, welche ausserhalb der Oeffnung $C_1 C_2$ liegen, beeinflussen das zweite Glied des Ausdruckes

$$M_m = M_{om} - H y_m.$$

Für den in Folge einer gleichmässigen Zunahme der Anfangstemperatur um t° entstehenden Horizontalschub findet man (vgl. S. 212)

$$H_t = \frac{\varepsilon E t F_c \Sigma l}{\Sigma z_m},$$

wo Σl die Summe der Stützweiten sämmtlicher Oeffnungen bedeutet.

107. Kettenbrücke mit mehreren Oeffnungen. Der in No. 106 behandelten Bogenbrücke kann man die in Fig. 299 dargestellte, durch Einzelbalken versteifte Kettenbrücke an die Seite stellen. Behufs Ermittelung der H-Linie berechne man auch hier für jede einzelne Oeffnung die den Gewichten $w = \frac{ys}{r^2} \frac{F_c}{F}$ entsprechenden einfachen Balkenmomente M_w und dividire dieselben durch den Ausdruck

$$\mathfrak{N} = \Sigma z + \frac{F_c}{F_k} (\Sigma \lambda_r \sec^2 \alpha_r + s' \sec \alpha' + s'' \sec \alpha'')$$
$$+ \frac{F_c}{F_z} \Sigma z_r (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1})^2,$$

dessen Summen sich über sämmtliche Oeffnungen erstrecken. Man erhält für $P = 1$:

$$H = \frac{M_w}{\mathfrak{N}}.$$

Aus der durchweg positiven H-Linie werden die übrigen Einflusslinien in derselben Weise abgeleitet wie im § 9, No. 101. In Fig. 299 ist als Beispiel die M_m-Fläche für einen Knotenpunkt der Mittelöffnung gezeichnet worden.

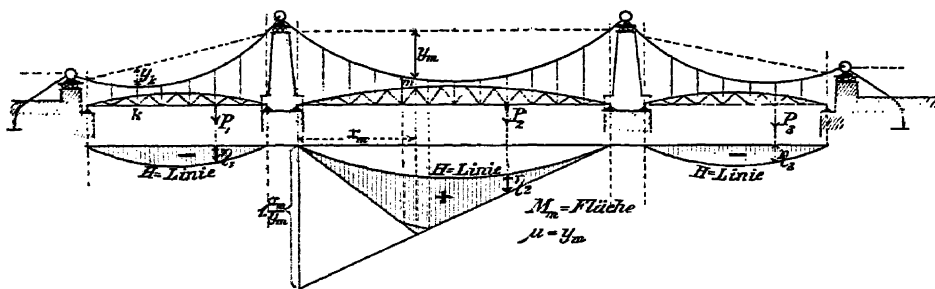



Fig. 299.

Für den Horizontalzug in Folge einer Temperaturänderung erhält man nach Seite 283 und 284:

$$H_t = \frac{\varepsilon E F_c t \Sigma S' s}{\mathfrak{N}} = - \frac{\varepsilon E F_c t}{\mathfrak{N}} [\Sigma \lambda_r \sec^2 \alpha + s' \sec \alpha' + s'' \sec \alpha''$$
$$+ \Sigma z_r (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1})].$$

Die in den vorstehenden Formeln noch enthaltenen Summenausdrücke darf man für die einzelnen Oeffnungen nach den Formeln berechnen:

$$\Sigma \lambda_r \sec^2 \alpha = l_1 \left(1 + \frac{16}{3^2_1} \frac{f^2_1}{l} + \frac{c^2}{l^2_1}\right),$$
$$\Sigma z_r (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1})^2 = \frac{64 f^2_1 (3h' - 2f_1 - 1{,}5\, c)\, \lambda}{3 l^3_1},$$
$$\Sigma z_r (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1}) = \frac{8 f_1 (3h' - 2f_1 - 1{,}5\, c)}{3\, l_1}.$$

Die im § 9 für Versteifungsbalken mit parallelen Gurtungen nachgewiesenen Vereinfachungen sind natürlich auch bei der Kettenbrücke mit mehreren Oeffnungen ausführbar.

b. Das statisch bestimmte Hauptnetz ist ein Gerberscher Balken.

108. Ausleger-Bogenbrücke mit drei Oeffnungen. Das Tragwerk in Figur 300 besteht aus einem Zweigelenkbogen AB mit Auslegern AG_1 und BG_2, welche zur Unterstützung der Einzelbalken CG_1 und G_2D bestimmt sind. Wird eines der beiden festen Lager A, B in ein auf wagerechter Bahn bewegliches verwandelt, so entsteht ein Gerberscher Balken (Zustand $H = 0$), dessen Angriffsmomente mit M_o bezeichnet werden mögen, und dessen senkrechte Stützenwiderstände $= A, B, C, D$ seien. Durch Hinzutreten der Widerstände H werden die senkrechten Auflagerkräfte, sowie die Spannkräfte in den äusseren Oeffnungen CA und BD nicht geändert. Nur im mittleren Theile AB sind die Stabkräfte S abhängig von H; sie lassen

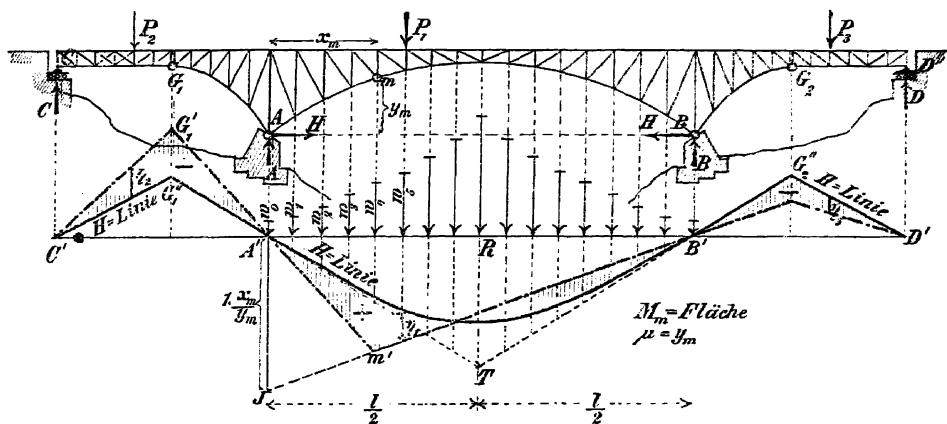



Fig. 300.

sich auf die Form bringen: $S = S_0 - S'H$, wo S_0 den Werth von S für $H = 0$ bedeutet und S' die Spannkraft in Folge $H = -1$ ist.

Zur Ermittelung der H-Linie benutzen wir wieder das Gesetz:

$$H = P \frac{\delta'}{\Sigma S'^2 s \frac{F_c}{F}},$$

wo δ' die mit EF_c multiplicirte Ordinate der Biegungslinie für den Zustand $H = -1$ vorstellt. Diese Biegungslinie besteht zwischen A und B aus einem Polygon, welches genau so bestimmt wird, wie für einen gewöhnlichen Zweigelenkbogen AB, ferner aus den Geraden $A'G_1''$, $G_1''C'$ und $B'G_2'$, $G_2'D'$, welche den bei Eintreten des Zustandes $H = -1$ spannungslos bleibenden Auslegern und Einzelbalken entsprechen. Wird die Biegungslinie des Theiles AB durch Aufzeichnung

eines Seilpolygons gewonnen, so erhält man die Geraden $A'G_1''$ und $B'G_1''$ als die äussersten Seiten dieses Polygons. Meistens führt jedoch die Berechnung der H-Linie mittels der Formel

$$H = \frac{M_w}{\Sigma z} \text{ (vergl. § 7)}$$

schneller zum Ziele. In diesem Falle empfiehlt es sich, behufs Verlängerung der H-Linie über A' und B' hinaus, sämmtliche Gewichte w zur Σw zu vereinigen, das Moment $\Sigma w \frac{l}{4}$ zu berechnen, welches dieses Gewicht in der Mitte eines einfachen Balkens $A'B'$ hervorbringt, hierauf senkrecht zu $A'B'$ die Strecke $\overline{RT} = \frac{\Sigma w l}{4 \Sigma z}$ aufzutragen und die Geraden TA' und TB' zu ziehen. Es ist dann $A'G_1''$ die Verlängerung der Geraden TA', und $B'G_2''$ die Verlängerung von TB'. Lasten P, welche links von A' oder rechts von B' aufgebracht werden, rufen einen *negativen* Horizontalschub H hervor.

Hätte beispielsweise der mittlere Theil AB die Abmessungen des in Fig. 212 auf Seite 220 dargestellten Zweigelenkbogens, so würde zwischen A und B die in Fig. 212 dargestellte H-Linie ohne jede Aenderung beizubehalten sein. Man würde dann $\Sigma w = (w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4)\, 2 + w_5 = (0{,}33$*) $+ 0{,}88 + 2{,}35 + 15{,}00)\, 2 + 20{,}00 = 57{,}12$ erhalten, mithin

$$\overline{RT} = \frac{\Sigma w l}{4 . \Sigma z} = \frac{57{,}12 . 20}{4 . 183{,}356} = 1{,}56.$$

Der Horizontalschub in Folge einer Temperaturänderung ist ebenso gross, wie der eines Zweigelenkbogens AB.

Behufs Herleitung der übrigen Einflusslinien aus der H-Linie beachte man, dass sich die Mittelöffnung bei unbelasteten Seitenöffnungen genau wie ein gewöhnlicher Zweigelenkbogen verhält. Will man also beispielsweise die M_m-Fläche zeichnen, so trage man (wie in Fig. 221, Seite 229) $\overline{A'J} = 1 \frac{x_m}{y_m}$ auf, ziehe JB', bestimme m' lothrecht unter m, verbinde m' mit A' und subtrahire die H-Fläche von dem die $\frac{M_{om}}{y_m}$-Fläche vorstellenden Dreiecke $A'm'B'$. Der Unterschied beider Flächen ist die M_m-Fläche des Zweigelenkbogens AB; der Multiplikator ist $= y_m$. Verlängert man nun die Geraden $m'A'$ und $m'B'$ bis zu ihren Schnittpunkten G_1', G_2' mit den Senkrechten durch G_1,

---

*) Der Werth $w_0 = \frac{h_s}{h_0^2} = \frac{1}{3{,}0} = 0{,}33$ wurde früher nicht gebraucht, da er ohne Einfluss auf die Momente M_w ist.

G_2, und zieht man schliesslich die Geraden $G_1'C'$, $G_2'D'$, so giebt der Linienzug $C'G_1'A'm'B'G_2'D'$ die auf $A'B'$ als Null-Linie bezogene $\frac{M_{om}}{y_m}$-Linie des Gerberschen Balkens $CABD$ an, und die in Fig. 3 0 schraffirte, zwischen dieser Linie und der H-Linie gelegene Fläche ist daher die gesuchte M_m-Fläche.

109. Stabbogen, versteift durch einen Gerberschen Balken. Ganz ebenso wie der in No. 108 untersuchte Träger werden die in den Figuren 301 und 302 dargestellten Stabgebilde behandelt. Zuerst

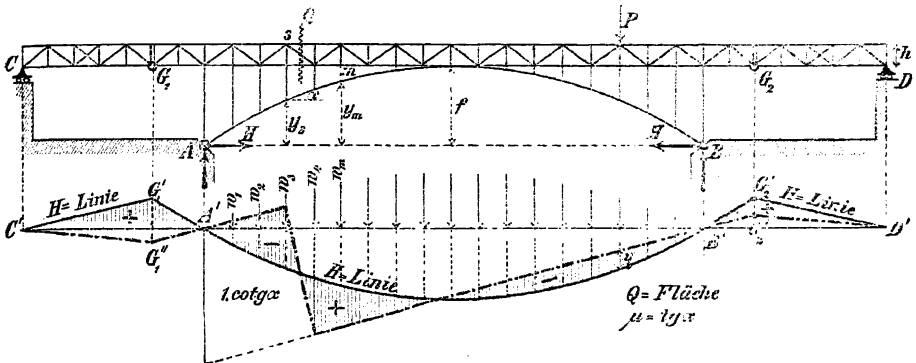



Fig. 301.

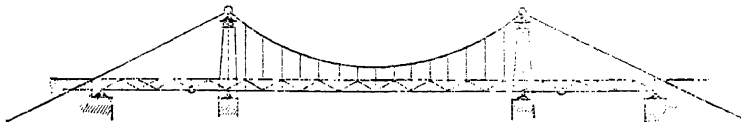



Fig. 302.

werden die Einflusslinien für die Mittelöffnung genau so gezeichnet, als wären die Seitenöffnungen gar nicht vorhanden, und schliesslich werden sie über A' und B' hinaus auf die vorhin beschriebene Weise verlängert. In Fig. 301 ist eine Q-Fläche eingezeichnet worden.

110. Uebungsaufgaben. Wir empfehlen dem Leser schliesslich noch die Untersuchung der in den Figuren 303 und 304 abgebildeten

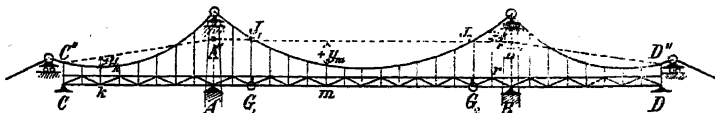



Fig. 303.

Tragwerke. Die durch einen Gerberschen Balken (mit in der Mittelöffnung angeordneten Gelenken) versteifte Kette ist bereits auf Seite 168 in allgemeiner Weise behandelt worden; der Leser wolle hier die H-Linie mit Hilfe von Gewichten $w_m = y_m$ berechnen und zwar im Anschluss an die im ersten Bande Seite 418 gegebene Entwickelung der Formel: $M_m = M_{om} - Hy_m$.

Fig. 304.

Der Bogenträger in Fig. 304 wird ähnlich berechnet wie der auf Seite 165 und 181 untersuchte Träger. An Stelle des Linienzuges AEC_1D_1FB in Fig. 183[d] ist zur Bestimmung der y_m der durch die Gelenke G_1 und G_2 gelegte Linienzug AJ_1J_2B zu benutzen.

§ 11.
Fachwerkbogen mit eingespannten Kämpfern.

111. Der bereits auf Seite 158 in ganz allgemeiner Weise behandelte Bogenträger mit eingespannten Enden ist dreifach statisch unbestimmt und erfordert daher die Aufstellung von drei Elasticitätsbedingungen. Diese soll hier nach zwei verschiedenen Verfahren erfolgen, von denen das erste an die Voraussetzung senkrechter Lasten gebunden ist, während die zweite Untersuchung Einzelkräfte beliebiger Richtung berücksichtigen wird. Besonders hervorzuheben ist, dass bei Herleitung der Elasticitätsgleichungen die Längenänderungen der Füllungsstäbe stets vernachlässigt werden dürfen. Denn beim Bogen mit eingespannten Kämpfern erweist sich der Einfluss der Temperaturänderungen (welche doch nur geschätzt werden können) als so bedeutend, dass eine allzu peinliche Ermittelung der übrigen Einflüsse noch viel weniger am Platze ist, wie beim Zweigelenkbogen. Auch die Annahme eines überall gleichen Gurtquerschnitts ($F_o = F_u =$ Konst.) ist zur Vereinfachung der Rechnung in der Regel anzurathen.

a. Erstes Verfahren.

112. Einfluss einer senkrechten Einzellast (Fig. 305). Die Einzellast P erzeugt Stützenwiderstände (Kämpferdrücke) K_1 und K_2, welche P in demselben Punkte C treffen, und deren Schnittpunkte mit den Senkrechten durch die äussersten Stützpunkte A und B mit F_1

und F_2 bezeichnet werden mögen. Der Linienzug $F_1 C F_2$ heisst das *Mittelkraftspolygon* und die Gerade $F_1 F_2$ die *Schlusslinie.*

Der senkrechte Abstand NQ eines Punktes des Mittelkraftspolygons von der Schlusslinie ist gleich dem durch den Horizontalschub H des Bogens dividirten Biegungsmomente M_o eines durch die Last P bean-

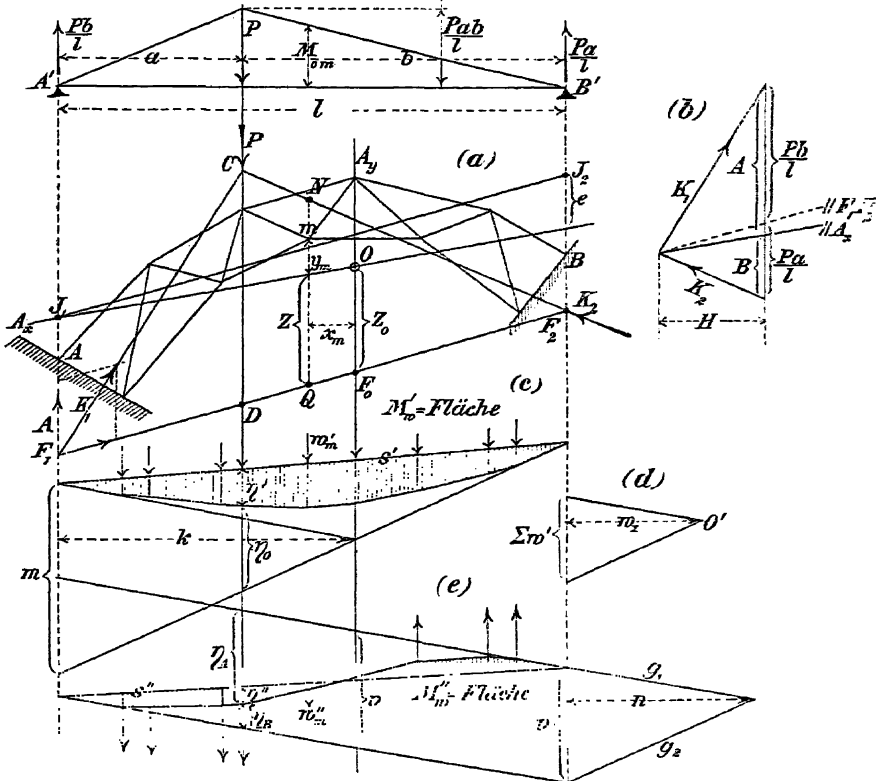



Fig 305.

spruchten einfachen Balkens $A'B'$, dessen Stützweite $= l$ ist und der an den Enden frei aufliegt.*) Es folgt deshalb

$$\overline{CD} = \frac{Pab}{lH},$$

und hiernach ist das Dreieck $F_1 C F_2$ und somit auch die Richtung von K_1 und K_2 bestimmt, sobald die Schlusslinie $F_1 F_2$ und der Horizontalschub H gegeben sind.

*) Man betrachte $F_1 C F_1$ als Cullmann'sche Momentenfläche des einfachen Balkens $A'B'$.

Wir beziehen den Bogenträger auf eine senkrechte Achse A_y und eine schräg liegende Achse A_x. Neigung der A_x und Lage des Ursprungs O seien vorläufig beliebig. Die Lage der Schlusslinie bestimmen wir durch Angabe ihres Schnittpunktes F_o mit der Achse A_y, d. h. durch Angabe der Strecke z_o in Fig. 305[a], ferner durch die Strecke e, welche die zur Schlusslinie parallele Gerade $J_1 J_2$ auf der Senkrechten durch B abschneidet.

Behufs Ermittelung des Angriffsmomentes M_m für irgend einen Knotenpunkt m führen wir durch m einen senkrechten Schnitt, zerlegen den von diesem Schnitte in N getroffenen Kämpferdruck (hier K_2) im Punkte N in eine senkrechte und eine wagerechte Seitenkraft und erhalten:

$$M_m = H \cdot \overline{Nm}.$$

Sind nun y_m und x_m der senkrechte bezw. wagerechte Abstand des Punktes m von den Achsen A_x und A_y, so ergiebt sich

$$\overline{Nm} = \overline{NQ} - y_m - z,$$

$$\frac{z - z_o}{x_m} = \frac{e}{l}, \text{ also } z = \frac{e}{l} x_m + z_o,$$

mithin (wegen $H \cdot \overline{NQ} = M_{om}$):

$$(1) \qquad M_m = M_{om} - H y_m + \frac{He}{l} x_m - H z_o.$$

Indem wir nun die Bezeichnungen einführen

$$(2) \qquad H z_o = X'; \ \frac{He}{l} = X''; \ H = X''',$$

erhalten wir die Gleichung

$$(3) \qquad M_m = M_{om} - X' - X'' x_m - X''' y_m,$$

welche die Berechnung der Momente M_m gestattet, *sobald die drei statisch nicht bestimmbaren Grössen* X', X'', X''' gefunden sind.

Zur Berechnung der X bedienen wir uns der Gleichungen (V) auf Seite 163. Wir nehmen starre Widerlager an, setzen also $L' = 0$, $L'' = 0$, $L''' = 0$. Auch vernachlässigen wir die Formänderung der Füllungsstäbe.

Die Spannkraft des einem Knotenpunkte m gegenüberliegenden Gurtstabes ist

$$(4) \qquad S = \mp \frac{M_m}{r_m}$$

und zwar gilt das obere Vorzeichen für die obere, das untere für die untere Gurtung. Den Zuständen $X' = -1$, $X'' = -1$, $X''' = -1$

entsprechen die Momente:

$$(5)\qquad M_m' = +1;\quad M_m'' = +x_m;\quad M_m''' = +y_m$$

und die Stabkräfte:

$$(6)\qquad S' = \mp\frac{1}{r_m};\quad S'' = \mp\frac{x_m}{r_m};\quad S''' = \mp\frac{y_m}{r_m}.$$

Wählen wir nun das Achsenkreuz A_x, A_y derart, dass die Summen

$$\Sigma S'S''\frac{s}{EF};\quad \Sigma S'S'''\frac{s}{EF};\quad \Sigma S''S'''\frac{s}{EF}\ ^{*)}$$

verschwinden, dass also die Bedingungen:

$$(7)\qquad \Sigma\frac{x_m s_m}{EF_m r_m^2} = 0;\quad \Sigma\frac{y_m s_m}{EF_m r_m^2} = 0;\quad \Sigma\frac{x_m y_m s_m}{EF_m r_m^2} = 0$$

erfüllt werden, so gehen die Gleichungen (V) für *eine* Einzellast P über in:

$$(8)\qquad \begin{cases} X'\ \Sigma\dfrac{s_m}{EF_m r_m^2} = P\delta' + \Sigma S'\varepsilon t s \\ X''\ \Sigma\dfrac{x_m^2 s_m}{EF_m r_m^2} = P\delta'' + \Sigma S''\varepsilon t s \\ X'''\ \Sigma\dfrac{y_m^2 s_m}{EF_m r_m^2} = P\delta''' + \Sigma S'''\varepsilon t s, \end{cases}$$

wo δ', δ'', δ''' die an der Stelle P gemessenen Ordinaten der den Zuständen $X' = -1$, $X'' = -1$, $X''' = -1$ entsprechenden Biegungslinien bedeuten.

Zur weiteren Vereinfachung der Rechnung schreiben wir sämmtlichen Gurtstäben denselben Querschnitt F (Mittelwerth der F_m) zu und setzen feste Werthe E, ε, t voraus. Multipliciren wir dann die Gleichungen (8) mit EF, so erhalten wir mit der Bezeichnung: $\frac{s_m}{r_m^2} = w_m'$ **) den Einfluss einer Einzellast P:

$$(9)\qquad X' = P\frac{EF\delta'}{\Sigma w_m'};\quad X'' = P\frac{EF\delta''}{\Sigma x_m^2 w_m'};\quad X''' = P\frac{EF\delta'''}{\Sigma y_m^2 w_m'},$$

ferner den Einfluss einer gleichmässigen Erwärmung um t:

$$(10)\qquad X_t' = \frac{\varepsilon EFt\Sigma S's}{\Sigma w_m'};\quad X_t'' = \frac{\varepsilon EFt\Sigma S''s}{\Sigma x_m^2 w_m'};\quad X_t''' = \frac{\varepsilon EFt\Sigma S'''s}{\Sigma y_m^2 w_m'}.$$

---

*) In den angezogenen Gleichungen (V) ist $\rho = \frac{s}{EF}$.

**) Sollen verschieden grosse Gurtquerschnitte F_m berücksichtigt werden, so muss $w_m' = \frac{s_m}{r_m^2}\frac{F}{F_m}$ gesetzt werden.

Die Bedingungen, welche durch geeignete Wahl der Lagen der Achsen A_x, A_y zu erfüllen sind, lauten:

(11) $$\Sigma x_m w_m' = 0, \quad \Sigma y_m w_m' = 0, \quad \Sigma x_m y_m w_m' = 0.$$

Wird dem Knotenpunkte m das Gewicht w_m' beigelegt, so fordern die Gleichungen (11):

1. Der Ursprung O muss mit dem Schwerpunkte der Gewichte w' zusammenfallen.
2. Die Richtung der Achse A_x muss so gewählt werden, dass das Centrifugalmoment der Gewichte w' gleich Null ist.

In der Regel wird der Bogen symmetrisch sein in Bezug auf die Senkrechte durch die Mitte. Dann fällt die Achse A_y mit der Symmetrieachse zusammen und die Achse A_x mit der wagerechten Schwerachse der Gewichte w'.

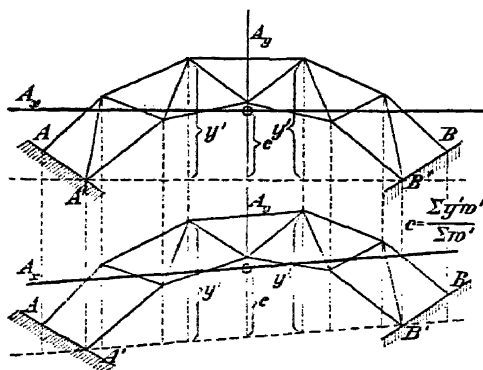



Fig. 306.

Einen steigenden Bogen leite man, falls der Unterschied in der Höhenlage der Kämpfer gering ist, nach Fig. 306 aus einem symmetrischen Bogen ab und schreibe den einander entsprechenden Knotenpunkten beider Bogenhälften gleiche Gewichte w' zu.*) Man erreicht hierdurch, dass die Achse A_y mit der Mittelsenkrechten und die A_x mit der zu $A'B'$ parallelen Schwerachse der Gewichte w' zusammenfällt.

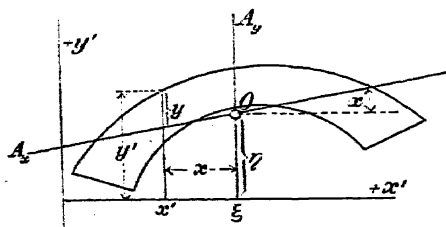



Fig. 307.

Ganz allgemein findet man die Achsen A_x, A_y wie folgt. Man bezieht den Bogen zunächst auf ein beliebiges rechtwinkliges Achsenkreuz x', y' mit wagerechter x'-Achse (Fig. 307), berechnet die Summen:

$$\Sigma w', \ \Sigma w' x', \ \Sigma w' y', \ \Sigma w' x'^2, \ \Sigma w' y'^2, \ \Sigma w' x' y',$$

bezeichnet mit ξ, η die Coordinaten von O in Bezug auf x', y', mit α den Neigungswinkel der A_x gegen die x'-

*) Diese Annahme ist ebenso zulässig, wie die Annahme $F : F_m = 1$.

Achse und hat dann:

$$x = \xi - x'$$
$$y = y' - x' \operatorname{tg} \alpha - (\eta - \xi \operatorname{tg} \alpha).$$

Die Gleichungen $\Sigma w' x = 0$, $\Sigma w' y = 0$, $\Sigma w' x y = 0$ liefern nun:

$$(12) \quad \begin{cases} \xi = \dfrac{\Sigma w' x'}{\Sigma w'}, \quad \eta = \dfrac{\Sigma w' y'}{\Sigma w'} \\ \operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\xi \Sigma w' y' - \Sigma w' x' y'}{\xi \Sigma w' x' - \Sigma w' x'^2}. \end{cases}$$

Schliesslich bestimmt man noch

$$\Sigma w' x^2 = \Sigma w' x'^2 - \xi^2 \Sigma w'$$
$$\Sigma w' y^2 = \Sigma w' y'^2 - \eta^2 \Sigma w' - \operatorname{tg}^2 \alpha\, \Sigma w' x^2.$$

Natürlich kann man auch die auf der Darstellung von Momenten zweiter Ordnung beruhende Ermittelung von $\operatorname{tg} \alpha$ auf zeichnerischem Wege mit Hilfe von Band I, § 5—7 ausführen.

Nach Festlegung der Achsen A_y, A_x bestimme man die Zähler der für X', X'', X''' gefundenen Ausdrücke (9) wie folgt.

Man erwäge, dass den Zuständen $X' = -1$, $X'' = -1$, $X''' = -1$ die Momente

$$(13) \qquad M_m' = 1; \quad M_m'' = \frac{x_m}{r_m}; \quad M_m''' = \frac{y_m}{r_m}$$

entsprechen, und dass sich die mit EF multiplicirten Durchbiegungen δ', δ'', δ''' als die Momente eines einfachen Balkens $A'B'$ (des statisch bestimmten Hauptsystems) deuten lassen, welcher beziehungsweise belastet wird mit den Gewichten:

$$w_m' = \frac{M_m' s_m}{r_m^2}; \quad w_m'' = \frac{M_m'' s_m}{r_m^2}; \quad w''' = \frac{M_m''' s_m}{r_m^2} \text{ *)}, \text{ d. h. mit}$$

$$(14) \qquad w_m' = \frac{s_m}{r_m^2}; \quad w_m'' = \frac{x_m s_m}{r_m^2}; \quad w_m''' = \frac{y_m s_m}{r_m^2}.$$

Bezeichnet man also die unter P gemessenen Ordinaten dieser einfachen Momentenlinien mit M_w', M_w'', M_w''', so erhält man: $EF\delta' = M_w'$; $EF\delta'' = M_w''$; $EF\delta''' = M_w'''$ und findet schliesslich für die Einflusslinien der Grössen X', X'', X''' die Gleichungen:

$$(15) \quad X' = P \frac{M_w'}{\Sigma w'}; \quad X'' = P \frac{M_w''}{\Sigma x_m w_m''}; \quad X''' = P \frac{M_w'''}{\Sigma y_m w_m'''}. \text{**)}$$

---

*) Vergl. Seite 188, Gleichung (2), in welcher $\frac{F_c}{F_m} = 1$ zu setzen ist.

**) Die Gleichung für $H = X'''$ stimmt mit der im § 7 zur Berechnung des Horizontalschubes eines Zweigelenkbogens erhaltenen Formel überein. Nur ist jetzt y auf eine andere Achse bezogen. Wir machen noch auf die im § 7 für verschiedene Sonderfälle gezeigten Umformungen und Kürzungen der Gewichte w aufmerksam; dieselben sind natürlich auch bei eingespannten Bogenträgern brauchbar.

Aus den Einflusslinien für die Grössen X', X'', X''' kann man jetzt alle übrigen Einflusslinien ableiten und zwar lassen sich hierzu verschiedene Verfahren anwenden.

1. Mit Hilfe der Gleichungen

$$\frac{M_m}{h_m} = \frac{M_{om}}{h_m} - \frac{X'}{h_m} - X'' \frac{x_m}{h_m} - X''' \frac{y_m}{h_m}$$

ermittele man die $(M:h)$-Linien und hieraus nach Seite 226 und 227 die Einflusslinien für die Stabkräfte.

An Stelle von $\frac{X'}{h_m}$ schreibe man $\frac{X'}{d} \frac{d}{h_m}$, wo d eine beliebig anzunehmende Strecke bedeutet. Die Multiplikation der $\frac{X'}{d}$, X'', X''' mit $\frac{d}{h_m}$, $\frac{x_m}{h_m}$, $\frac{y_m}{h_m}$ führe man (nach Seite 174 und 175) mit Hilfe von Winkeln aus, deren Tangenten gleich den Multiplikatoren sind.

2. Man bestimme für verschiedene Lagen der Einzellast $P = 1$ die Mittelkraftspolygone $F_1 C F_2$ (Fig. 305) und benutze diese zur Berechnung der Ordinaten der $(M:h)$-Linien.

3. Nach Aufzeichnung der Einflusslinien für die Gurtkräfte bestimme man die Einflusslinien für die Spannkräfte in den Füllungslinien nach No. 72.

4. Man nehme die Lasteinheit P der Reihe nach in sämmtlichen Querträgerangriffspunkten an, zeichne für jeden einzelnen dieser Belastungszustände einen Cremona'schen Kräfteplan und bestimme die Einflusslinien der Stabkräfte mit Hilfe dieser Kräftepläne.

113. Die Aufgabe, das Mittelkraftspolygon $F_1 C F_2$ (Fig. 305) zu zeichnen, lässt sich — ausser durch Bestimmung der Werthe $z_o = \frac{X'}{H}$ und $e = \frac{X''}{H} l$ — noch in folgender Weise lösen.

Verbindet man die Gewichte w' und w'' durch Seilpolygone (Fig. 305), deren Polweiten w_I und w_{II} sein mögen*), so erhält man nach Eintragung der Schlusslinien s', s'' die Momente

$$M_w' = w_I \eta'; \quad M_w'' = w_{II} \eta''. \quad \text{(Fig. 305 } c \text{ u. } e.)$$

Die äussersten Seiten des ersten Seilpolygons schneiden sich auf der Achse A_y, da ja diese Gerade die senkrechte Schwerachse der Ge-

---

*) Zum ersten Seilpolygon haben wir in Fig. 305 d das zugehörige Kräftepolygon theilweise gezeichnet.

wichte w' ist, und man findet:

$$\Sigma w' : w_I = m : k, \text{ also } \Sigma w' = w_I \frac{m}{k} \text{ und (nach Gleich. 15)}$$

$$X' = P \frac{\eta' k}{m}.$$

Die äussersten Seiten des zweiten Seilpolygons schneiden auf der Achse A_y die Strecke $v = \frac{\Sigma x w''}{w_{II}}$ ab; sie sind einander parallel, weil die Summe der Gewichte w'' (nämlich $\Sigma w'' = \Sigma x w'$) gleich Null und deshalb die Mittelkraft der w'' unendlich klein und unendlich fern ist. Es ergiebt sich nach (15):

$$X'' = P \frac{\eta''}{v},$$

und, wenn die Lasteinheit P durch eine Strecke von der Länge v dargestellt wird:

$$X'' = \eta''; \quad X' = \frac{vk}{m} \eta' = n \eta',$$

wobei n nach Fig. 305 mittels der parallel zu den äussersten Seiten des ersten Seilpolygons gezogenen Geraden g_1 und g_2 (Fig. 305 [e]) bestimmt werden kann.

Zerlegt man nun die Kämpferdrücke K_1, K_2 nach senkrechter Richtung und nach der Richtung der Achse A_x, und bezeichnet man die senkrechten Seitenkräfte mit A und B (Fig. 305 [b]), so findet man leicht:

$$A : H = (\overline{CD} + \frac{e}{l} a) : a, \text{ wo } CD = \frac{Pab}{lH},$$

weshalb

$$A = \frac{Pb}{l} + \frac{He}{l} = \frac{Pb}{l} + X'' = \frac{vb}{l} + \eta''$$

und hieraus folgt, dass das Seilpolygon der Gewichte w'' die Strecke $v = P$, welche seine äussersten Seiten auf der Last P abschneiden, in die Theile

$$\eta_A = A \text{ und } \eta_B = B$$

zerlegt. Hat man also den Horizontalschub H mit Hilfe eines die Gewichte w''' verbindenden Seilpolygons durch eine Strecke η''' dargestellt (was möglich ist, weil nach Gleichung 15 die Kraft $X''' = H$ proportional η''' ist), so ist man im Stande, die Kämpferdrücke nach Grösse und Richtung anzugeben, und braucht jetzt nur noch einen Punkt des Linienzuges $F_1 C F_2$ zu bestimmen (Fig. 308).

Besonders einfach gestaltet sich nun die Bestimmung der Schnittpunkte R der Kämpferdrücke mit der Achse A_x. Wir bezeichnen die

Entfernung des Punktes R_1 von der A_y mit ξ und berechnen diese Strecke, indem wir die Summe der Momente der im Gleichgewichte befindlichen Kräfte K_1, K_2, P in Bezug auf F_o gleich Null setzen. Vorher ersetzen wir jedoch P durch die beiden in F_1 und F_2 angreifenden Seitenkräfte $\frac{Pb}{l}$ und $\frac{Pa}{l}$, zerlegen K_1 und K_2 auf die in Fig. 308 angegebene Weise, verschieben die in die Achse A_x fallende Seitenkraft

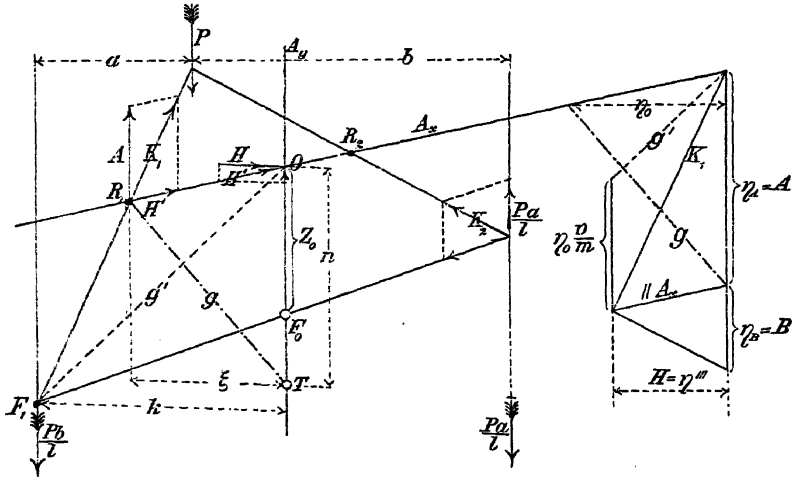



Fig. 308.

von K_1 nach O und zerlegen sie dort nach wagerechter und senkrechter Richtung. Die fragliche Momentengleichung lautet dann:

$$A\xi + Hz_o - \frac{Pb}{l}k = 0, \text{ d. h.}$$

$$\eta_A \xi + n\eta' - v\frac{b}{l}k = 0;$$

sie liefert, wegen $v\frac{k}{m} = n$:

$$\xi = \frac{n}{\eta_A}\left(b\frac{m}{l} - \eta'\right) = \frac{n\eta_o}{\eta_A},$$

wo η_o in Fig. 305 die Strecke bedeutet, welche das Seilpolygon der Gewichte w' und die letzte Seite dieses Polygons auf der Last P abschneiden. Die hieraus sich ergebende zeichnerische Bestimmung des Punktes R_1 zeigt Fig. 308; die von dem im festen Abstande n von O gelegenen Punkte T aus gezogene Gerade TR_1 ist parallel zur Geraden g.

Auch der Punkt F_1 lässt sich schnell festlegen. Man trage zu diesem Zwecke vom unteren Endpunkte von K_1 die Strecke $\eta_o \frac{v}{m}$ nach oben auf, ziehe die Gerade g' und hierauf $OF_1 \parallel g'$. Der Beweis ist leicht zu finden.

Besonders einfach gestaltet sich die doppelte Bestimmung der Lage von K_2, wenn man die willkürliche Polweite des Seilpolygons II so wählt, dass $v = m$ wird (was durch zweimaliges Aufzeichnen dieses Seilpolygons zu bewirken ist). Dann wird $\eta_o \frac{v}{m} = \eta_o$ und $n = k$.

114. Wir wenden nun das im Vorstehenden entwickelte Verfahren auf einen symmetrischen Bogenträger Fig. 309a an und stützen uns hierbei auf die im ersten Bande unseres Buches, Seite 23 u. 24, Fig. 26, gezeigte Darstellung der höheren Momente paralleler Kräfte.

Die durch Rechnung zu bestimmenden Gewichte $w' = \frac{s}{r^2}$ werden zunächst als lothrechte Kräfte aufgefasst und in der Reihenfolge w_1', w_2', w_3', ... durch den Seilzug I (Pol O_I, Polweite w_I) verbunden. Die Polweite w_I darf beliebig gross angenommen werden. Die Seiten des Seilpolygons I schneiden auf der Achse A_y die den Gewichten w'' proportionalen Strecken $\frac{w'x}{w_I}$ ab, welche für die Knotenpunkte der linken Trägerhälfte positiv sind, für diejenigen der rechten negativ. Betrachtet man diese Strecken als senkrechte, an die Stelle der w' tretende Kräfte, verbindet sie durch ein Seilpolygon II (Pol O_{II}, beliebige Polweite $= w_{II}$), und misst man senkrecht unter der in Frage kommenden Last P die durch den Seilzug II und dessen äusserste Seiten bestimmten Strecken η_A, η_B, v, so erhält man

$$\eta_A : \eta_B : v = A : B : P,$$

und für den Kräftemaassstab $P = v$:

$$\eta_A = A; \quad \eta_B = B.$$

Da die x-Achse wagerecht ist, so sind A und B die senkrechten Stützenwiderstände.

Jetzt wird die Achse A_x als wagerechte Schwerachse der Gewichte w' bestimmt. Hierbei empfiehlt es sich, zur Erzielung einer recht deutlichen Zeichnung den Bogen verzerrt aufzutragen.

In Fig. 309b wurden die Höhen verdoppelt, auch sind die Gewichte w' zunächst in der Reihenfolge w_1', w_3', w_5', w_2', w_4', $\frac{1}{2} w_6'$ *) durch einen Seilzug III (Pol O_{III}, beliebige Polweite w_{III}) verbunden, um eine Durchkreuzung aufeinander folgender Seiten zu vermeiden. Der Schnittpunkt der äussersten Polygonseiten bestimmt die A_x, und auf dieser Achse werden von den Seiten des Seilzuges die den Gewichten w''' proportionalen Strecken $\frac{w' 2y}{w_{III}}$ abgeschnitten, welche positiv oder negativ zu nehmen sind, je nachdem sie oberhalb oder unterhalb der A_x liegenden Knotenpunkten entsprechen. Diese

*) $\frac{1}{2} w'_6$, weil nur die Hälfte des symmetrischen Bogens betrachtet wird.

(b)
Seilzug IV
Seilzug III
(a)
Seilzug I
Seilzug II
Seilzug V
D
E
T
A'
B'

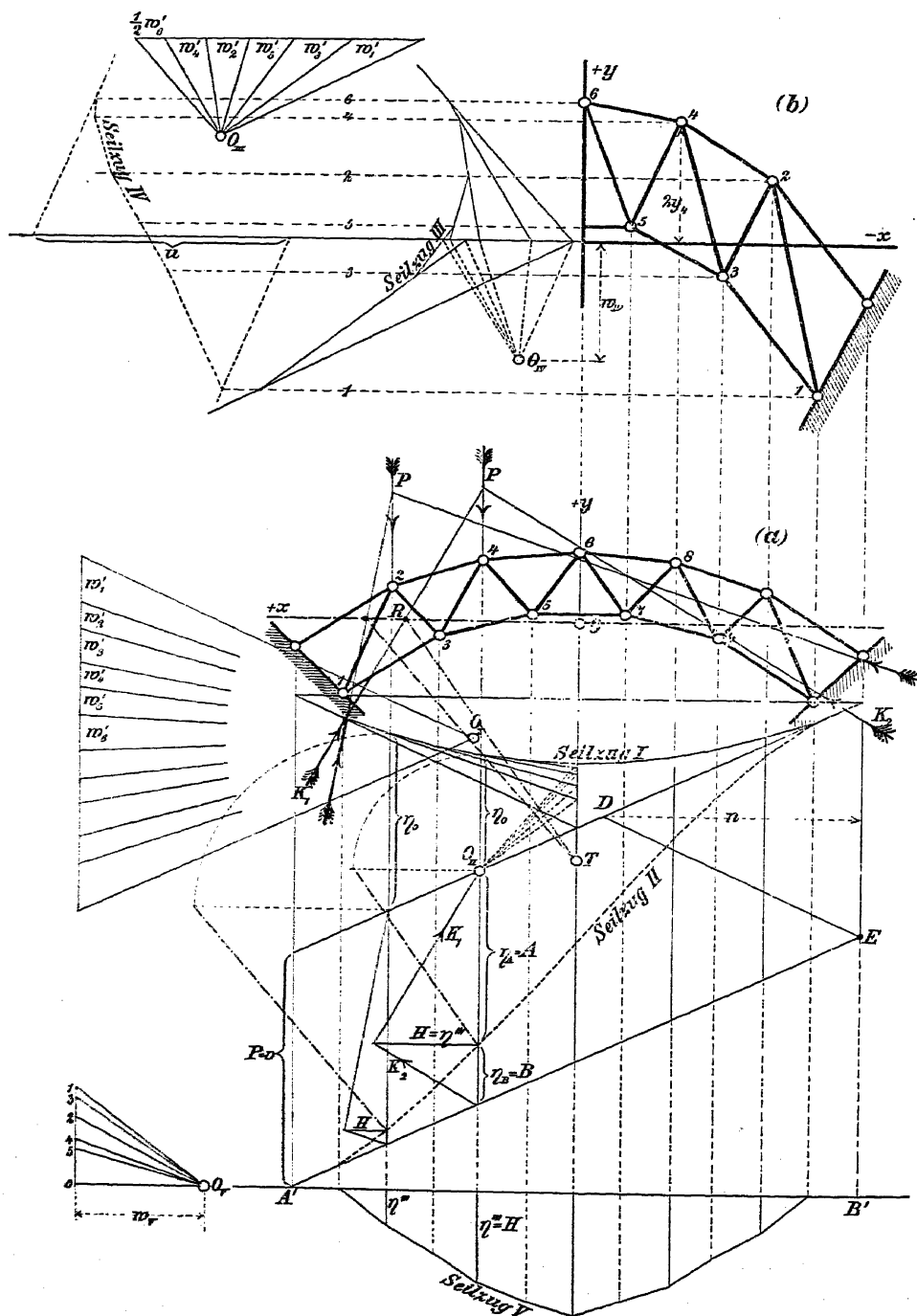



Fig. 309.

Strecken wurden (an Stelle der w') als wagerechte Kräfte aufgefasst und durch einen Seilzug IV (Pol O_{IV}, beliebige Polweite w_{IV}) verbunden, dessen äusserste Seiten auf der A_x eine Strecke u abschneiden, für welche die Beziehung gilt:

$$u\, w_{IV} = \Sigma \frac{w'\, 2y}{w_{III}}\, 2y.$$

Hieraus folgt für eine Bogenhälfte $\Sigma w' y^2 = \frac{1}{4} w_{III}\, w_{IV}\, u$ und für den ganzen Träger:

$$\Sigma w' y^2 = \tfrac{1}{2}\, w_{III}\, w_{IV}\, u.$$

Um nun die zur Ermittelung von

$$H = X''' = P \frac{M_w'''}{\Sigma w' y^2}$$

dienenden Momente M_w''' zu bestimmen, wurden die Strecken $\frac{2yw'}{w_{III}}$ (an Stelle der w') als senkrechte Kräfte aufgefasst und durch ein Seilpolygon V (Pol O_V, Polweite w_V) verbunden, jetzt aber in der Reihenfolge 1, 2, 3, . . .*). Ist η''' die Ordinate dieses Seilzuges, so ist das Biegungsmoment des mit den Gewichten $\frac{2yw'}{w_{III}}$ belasteten Balkens $A'B'$ gleich $w_V \eta'''$, und man erhält daher für einen durch die Gewichte $w''' = w' y$ beanspruchten Balken:

$$M_w''' = \tfrac{1}{2}\, w_{III}\, w_V\, \eta''', \text{ weshalb}$$

$$H = P \frac{w_V\, \eta'''}{w_{IV} \cdot u} = \frac{v\, w_V}{w_{IV}\, u}\, \eta'''.$$

Wählt man also $w_V = \frac{w_{IV} \cdot u}{v}$ (z. B. $w_{IV} = \frac{1}{2} v$ und $w_V = \frac{1}{2} u$, wie dies in Fig. 309 geschehen ist)**), so findet man:

$$H = \eta''',$$

und ist jetzt im Stande, für jede Einzellast P die Kämpferdrücke K_1 und K_2 zu ermitteln. Um die Lagen dieser Kräfte anzugeben, bestimmt man mit Hilfe der zur ersten Seite des Seilzuges I parallelen Geraden ED die Strecke n und trägt dieselbe auf der Achse A_y von O aus nach T hin ab (Fig. 308). Nun dreht man die vom Seilzug I und dessen letzter Seite auf P abgeschnittene Strecke η_o um 90° nach links, verbindet ihren Endpunkt mit dem Endpunkte der Strecke η_A durch eine (strichpunktirte) Gerade und zieht zu dieser von T aus eine Parallele; dieselbe schneidet die A_x im Durchgangspunkte von K_1.

115. Einfluss einer Temperaturänderung. Zur Berechnung der von einer Temperaturänderung herrührenden Werthe X könnten die Gleichungen (10) und (6) benutzt werden; der folgende Weg verdient jedoch den Vorzug.

---

*) Im zugehörigen Kräfteplan ist die Reihenfolge der Strahlen durch Ziffern angegeben.

**) w_V ist die einzige Polweite, welche nicht willkürlich, sondern durch die vorhergehenden Polweiten bestimmt ist. Der Maassstab, in welchem die w' aufgetragen werden, ist, so lange nur der Einfluss von Lasten in Frage kommt (nicht auch der von Temperaturänderungen), ganz gleichgültig.

Wir denken die Spannkräfte $S''' = \mp 1 \frac{y_m}{r_m}$ durch zwei entgegengesetzt gleiche, nach aussen gerichtete Kräfte von der Grösse 1 sec α (Fig. 310) hervorgerufen, welche mit der Achse A_x (deren Neigungswinkel $= \alpha$ sei) zusammenfallen und deren Angriffspunkte L_1 und L_2 mit den Bogenenden durch starre Stäbe verbunden seien.*) Sodann fassen wir 1 sec α als eine Spannkraft (und zwar als einen *Druck*) auf, der in einem die Knoten L_1 und L_2 verbindenden Stabe auf irgend eine Weise erzeugt wird, und wenden auf das nunmehr nur von inneren Kräften beanspruchte und in keinem Punkte gestützte Fachwerk das Gesetz der virtuellen Verschiebungen an, indem wir den Stablängen s die Aenderungen $\omega \cdot s$ zuschreiben, wo ω einen festen Werth vorstellt. Wir erhalten dann die Arbeitsgleichung

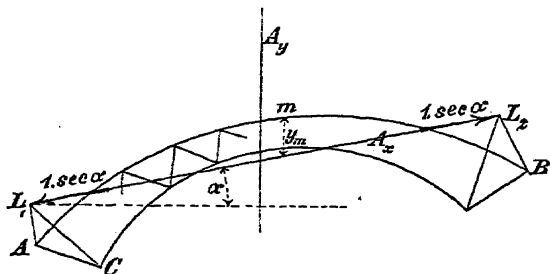



Fig. 310.

$$\Sigma S''' \omega s + \sum_1 S''' \omega s - 1 \sec \alpha \cdot \omega\, \overline{L_1 L_2} = 0,$$

wobei sich das erste Glied auf die Stäbe des Bogenfachwerks bezieht, das zweite auf die hinzugefügten starren Stäbe, mit Ausnahme von $L_1 L_2$, das dritte schliesslich auf den Stab $L_1 L_2$. Wird ω gehoben und werden die Punkte L_1, L_2 so angenommen, dass $\sum_1 S''' s = 0$ wird, so ergiebt sich

$$\Sigma S''' s = \overline{L_1 L_2} \sec \alpha,$$

und wir erhalten sehr einfach:

$$X_t''' = \frac{\varepsilon E F t l''' \sec \alpha}{\Sigma y_m w_m'''}, \tag{16}$$

wo l''' die Länge der Strecke $L_1 L_2$ bedeutet.

Zur Bestimmung des Punktes L_1 bezeichnen wir die Längen der Stäbe AL_1, CL_1, AC mit a, b, c, die durch die Kraft 1 sec α in diesen Stäben erzeugten Spannkräfte mit S_a''', S_b''', S_c''' und suchen die Er-

*) Diese Kräfte erzeugen das Angriffsmoment $M_m = 1 \sec \alpha\,(y_m \cos \alpha) = y_m$ und die Stabkraft $S_m''' = \mp \frac{y_m}{r_m}$. Diese Formel gilt auch für die Füllungsstäbe; an Stelle der Knoten m treten die bekannten Drehpunkte der Ritterschen Momentengleichungen.

füllung der Gleichung

$$S_a''' a + S_b''' b + S_c''' c = 0$$

herbeizuführen. Geht der erste Füllungsstab des Bogenfachwerks durch den Punkt A, so ergiebt sich der in Fig. 311 dargestellte Kräfteplan, in welchem S_e''' die Spannkraft im ersten Gliede der unteren Gurtung bedeutet. Mit den aus der Figur zu entnehmenden Bezeichnungen der Winkel folgt, wenn AE und AE' so gezogen werden, dass $\sphericalangle L_1 EA = \psi$ und $\sphericalangle L_1 E' A = \beta$ wird:

$$\frac{-S_c'''}{S_b'''} = \frac{\sin(\psi - \gamma)}{\sin(180^\circ - \psi)} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CE}}{c},$$

$$\frac{-S_a'''}{S_b'''} = \frac{\sin \rho}{\sin \beta} = \frac{\overline{L_1 E'}}{\overline{AL_1}} = \frac{L_1 E'}{a}$$

und hieraus:

$$S_a''' a + S_b''' (CE + L_1 E') + S_c''' c = 0.$$

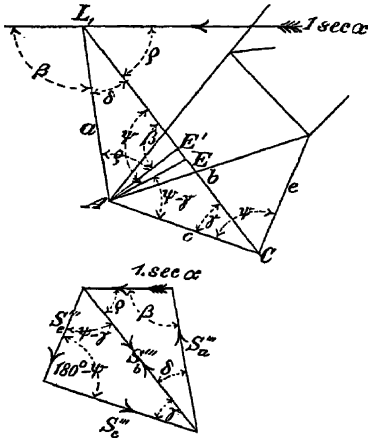
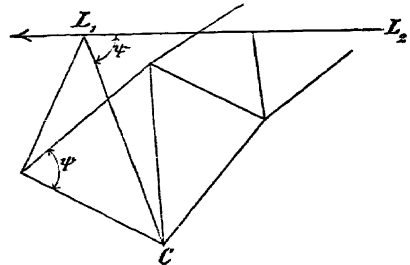



Fig. 311. Fig. 312.

Die oben aufgestellte Bedingung wird hiernach erfüllt, sobald $CE + L_1 E' = b$, d. h. sobald $\beta = \psi$ wird.

Aehnlich folgt: Geht der erste Füllungsstab von C aus (Fig. 312), so muss, damit $aS_a''' + bS_b''' + cS_c''' = 0$ werde, der Winkel $L_2 L_1 C = \psi$ sein.

In derselben Weise wird der Punkt L_2 bestimmt und damit die Länge der Strecke $\overline{L_1 L_2} = l'''$ gefunden. Man vergleiche Fig. 313, in welcher die äussersten Füllungsstäbe durch A bezieh. B gehend angenommen wurden.

Durch eine Reihe ganz ähnlicher Schlussfolgerungen wird für die im Zähler des Ausdruckes für X'' stehende Summe der Werth

$$(17) \qquad \Sigma S''s = l'' \text{ und damit } X_t'' = \frac{\varepsilon E F t l''}{\Sigma x_m w_m''}$$

gefunden, wobei l'' den gegenseitigen Abstand der auf der Achse A_y gelegenen Punkte N_1 und N_2 bedeutet, welche erhalten werden, sobald man von A und B aus Gerade zieht, die mit der Achse A_y die Winkel ψ und ψ' bilden.

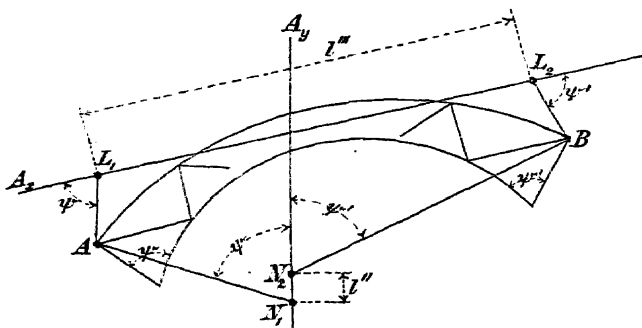



Fig. 313.

Um schliesslich noch die Summe $\Sigma S's$ in einfacher Weise zu berechnen, denken wir uns die Momente $M' = 1$ und Spannkräfte $S_m' = \mp \frac{1}{r_m}$ durch an den Bogenenden angreifende rechts drehende Kräftepaare hervorgebracht, welche aus zur Achse A_x parallelen Kräften von der Grösse 1 bestehen und deren Arm $= 1$ ist, Fig. 314. Sind E_1,

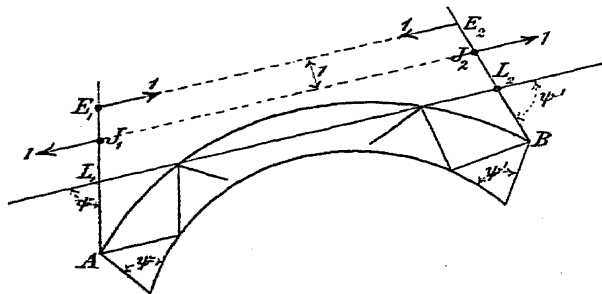



Fig. 314.

E_2, J_1, J_2 die Schnittpunkte dieser Kräfte mit den Geraden AL_1 und BL_2, so folgt aus den vorstehenden Untersuchungen

$$\Sigma S''s = \overline{J_1 J_2} - \overline{E_1 E_2} = \operatorname{cotg} \psi + \operatorname{cotg} \psi'$$

und es ergiebt sich daher:

$$X_t' = \frac{\varepsilon E F t (\operatorname{cotg} \psi + \operatorname{cotg} \psi')}{\Sigma w_m'}. \tag{18}$$

Für den in Bezug auf die Senkrechte durch die Mitte symmetrischen Bogen ist $l'' = 0$, also auch $X_t'' = 0$,. Ist ausserdem, was ebenfalls in der Regel (zum mindesten annähernd) zutreffen wird, $\psi = \psi' = 90°$, also $\operatorname{cotg} \psi = \operatorname{cotg} \psi' = 0$, so folgt auch $X' = 0$ und (wegen $\alpha = 0$)

$$X_t''' = H_t = \frac{\varepsilon E F t l'''}{\Sigma y_m w_m'''}, \tag{19}$$

worin l''' die gegenseitige wagerechte Entfernung derjenigen Punkte der Kämpfer bedeutet, von denen die äussersten Füllungsstäbe ausgehen.*) In diesem wichtigen Falle erzeugt also die Temperaturänderung zwei in die Achse A_x fallende Kämpferdrücke von der Grösse H_t.

Wird die Gestalt eines leicht ansteigenden Bogens nach Seite 312 aus einer symmetrischen Grundform entwickelt, so ist es ebenfalls zulässig, als Folge der Temperaturänderung einen mit der A_x-Achse zusammenfallenden Kämpferwiderstand anzunehmen. Die Grösse desselben ist (wegen $K_t = H_t \sec \alpha = X_t''' \sec \alpha$)

$$K_t = \frac{\varepsilon E F t l''' \sec \alpha}{\Sigma y_m w_m}. \tag{20}$$

Wird der Einfluss der Belastung nach No. 114 mit Hilfe von Seilpolygonen dargestellt, so wird man auch die in den Nennern der Werthe X_t', X_t'', X_t''' auftretenden Summenausdrücke mittels jener Seilzüge berechnen. Man muss dann auf die Einheiten der in Frage kommenden Grössen achten. Für den in Fig. 309 untersuchten Bogen ist z. B.

$$H_t = \frac{\varepsilon E F t l'''}{\Sigma y_m w_m'''} = \frac{\varepsilon E F t l'''}{\Sigma y_m^2 w_m}$$

und $\Sigma y_m^2 w_m = \frac{1}{2} w_{III} w_{IV} u$, weshalb

$$H_t = 2 \frac{\varepsilon E F t l'''}{w_{III} w_{IV} u}.$$

Nun ist $w_m' = \frac{s_m}{r_m^2}$ der reciproke Werth einer Länge, also $\Sigma y_m^2 w_m'$ eine Länge und man muss deshalb eine der drei Strecken w_{III}, w_{IV}, u (gleichgültig welche) mit dem Maassstabe messen, in welchem die w' aufgetragen worden sind, die andern beiden aber mit dem Längenmaassstabe der Zeichnung.

b. Zweites Verfahren.

116. Wir entwickeln noch ein zweites Verfahren, welches auch über den Einfluss schräger Lasten Aufschluss giebt und sich eng an

*) Für den Träger in Fig. 306 ist $l''' = \overline{A'B'}$.

die in No. 65, Seite 160, gegebene allgemeine Lösung anlehnt. Zu dem Zwecke ersetzen wir das linke Widerlager durch eine starre Scheibe (Fig. 315[a]), und fügen in dem vorläufig beliebig angenommenen Punkte O derselben zwei sich aufhebende Kräfte K_1 hinzu, welche dieselbe Richtung und Grösse haben, wie der linke Kämpferwiderstand K_1. Die eine dieser beiden Kräfte bildet mit dem Kämpferwiderstande K_1 ein Kräftepaar, dessen Moment $K_1 c$ wir mit X_a bezeichnen; die andere zerlegen wir in X_b (senkrecht) und X_c (mit vorläufig willkürlicher Richtung). X_a, X_b, X_c führen wir als die statisch nicht bestimmbaren Grössen ein. Sind dieselben bekannt, so lässt sich K_1 wie folgt finden: Zunächst stellt man Grösse und Richtung von K_1 mittels des Kräfte-

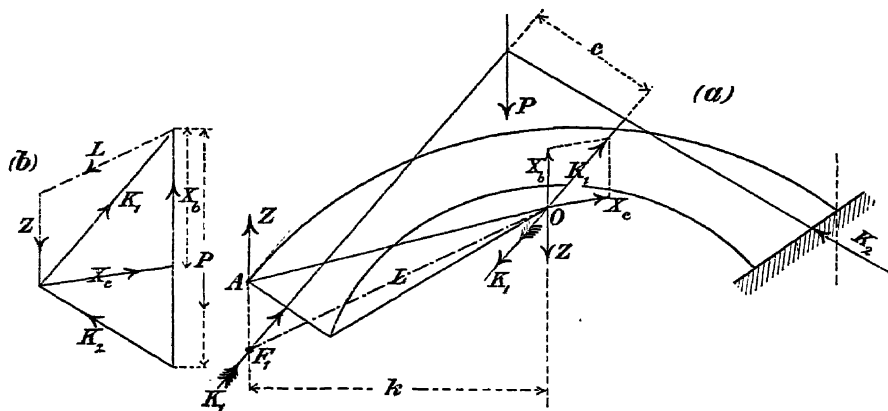



Fig. 315.

zuges X_c X_b in Fig. 315[b] fest. Nun bestimmt man die in Fig. 315[a] mit Z bezeichneten senkrechten Kräfte, welche ein dem Kräftepaare (K_1, K_1) gleichwerthiges Paar bilden, mittels der Bedingung $Zk = X_a$. Schliesslich stellt man in O durch Hinzufügung der Hilfskraft L das Gleichgewicht zwischen K_1 und Z her und zieht durch O zu L eine Parallele, welche die Senkrechte durch A im Durchgangspunkte F_1 des Kämpferdruckes K_1 schneidet.

Bei Aufstellung der Elasticitätsbedingungen legen wir dem Punkte O die Ordnungsziffern b oder c bei, je nachdem wir O als den Angriffspunkt von X_b oder X_c bezeichnen wollen. Zur Berechnung des Einflusses einer in m angreifenden, beliebig gerichteten Last P_m benutzen wir die Gleichungen:

$$(21) \qquad X_a = P_m \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}, \quad X_b = P_m \frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}}, \quad X_c = P_m \frac{\delta_{mc}}{\delta_{cc}},$$

in denen die δ die auf Seite 146 erklärte Bedeutung haben, und deren Gültigkeit voraussetzt, dass der Angriffspunkt von X_b, X_c und die Richtung X_c nach den auf Seite 158 und 159 (im Beispiel 1) gegebenen Regeln bestimmt werden. (Erzielung von $\delta_{ab} = \delta_{ba} = 0$; $\delta_{ac} = \delta_{ca} = 0$; $\delta_{bc} = \delta_{cb} = 0$).

Wir fassen (Fig. 316) den Stabzug 0—1—2—3—4 . . . . . 8—9 mit der ruhenden Seite 0—1 ins Auge, und schliessen an diesen den (vorläufig noch nicht gegebenen) Punkt $O \equiv 10$ mittels der starren Stäbe 9—10 und 8—10 an. Das Dreieck 8—9—10 ist dann die das linke Widerlager vertretende Scheibe. Die Stablängen bezeichnen wir mit d_1, d_2, d_3 . . . und die in demselben Sinne zu messenden Winkel zwischen den aufeinander folgenden Seiten mit α_1, α_2, α_3 . . .

Werden die Formänderungen der Füllungsstäbe vernachlässigt, was stets erlaubt ist, so sind die Verschiebungen der Knotenpunkte durch die Aenderungen $\Delta\alpha$ der Winkel α vollständig bestimmt.*) Dabei ist mit den geläufigen Bezeichnungen s_m und r_m:

$$(22) \qquad \Delta\alpha_m = + \frac{\Delta s_m}{r_m} \text{ bezieh. } \Delta\alpha_m = - \frac{\Delta s_m}{r_m},$$

je nachdem α_m ein Dreieckswinkel ist oder nicht.

Dem Angriffsmomente M_m entspricht $S_m = \mp \frac{M_m}{r_m}$ und $\Delta s_m = \mp \frac{M_m s_m}{r_m EF_m}$, wobei sich das obere Vorzeichen auf die obere Gurtung bezieht, das untere auf die untere Gurtung. Ist α ein Dreieckswinkel, so ist s ein Untergurtstab, anderenfalls ein Obergurtstab, so dass allgemein:

$$(23) \qquad \Delta\alpha_m = + \frac{M_m s_m}{r_m{}^2 EF_m} \text{ und } EF\Delta\alpha_m = \frac{M_m s_m}{r_m{}^2} \frac{F}{F_m},$$

wo F den mittleren Gurtquerschnitt bedeutet.

Rechnen wir also mit

$$(24) \qquad \Delta\alpha_m = \frac{s_m}{r_m{}^2} \frac{F}{F_m} M_m,$$

so erhalten wir die EF-fachen Verschiebungen, eine Vergrösserung, die auf das Ergebniss der Gleichungen 21 ohne Einfluss ist, da in diesen nur Verhältnisse von Verschiebungen vorkommen. Wird die empfehlenswerthe Annahme eines überall gleichen Gurtquerschnittes gemacht, und $F : F_m = 1$ gesetzt, so entsteht: $\Delta\alpha_m = \frac{s_m}{r_m{}^2} M_m$.

---

*) Will man diese Längenänderungen berücksichtigen, so wende man zur Bestimmung der Formänderungen das Williot'sche Verfahren an.

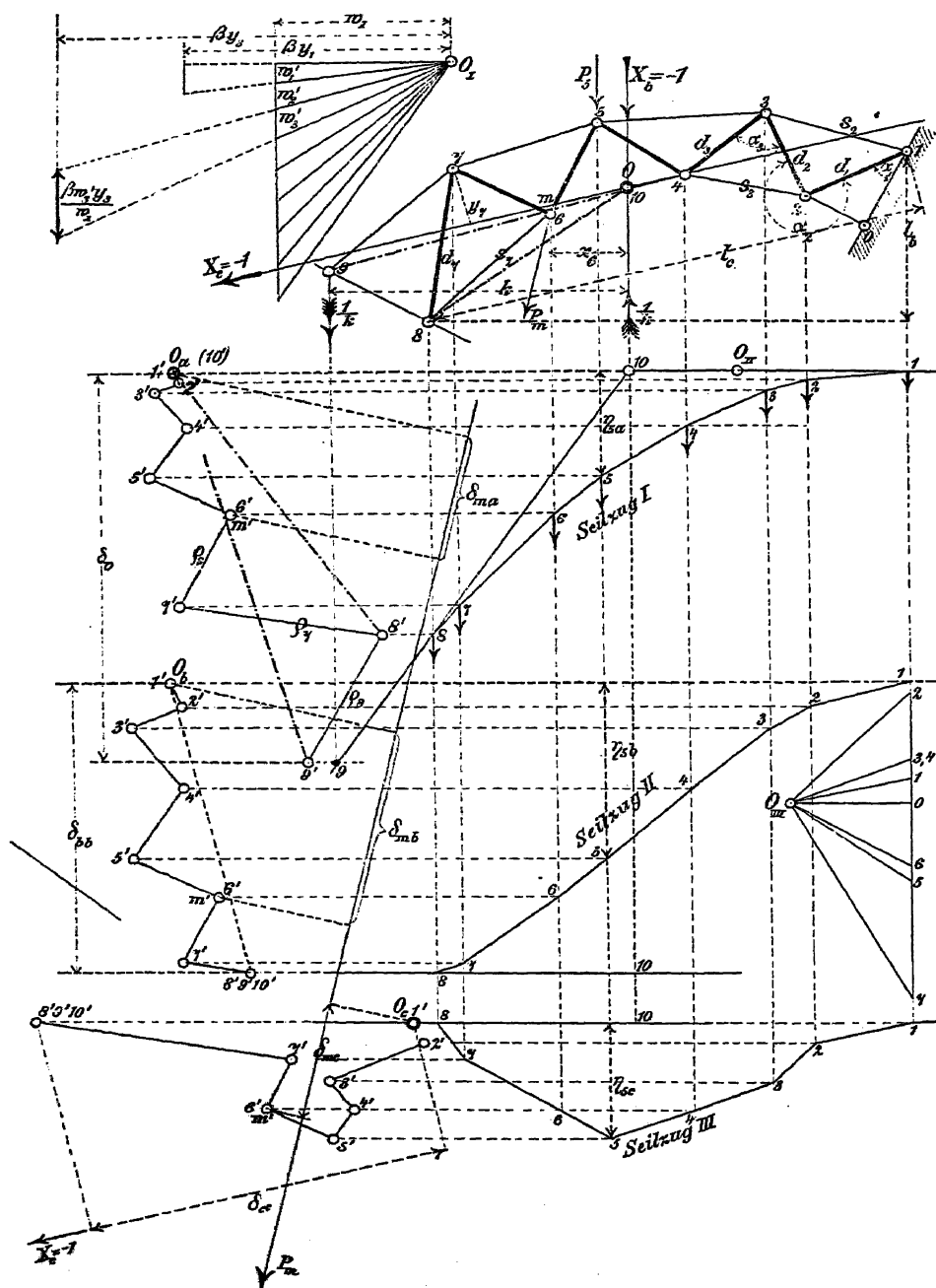



Fig. 316.

Den Zuständen $X_a = -1$, $X_b = -1$, $X_c = -1$ entsprechen die Momente:

$$M_m' = -1, \quad M_m'' = x_m, \quad M_m''' = y_m$$

und in Folge dessen die Winkeländerungen:

$$\Delta' \alpha_m = -\frac{s_m}{r_m^2}; \quad \Delta'' \alpha_m = x_m \frac{s_m}{r_m^2}; \quad \Delta \alpha_m''' = \frac{y_m s_m}{r_m^2},$$

deren absolute Werthe mit den im ersten Verfahren benutzten Gewichten w_m', w_m'', w_m''' übereinstimmen, wobei nur zu beachten ist, dass jetzt y rechtwinklig zu X_c gemessen werden muss.*)

Die Aufzeichnung der Verschiebungspläne geschieht nun in folgender Weise.

I. Verschiebungsplan für den Zustand $X_a = -1$. Man betrachte die Winkeländerungen $-\Delta\alpha_m = s_m : r_m^2$ als lothrechte nach abwärts gerichtete Kräfte und verbinde dieselben durch einen Seilzug I, dessen erste Seite wagerecht anzunehmen ist und dessen Polweite w_I willkürlich gewählt werden darf. Durch die den Knotenpunkten 1, 2, 3, . . . 9 des Stabzuges entsprechenden Punkte des Seilzuges lege man wagerechte Gerade g_1, g_2, g_3, . . . und zeichne von dem beliebig in g_1 angenommenen Punkte 1′ aus einen Linienzug 1′ 2′ 3′ 4′ . . . . 9′, dessen Seiten rechtwinklig zu den entsprechenden Seiten des Stabzuges 1 — 2 — 3 — 4 . . . . 9 sind. Die von dem mit 1′ zusammenfallenden Pole O_a nach den Punkten 2′, 3′, 4′, . . . gezogenen Strahlen stellen dann die Verschiebungen der Knoten 2, 3, 4, . . . nach Grösse und Richtung dar, und man findet daher den einer Einzellast P_m entsprechenden Werth δ_{ma} als Projektion des Strahles $O_a m'$ auf die Richtung von P_m und zwar in einem von der Polweite w_I und den Werthen E, F abhängigen, vorläufig gleichgiltigen Maassstabe. Da nun der (die Ziffer 10 tragende) Punkt O in Ruhe bleiben soll, muss 10′ mit O_a zusammenfallen und es ist mithin die Lage von 10 durch die Bedingungen: 9 — 10 ⊥ 9′ — 10′, 8 — 10 ⊥ 8′ — 10′ bestimmt; auch leuchtet ein, dass Punkt 10 in der senkrechten Schwerachse der Gewichte $-\Delta\alpha' = w'$ liegt, wodurch das Zusammenfallen von X_b mit der früher benutzten Achse A_y bewiesen ist.

Ein zweites Verfahren der Aufzeichnung des Linienzuges 1′ 2′ 3′ . . . besteht in der Berechnung der Drehungswinkel ψ und Werthe $\rho = \psi d$

*) Es wird sich später zeigen, dass die Richtung von X_c mit der Richtung der Achse A_x in Fig. 305 zusammenfällt. Wäre die wagerechte Projektion von X_c (d. i. H) als statisch nicht bestimmbare Grösse eingeführt worden, so würde die Uebereinstimmung der $\Delta'''\alpha$ mit den früheren w''' eine vollständige sein.

für die einzelnen Stäbe d_1, d_2 . . . Man erhält:

$$\psi_1 = \Delta\alpha_1; \quad \psi_2 = \psi_1 + \Delta\alpha_2; \quad \psi_3 = \psi_2 + \Delta\alpha_2; \ldots\ldots$$
$$\rho_1 = d_1\psi_1; \quad \rho_2 = d_2\psi_2; \quad \rho_3 = d_3\psi_3; \ldots\ldots$$

und macht nun:

$$1' - 2' = \rho_1; \quad 2' - 3' = \rho_2; \quad 3' - 4' = \rho_3; \ldots\ldots$$

Ein drittes Verfahren stützt sich auf den Umstand, dass die Strecken ρ nur von den $\Delta\alpha$ und d abhängen, nicht aber von der Gestalt des Stabzuges. Reiht man also die Stablängen d wagerecht aneinander, wie dies die in kleinerem Maassstabe gezeichnete Fig. 317 zeigt, so findet man die Werthe ρ als die Unterschiede aufeinander folgender Ordinaten eines die Gewichte — $\Delta\alpha$ verbindenden Seilpolygons.

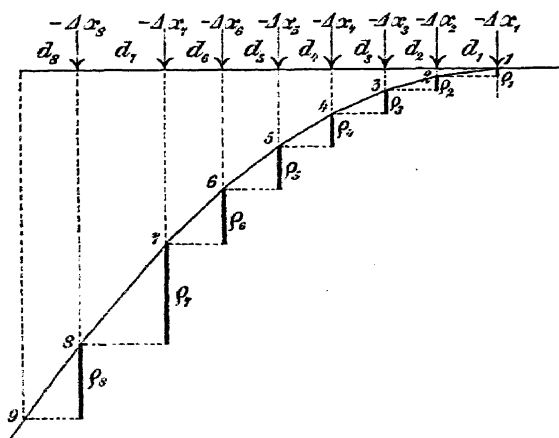



Fig. 317.

Schliesslich könnte man viertens die Punkte $1'$, $2'$, $3'$ . . . . . mit Hilfe eines Williot'schen Verschiebungsplanes festlegen.

Das erste Verfahren lässt im Stich, sobald der Stabzug lothrechte Stäbe enthält, und es führt zu ungenauen Ergebnissen, falls Stabrichtungen vorkommen, die von der Lothrechten nur wenig abweichen.

Man denke sich z. B. den Stab 7 — 8 der lothrechten Lage genähert, um einzusehen, dass eine genaue Bestimmung des Punktes $8'$ in Folge des entstehenden schleifenden Schnittes schwierig ist. Man würde dann ρ_7 berechnen oder von dem Seilpolygon in Fig. 317 das Stück 6 — 7 — 8 aufzeichnen, welches durch ρ_6 und $\Delta\alpha_7$ bestimmt ist. Besitzen mehrere Stäbe eine solche Lage, so wird man von der Anwendung des ersten Verfahrens ganz absehen. Am übersichtlichsten ist die Bestimmung der ρ nach Fig. 317.

Nach Ermittelung von δ_{ma} findet man den Einfluss von P_m auf X_a mittels der ersten der Gleichungen 21, in der δ_{aa} den Drehungswinkel (ψ) der Scheibe 8 — 9 — 10 für den betrachteten Belastungszustand $X_a = -1$ bedeutet. Nun entspricht dem Stabe 9 — 10 der Werth $\rho = 9' - 10'$, also der Drehungswinkel $\psi = \dfrac{9' - 10'}{9 - 10} = \dfrac{\delta_v}{k}$ und man erhält daher:

$$X_a = P_m \delta_{m.a} \frac{k}{\delta_v}$$

und für die durch die Gleichung $Zk = X_a$ bestimmte Kraft Z den Werth:

$$Z = P_m \frac{\delta_{ma}}{\delta_v}.$$

Einer in 5 angreifenden lothrechten Last P_5 entspricht:

$$Z = \frac{P\eta_{5a}}{\delta_v},$$

d. i. ein Werth, zu dessen Ermittelung die Aufzeichnung des Seilzuges I genügen würde.

II. Verschiebungsplan für den Zustand $X_b = -1$. Die Gewichte $-\Delta\alpha' = \frac{s_m}{r_m^2}$ werden durch die Gewichte $-\Delta\alpha'' = -\frac{s_m x_m}{r_m^2}$ (welche rechts von O positiv, also abwärts gerichtet sind) ersetzt und nun wird das vorhin beschriebene Verfahren wiederholt. Der die neuen Gewichte verbindende Seilzug II kann aus dem Seilzuge I in derselben Weise abgeleitet werden wie in Fig. 309. Nur muss die Lage des Poles O_{II} (bei beliebig anzunehmender Polweite w_{II}) so gewählt werden, dass die erste Seite des Seilzuges II wagerecht liegt. Nach Eintragung des vom Pole O_b aus gezeichneten Linienzuges $1'\ 2'\ 3' \ldots .\ 8'\ 9'$ findet man den einer schrägen Last P_m entsprechenden Werth δ_{mb} als Projektion von $O_b m'$ auf die Richtung von P_m und die Verschiebung δ_{bb} des Angriffspunktes $b \equiv 10$ von X_b als Projektion des Strahles $O_b 10'$ auf die Richtung von $X_b = -1$. In Folge dessen findet man den Einfluss der schrägen Last P_m:

$$X_b = P_m \frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}}$$

und den Einfluss einer lothrechten Last P_5:

$$X_b = P_5 \frac{\eta_{5b}}{\delta_{bb}}.$$

Zur Ermittelung des letzteren Werthes würde die Aufzeichnung des Seilzuges II genügen.

Noch sei aus dem Zusammenfallen der Punkte $8'$, $9'$, $10'$ der Schluss gezogen, dass sämmtliche Punkte der Scheibe $8 - 9 - 10$ bei Eintreten des Zustandes $X_b = -1$ dieselbe Verschiebung $O_b 8' = O_b 9' = O_b 10'$ erfahren, dass also der Drehungswinkel $\delta_{ab} = 0$ wird — eine Bedingung, an welche die Gültigkeit der Gleichungen (21) bekanntlich gebunden ist.

III. Verschiebungsplan für den Zustand $X_c = -1$. Da die Verschiebung δ_{cb}, welche der Angriffspunkt c von X_c im Sinne von X_c und in Folge von $X_b = -1$ erfährt, gleich Null sein soll, so muss die Richtung von X_c rechtwinklig zum Strahle $O_b 10'$ des soeben gezeichneten Verschiebungsplanes angenommen werden. Ist dies geschehen, so werden die Gewichte $\Delta''' \alpha_m = y_m \frac{s_m}{r_m^2} = y_m w_m'$ (absolut genommen) bestimmt oder aber es werden — was meistens bequemer ist — Gewichte ermittelt, welche den Werthen $y_m w_m'$ proportional sind, beispielsweise die in der Figur 3 (im Kräfteplane der w') dargestellten: $\frac{\beta}{w_I} y_m w_m'$, wo β eine beliebige runde Zahl bedeutet. Die algebraische Summe dieser theils positiven, theils negativen Gewichte muss gleich Null sein (eine sehr scharfe Zeichnungsprobe!). Da nämlich die Richtung von X_c durch die Bedingung $\delta_{cb} = 0$ bestimmt wurde, so muss nach dem Maxwell'schen Satze auch $\delta_{bc} = 0$ sein, d. h. es muss die Verschiebung des Angriffspunktes b von X_b in der Richtung von X_b und hervorgerufen durch $X_c = -1$ gleich Null sein. Hieraus folgt aber: $\overline{O_c 10'} \perp X_b$, was nur der Fall ist, wenn die äussersten Seiten des Seilzuges *III* zusammenfallen.

Man erhält schliesslich für eine schräge Last P_m und eine senkrechte Last P_5:

$$X_c = P_m \frac{\delta_{mc}}{\delta_{cc}} \text{ bezieh. } X_c = P_{m5} \frac{\eta_{5c}}{\delta_{cc}},$$

wo δ_{cc} die Projektion von $O_c 10'$ auf die Richtung von X_c bedeutet.

Die gestellte Aufgabe ist somit gelöst; und es möge nur noch daran erinnert werden, dass man die den Linienzug $O_b 2' \, 3' \ldots . 10'$ bezieh. $O_c 2' \, 3' \ldots . 10'$ bestimmenden Strecken ρ auch in der bei Herleitung des Verschiebungsplanes für $X_a = -1$ beschriebenen Weise durch Rechnung oder mit Hilfe eines gestreckten Stabzuges (Fig. 317) oder mittels eines Williot'schen Planes ermitteln kann — und dass diese Abänderung des in der Fig. 316 befolgten Verfahrens zuweilen geboten ist.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass ganz besondere Sorgfalt auf die Bestimmung der Lage des Punktes O und der Richtung der Kraft X_c zu verwenden ist. Etwa hierbei begangene Zeichenfehler sind von grossem Einfluss. Will man diesen Theil der Aufgabe durch Rechnung lösen, so beachte man, dass (wegen $\Sigma y w' = 0$) der Punkt O mit dem Schwerpunkte der Gewichte w' und die Kraft X_c mit der früher benutzten Achse A_x zusammenfällt, weshalb die auf Seite 313 abgeleiteten Formeln brauchbar sind; die y dürfen hierbei zunächst lothrecht gemessen werden.

Andererseits liefern die vorstehend entwickelten Verschiebungspläne einen Beitrag zur Lehre vom Schwerpunkte und den Momenten zweiter Ordnung.

Mit Hilfe des Linienzuges O_2 1′ 2′ .... (den man dann um 90° nach links drehen wird) vermag man den Schwerpunkt O einer Gruppe von Punkten zu bestimmen, welche mit den Gewichten w' belastet sind, und die Linienzüge O_b 1′ 2′ ....., O_c 1′ 2′ ..... können zur Ermittelung der Trägheitsmomente $\Sigma w' x^2$ und $\Sigma w' y^2$ bestimmt werden. Man findet nämlich:

$$\delta_{bb} = \Sigma \frac{w' x}{w_I} \cdot \frac{x}{w_{II}}; \quad \delta_{cc} = \Sigma \frac{w' y \beta}{w_I} \cdot \frac{y}{w_{III}};$$

also für $w_I = w_{II} = w_{III} = 1$ und $\beta = 1$:

$$\delta_{bb} = \Sigma w' x^2; \quad \delta_{cc} = \Sigma w' y^2.$$

IV. Einfluss einer Temperaturänderung. Wir gehen von den Formeln aus:

$$(25) \qquad X_{at} = 1 \frac{\delta_{at}}{\delta_{aa}}; \quad X_{bt} = 1 \frac{\delta_{bt}}{\delta_{bb}}; \quad X_{ct} = 1 \frac{\delta_{ct}}{\delta_{cc}},$$

in welchen δ_{at} den von der Temperaturänderung hervorgerufenen Drehungswinkel der Scheibe 8—9—10 bedeutet, während δ_{bt} und δ_{ct} die von der gleichen Ursache herrührenden Verschiebungen des Punktes 10 im Sinne von X_a bezw. X_b sind.

Wir nehmen eine gleichmässige Erwärmung des Trägers an und machen zur Vereinfachung der Rechnung die stets zulässige Annahme, dass sich auch die Strecken 1 — 0 und 8 — 9 in demselben Maasse ausdehnen können, wie die Fachwerkstäbe. Es sind dann alle Winkeländerungen $= 0$ und der Drehungswinkel δ_{at} wird $= 0$. Der Stabzug 1—2—3 ..... 8 nimmt eine Form an, welche der anfänglichen Gestalt ähnlich ist. Man erhält $\delta_{at} = 0$, ferner, da die Verschiebungen von 10 mit denen des Punktes 8 übereinstimmen:

$$\delta_{bt} = \varepsilon t l_b, \quad \delta_{ct} = \varepsilon t l_c,$$

wo l_b und l_c die Projektionen der Strecke 8—1 auf die Richtungen von X_b und X_c bedeuten. Hiernach ergiebt sich:

$$X_{at} = 0; \quad X_{bt} = \frac{\varepsilon t l_b}{\delta_{bb}}; \quad X_{ct} = \frac{\varepsilon t l_c}{\delta_{cc}}.$$

Sollen hierein die in Fig. 316 dargestellten Strecken δ_{bb} und δ_{cc} eingesetzt werden, so ist zu beachten, dass jene Verschiebungspläne die EF-fachen Verschiebungen liefern, dass also die Zähler der Ausdrücke für X_{bt}, X_{ct} mit EF multiplicirt werden müssen. Weitere Umformungen sind dadurch bedingt, dass die Polweiten der Seilzüge II, III (welche letztere die Biegungslinien für $X_b = -1$ und $X_c = -1$ vorstellen) nicht $= 1$, sondern $= w_{II}$ bezieh. w_{III} sind, dass also die entsprechenden Verschiebungen noch mit w_{II} bezieh. w_{III} zu multipliciren sind. Schliesslich wurden die Gewichte $w'' = x w'$ und $w''' = y w$ durch die Gewichte $\frac{x w'}{w_I}$ bezieh. $\frac{\beta y w'}{w_I}$ ersetzt, was eine weitere Mul-

tiplication mit w_I bezieh. $\frac{w_I}{\beta}$ zur Folge hat. Man erhält daher:

$$X_{bt} = \frac{\varepsilon E F l_b t}{w_I w_{II} \delta_{bb}} \text{ und } X_{ct} = \beta \frac{\varepsilon E F l_c t}{w_I w_{III} \delta_{cc}}.$$

Von den in den Nennern erscheinenden drei Strecken (w_I, w_{II}, δ_{bb} bezieh. w_I, w_{III}, δ_{cc}) müssen je zwei mit dem Längenmaassstabe gemessen werden (z. B. w_{II} und δ_{bb}, ferner w_{III} und δ_{cc}) und je eine (nämlich beidemale w_I) mit dem Maassstabe, nach welchem die Gewichte w' aufgetragen worden sind.*)

Zeichnet man die Verschiebungspläne nach dem Verfahren von Williot, so fasse man die den Zuständen $X_a = -1$, $X_b = -1$, $X_c = -1$ entsprechenden Spannkräfte S_a, S_b, S_c, als Zahlen auf. Die mit EF multiplicirten Längenänderungen

$$\Delta s_a = S_a s_a, \quad \Delta s_b = S_b s_b, \quad \Delta s_c = S_c s_c$$

sind dann Längen, welche in einem geeigneten — vom Maassstabe der Zeichnung unabhängigen — Maassstabe aufgetragen werden, mit dem auch die δ_{bb}, δ_{cc} gemessen werden. Man erhält dann:

$$X_{bt} = \varepsilon E F t \frac{l_b}{\delta_{bb}}; \quad X_{ct} = \varepsilon E F t \frac{l_c}{\delta_{cc}}.$$

§ 12.

Durchgehender Balken mit drei Stützpunkten.

117. Die Einflusslinie für den Widerstand C der Mittelstütze, mit deren Aufzeichnung die Untersuchung des Trägers zweckmässig begonnen wird, erhält man nach No. 55, Seite 140, indem man für den Zustand $C = -1$ nach irgend einem Verfahren die Biegungslinie der zur Aufnahme der Lasten bestimmten Gurtung zeichnet und ihre Ordinaten (η) durch die demselben Zustande entsprechende Senkung (c) des Stützpunktes C, welcher auch der anderen Gurtung angehören kann, dividirt. In Figur 318 ist die fragliche Biegungslinie als Seilpolygon von Gewichten w aufgefasst worden. Dreieck $A'C'B'$ stellt die Momentenfläche des mit $C = -1$ belasteten einfachen Balkens vor; y_m sei das Moment an der Stelle m. Dann ergiebt sich mit der stets zulässigen Vernachlässigung der Formänderungen der Füllungsstäbe:

$w_m = \frac{y_m s_m}{r_m{}^2 E F_m}$, wofür bei konstantem E

$$w_m = \frac{y_m s_m}{r_m{}^2} \frac{F_c}{F_m}$$

*) Vergl. den Schluss von No. 115, Seite 323.

gesetzt werden möge, unter F_c eine beliebige Querschnittsfläche verstanden. Diese Abänderung der w ist auf das Ergebniss

$$C = P\frac{\eta}{c},$$

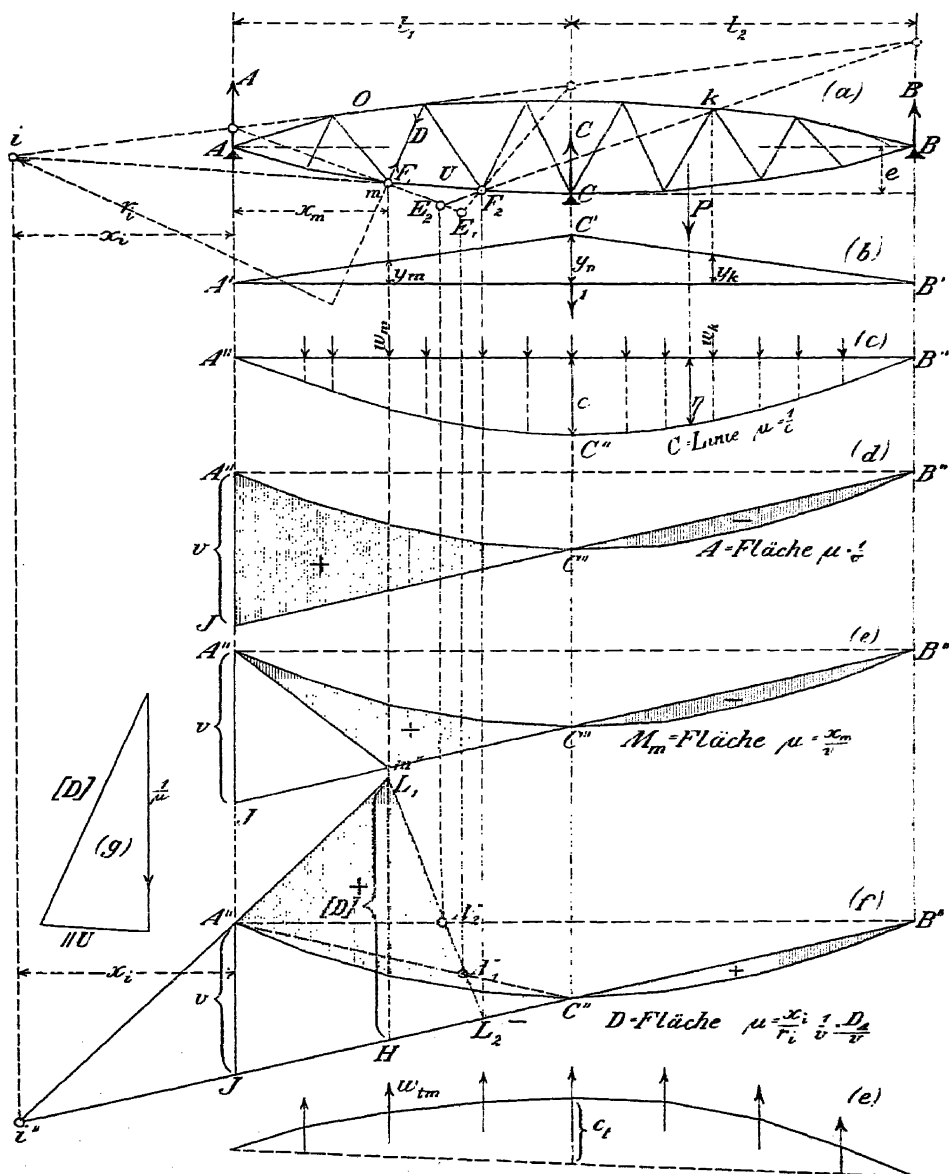



Fig. 318.

welches nur von dem Verhältniss $\eta : c$ abhängig ist, ohne Einfluss und aus demselben Grunde leuchtet ein, dass sowohl die Höhe des Momentendreiecks $A''C''B''$ als auch die Polweite des Seilzuges willkürlich gewählt werden dürfen. Aus der C-Linie lassen sich nun mit Leichtigkeit alle übrigen Einflusslinien ableiten.

Anmerkung. Die Gewichte w erscheinen in derselben Form wie beim Zweigelenkbogen, § 7; die früher für gewisse Arten des Fachwerks gezeigten Umformungen der w lassen sich natürlich auch bei durchgehenden Balken verwerthen. Es empfiehlt sich, $F_c : F_m = 1$ anzunehmen. Für Parallelträger mit gleichlangen Feldern setze man $w_m = y_m$.

Noch sei hervorgehoben, dass wir es in Fig. 318[c], des kleinen Maassstabes wegen, unterliessen, den Seilzug durch ein einbeschriebenes Polygon, dessen Ecken den Querträgern entsprechen, zu ersetzen.

118. Die Einflussfläche für den Widerstand A der linken Stütze (Fig. 318[d]) wird als Unterschied des Dreiecks $B''JA''$, dessen Seite $B''J$ durch C'' geht, und der C-Fläche erhalten; ihr Multiplikator ist $\mu = \frac{1}{v}$, wo v gleich Strecke $A''J$. Wäre nämlich der Balken nur in A und B gestützt, so bestände die A-Fläche aus einem Dreiecke $A''JB''$ von der Höhe $\overline{A''J} = 1$, und von diesem Dreieck muss nun der Einfluss von C so in Abzug gebracht werden, dass einer im Stützpunkte C angreifenden Last die Ordinate $A = 0$ entspricht. Der Multiplikator $\frac{1}{v}$ ist erforderlich, weil $\overline{A''J} = v$ ist, statt $\overline{A''J} = 1$.

119. Die M_m-Fläche (Fig. 318[e]) erhält man, indem man auf der Geraden $B''C''$ senkrecht unter m den Punkt m'' bestimmt und die Gerade $A''m''$ zieht. Wäre $A''J = x_m$, so wäre das Dreieck $A''m''B''$ die M_m-Fläche des einfachen Balkens AB und Dreieck $A''m''C''$ die M_m-Fläche des einfachen Balkens AC. Da $\overline{A''J} = v$ ist, muss der Multiplikator $\mu = x_m : v$ eingeführt werden. Zu demselben Ergebniss führt die Ueberlegung, dass rechts von m gelegene Lasten das Moment $M_m = Ax_m$ hervorrufen, weshalb sich rechts von m die M_m-Fläche von der A-Fläche nur durch den Multiplikator unterscheidet. Durch die Momente M_m sind die Gurtkräfte gegeben.

120. Die D-Fläche in Figur 318[f] ergiebt sich aus ähnlichen Ueberlegungen wie sie in No. 118 und 119 angestellt worden sind. Der auf die $A''B''$ als Nullachse bezogene Linienzug $A''L_1L_2B''$ lässt sich als die D-Linie des einfachen Balkens AB auffassen, und der auf die Nullachse $A''C''$ bezogene Linienzug $A''L_1L_2C''$ als D-Linie des einfachen Balkens $A''C''$. Die Geraden $A''L_1$ und $B''L_2$ müssen sich daher senkrecht unter dem Treffpunkte i der Gurtstäbe O und U

schneiden, und die Punkte N_1, N_2, in denen $L_1 L_2$ von den Geraden $A''B''$ bezieh. $A''C''$ geschnitten wird, müssen senkrecht unter den Belastungsscheiden E_1 bezieh. E_2 liegen, welche man erhält, indem man D als Füllungsstab eines einfachen Balkens AC, bezieh. eines einfachen Balkens AD ansieht. Damit ist der Punkt L_1 auf dreifache Weise bestimmt. Treten nur rechts von r Lasten auf, so greift links von dem durch die Stäbe O, D, U geführten Schnitt nur die äussere Kraft A an und die Momentengleichung in Bezug auf Punkt i lautet:

$$- D r_i - A x_i = 0;$$

sie liefert: $D = - A \frac{x_i}{r_i}$ und führt zu den in der Figur 318[f] angegebenen Vorzeichen der D-Fläche. Auch lehrt sie, dass der Multiplikator

$$\mu = \frac{x_i}{v r_i} = \frac{D_A}{v}$$

ist, wo D_A der absolute Werth der durch $A = 1$ im fraglichen Füllungsstabe erzeugten Spannkraft bedeutet.

Eine vierte, besonders einfache Bestimmungsweise des Punktes L_1 ergiebt sich schliesslich aus dem früher bewiesenen Gesetze, dass die Strecke $L_1 H$ im Falle $\mu = 1$ gleich der durch Zerlegung von $P = 1$ nach den Richtungen von U und D gewonnenen Seitenkraft $[D]$ sein muss*), bei Auftreten eines Multiplikators μ also gleich der Seitenkraft einer Last $\frac{1}{\mu}$ (Fig. 318[g]).

121. Die Einflussfläche für die Querkraft Q im Felde $F_1 F_2$ zeigt Fig. 319; ihre Aufzeichnung empfiehlt sich bei Untersuchung von Parallelträgern; da hier die Spannkräfte in den Füllungsstäben durch die Querkräfte Q bestimmt sind. Nach Eintragung der Geraden $B''J$ wird $A''L_1 \parallel B''L_2$ gezogen. Der Multiplikator ist $= 1 : v$. Der Beweis wird wie in No. 120 geführt.

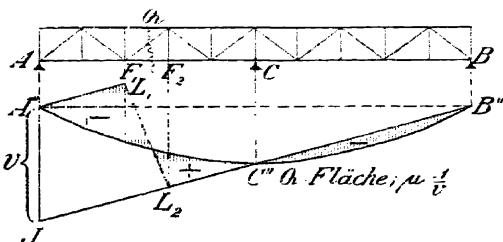



Fig. 319.

Den Kräftemaassstab wird man in Figur 318 und 319 zweckmässig so wählen, dass die Lasteinheit durch eine Strecke von der Länge v dargestellt

*) Vergl. Seite 202, Fig. 198. Bei obenliegender Fahrbahn erfolgt die Zerlegung nach den Richtungen O und D.

wird. Dann wird der Multiplikator der A-Fläche und Q-Fläche $=1$, der M_m-Fläche $=x_m$ und der D-Fläche $=D_A$.

122. Gehört der Stützpunkt C nicht der belasteten Gurtung an, so ist C'' kein Punkt der den Seilzug $A''C''B''$ einbeschriebenen C-Linie. Die Gerade $B''J$ geht aber nach wie vor durch den Punkt C'' und c bedeutet auch hier den Abstand des Punktes C'' von der Schlusslinie $A''B''$. Vergl. Fig. 320, welche einen Theil der A-Fläche darstellt.

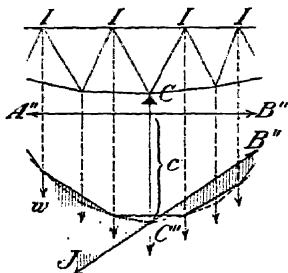



Fig. 320.

123. Der Einfluss einer Temperaturänderung auf den Stützenwiderstand C ist ganz allgemein:

$$C_t = 1 \frac{\delta_{ct}}{\delta_{cc}},$$

wo δ_{ct} und δ_{cc} die Senkungen bedeuten, welche der Knotenpunkt C des einfachen Balkens AB in Folge einer Erwärmung bezieh. in Folge der Belastung $C = -1$ erfährt. Wird eine gleichmässige Erhöhung der Aufstellungstemperatur vorausgesetzt und der Abstand des Punktes C von der Wagerechten AB mit e bezeichnet, so ergiebt sich $\delta_{ct} = \varepsilon t e$. Für δ_{cc} ist der Werth

$$\delta_{cc} = c \frac{1}{EF_c} w_P \cdot \frac{l_1 l_2}{y_n (l_1 + l_2)}$$

einzuführen, unter w_P die Polweite des Seilzuges $A''C''B''$ verstanden. Es muss nämlich die Ordinate c des für den Zustand $C = -1$ gezeichneten Seilpolygons multiplicirt werden: mit $1 : EF_c$, weil die EF_c-fachen Gewichte w benutzt worden sind, mit w_P, weil die Polweite nicht $=1$ gewählt worden ist, und mit $\frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2} : y_n$, weil die Höhe des Momentendreiecks $A'C'B'$ für den Zustand $C = -1$ gleich $\frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2}$ statt $= y_n$ ist. In Folge dessen ergiebt sich der Stützenwiderstand

$$(1) \qquad C_t = \frac{\varepsilon E F_c e y_n (l_1 + l_2)}{c l_1 l_2 w_P} t,$$

dessen Einfluss auf die Stabkräfte am besten mit Hilfe eines Cremona'schen Kräfteplanes untersucht wird. In der vorstehenden Formel ist w_P als *Zahl* aufzufassen, welche mit dem Maassstabe gemessen wird, nach welchem die *Zahlen* $w = \frac{ys}{r^2}$ aufgetragen worden sind. Die Strecken e, y_n, l_1, l_2, c messe man mit dem Längenmaassstabe der Zeichnung.

In der Regel wird beim durchgehenden Balken der Einfluss einer Temperaturänderung gar nicht berücksichtigt und für unwesentlich erachtet. Dies letztere trifft aber nur bei gleichförmiger Erwärmung zu, und es möge daher noch der wichtige Fall betrachtet werden, dass die obere Gurtung in Folge Sonnenbestrahlung eine um Δt höhere Temperatur annimmt als die untere. Man rechnet dann genügend genau, wenn man der unteren Gurtung und den [illegible] die Aufstellungstemperatur zuschreibt und die Längenänderungen der Obergurtstäbe (zunächst für $\varepsilon = 1$) nach der Formel $\Delta s = s \Delta t$ bestimmt. Nun ermittle man die Gewichte $w_t = -\frac{\Delta s}{r} = -\frac{s \Delta t}{r}$ der unteren Knotenpunkte, verbinde dieselben durch ein Seilpolygon (Polweite $= w_{tP}$) und messe unter C die Ordinate c_t (Fig. 318[e]). Man findet dann $\delta_{ct} = -\varepsilon w_{tP} c_t$ und

$$C_t = -\frac{\varepsilon E F_c c_t y_n (l_1 + l_2)}{c l_1 l_2} \frac{w_{tP}}{w_P} \Delta t.$$

w_{tP} ist eine Zahl, welche mit dem Maassstabe gemessen werden muss, nach welchem die Zahlen w_t aufgetragen worden sind.*) Ist die obere Gurtung um Δt kälter als die untere, so entsteht ein positives C_t.

§ 13.

Durchgehender Balken mit vier Stützpunkten.

124. Die Widerstände der Endstützen. Als statisch nicht bestimmbare Grössen führen wir die Widerstände $X_a = A$ und $X_b = B$ der Endstützen ein, weisen den Angriffspunkten derselben die Ordnungsziffern a und b zu und erhalten mit dem auf Seite 146 erklärten allgemeinen Bezeichnungen:

$$(1) \quad \begin{cases} \delta_a = P_m \delta_{ma} - A \delta_{aa} - B \delta_{ab} + \delta_{at} \\ \delta_b = P_m \delta_{mb} - A \delta_{ba} - B \delta_{bb} + \delta_{bt}, \end{cases}$$

wo δ_a, δ_b die lothrechten Verschiebungen sind, welche die Punkte a, b in Folge der Nachgiebigkeit der Widerlager gegen die durch die beiden mittleren Stützpunkte bestimmte Gerade erfahren; sie werden in der Regel gleich Null gesetzt.

Das statisch bestimmte Hauptsystem (Zustand $A = 0$, $B = 0$) ist ein Balken mit über die Stützen C_1', C_2' ragenden Enden; seine Biegungslinien, gezeichnet für die Zustände $A = -1$, $B = -1$, liefern die Verschiebungen δ_{ma}, δ_{aa}, δ_{ba}, δ_{mb}, δ_{ab}, δ_{bb}.

*) In der Regel empfiehlt es sich, für die verhältnissmässig grossen Gewichte w_t einen anderen Maassstab zu wählen, wie für die Gewichte w.

Die Momentenfläche des Zustandes $A = -1$ besteht aus einem Dreieck I (Fig. 321[b]) von der Höhe $-1 \cdot l_1$, mit dessen Hilfe die w-Kräfte genau so berechnet werden, wie im vorigen Paragraphen. Beispielsweise ist bei Vernachlässigung der Formänderung der Füllungsstäbe das Gewicht des Knotens k: $w_k' = -\frac{y_k' s_k}{r_k^2} \frac{F_c}{F_k}$. Die Gewichte w' sind negativ; es entspricht ihnen also ein nach oben gebrochener Seilzug I*), dessen rechte Endseite als Biegungslinie des spannungslosen

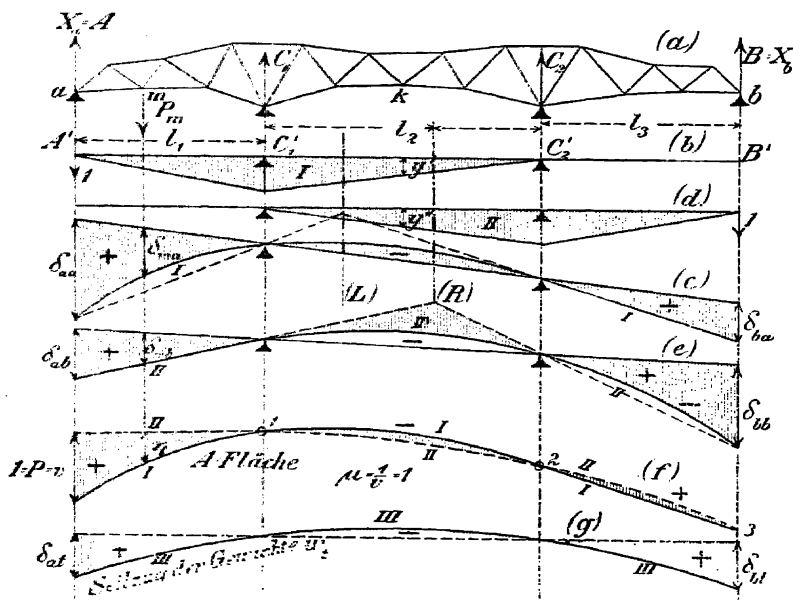



Fig. 321.

Trägertheiles $C_2'B'$ — der nur eine Drehung, aber keine Formveränderung erfährt — aufzufassen ist. Nach Eintragung der durch die Stützpunkte $C_1'C_2'$ bestimmten Schlusslinie ergiebt sich die in Fig. 321[c] schraffirte Fläche als Biegungsfläche für den Zustand $A = -1$; sie liefert die Verschiebungen δ_{ma}, δ_{aa}, δ_{ba}.

Ganz in derselben Weise wird die Biegungsfläche für den Zustand $B = -1$ erhalten und damit δ_{bb}, δ_{mb}, δ_{ab} gewonnen (wobei die Zeichenprobe $\delta_{ab} = \delta_{ba}$ zu beachten ist), so dass jetzt alle Werthe gegeben sind, durch welche der Einfluss einer Last P_m bestimmt ist.

*) In Fig. 321 zeichneten wir der Einfachheit wegen Seilkurven.

Dieser ergiebt sich aus den Gleichungen

$$(2)\qquad \begin{cases} 0 = P_m \delta_{ma} - A\delta_{aa} - B\delta_{ab} \\ 0 = P_m \delta_{mb} - A\delta_{ba} - B\delta_{bb} \end{cases}$$

und zwar erhält man A und B als lineare Funktionen der Veränderlichen δ_{ma}, δ_{mb}. Beispielsweise wird

$$(3)\qquad A = K_a \delta_{ma} + K_b \delta_{mb},$$

wo K_a und K_b feste, von der Lage der Last P unabhängige Werthe sind, und dafür darf man auch schreiben: $A = K_a(\delta_{ma} + K'\delta_{mb})$, wo K' ein neuer Festwerth. Da nun nach diesem Gesetze A proportional der um $K'\delta_{mb}$ vermehrten Ordinate δ_{ma} ist, da ferner einer im Stützpunkte C_1 oder C_2 angreifenden Last P der Werth $A = 0$ entspricht, und da endlich die im Stützpunkte A wirksame Last P den Gegendruck $A = P$ hervorruft, so ergiebt sich die folgende einfache Darstellungsweise der A-Fläche (Fig. 321[f]).

Man zeichne den Seilzug I der Gewichte $w' = \frac{y's}{r^2}\,\frac{F_c}{F}$ mit beliebiger Polweite und führe hierauf das die Gewichte $w'' = \frac{y''s}{r^2}\,\frac{F_c}{F}$ verbindende Seilpolygon II durch die Punkte 1, 2 und 3, in denen Polygon I die Senkrechten durch die Stützen C_1, C_2, B schneidet. Die von beiden Seilzügen eingeschlossene Fläche ist die gesuchte A-Fläche. Mit den aus Fig. 321[f] ersichtlichen Bezeichnungen η und v erhält man:

$$(4)\qquad A = P\frac{\eta}{v}$$

und, wenn die Lasteinheit P durch eine Strecke von der Länge v dargestellt wird, was hier vorausgesetzt werden möge, $A = \eta$.

125. Temperaturänderungen bleiben bei durchgehenden Balken meistens unberücksichtigt. Will man aber den Einfluss der Sonnenbestrahlung der oberen Gurtung prüfen, so zeichne man das Seilpolygon (III) der Gewichte $w_t = \frac{s\Delta t}{r}$ (vergl. No. 123), Fig. 321[g], trage die Schlusslinie ein und messe bei A und B die Ordinaten δ_{at}, δ_{bt}. Zur Berechnung von A_t und B_t dienen dann die aus den Formeln 1 abgeleiteten Gleichungen:

$$(5)\qquad \begin{cases} 0 = -A_t\delta_{aa} - B_t\delta_{ab} + \varepsilon E F_c \delta_{at}\dfrac{w_{tP}}{w_P} \\ 0 = -A_t\delta_{ba} - B_t\delta_{bb} + \varepsilon E F_c \delta_{bt}\dfrac{w_{tP}}{w_P}, \end{cases}$$

wobei vorausgesetzt ist, dass die Seilpolygone I, II in den Figuren 321 c, e mit derselben Polweite w_P gezeichnet sind, der Seilzug III hin-

gegen mit der Polweite w_{tP}. w_P und w_{tP} werden mit den Maassstäben gemessen, in denen die w', w'' bezieh. die w_t aufgetragen worden sind.*)

126. Untersuchung einer Seitenöffnung. Aus der Einflusslinie für A, welche zweckmässig auf eine wagerechte Nulllinie ($J C_1'' C_2'' B''$ in Fig. 322) bezogen wird, lassen sich nun alle zur Berechnung der ersten Oeffnung erforderlichen Einflussflächen auf dieselbe Weise ableiten, wie dies im § 12 für den Träger mit drei Stützen geschehen ist. Die Figuren 322$^{b, c, d}$ sind ohne weiteres verständlich, wenn be-

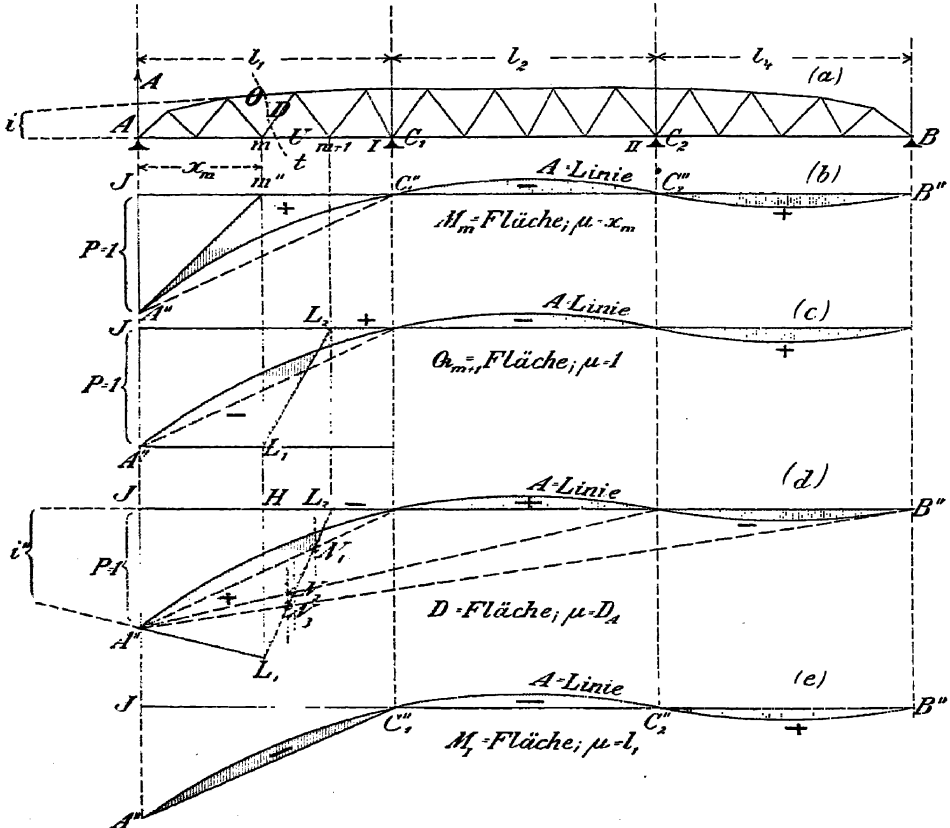



Fig. 322.

achtet wird, dass der Einfluss der rechts vom Schnitte tt gelegenen Lasten auf das Moment M_m, die Querkraft Q_{m+1} und die Spannkraft D proportional dem Stützenwiderstande A ist, weil dann links von tt nur die äussere Kraft A angreift, und dass alle Einflussflächen in die einem einfachen Balken $A C_1$ entsprechenden übergehen müssen, sobald die

*) Vergl. die Anmerkung auf Seite 337.

gebrochene A-Linie durch die Gerade $A''C_1''$ (d. i. die A-Linie des einfachen Balkens AC_1) ersetzt wird.

Um die *M_m-Fläche* zu erhalten, bestimme man m'' senkrecht unter m und ziehe die Gerade $A''m''$. Multiplikator $= x_m$.

Die *Q-Fläche* für das Feld $m - (m+1)$ entsteht nach Ziehen der wagerechten Geraden $A''L_1$ durch Eintragung der Geraden $L_2 L_1$. Multiplikator $= 1$.

Der Punkt L_1 der *D-Fläche* ist in Fig. 322[d] auf vierfache Weise bestimmt worden, nämlich mittels der Bedingung, dass der Schnittpunkt i'' von $L_1 A''$ und $B''J$ senkrecht unter dem Treffpunkte i der Gurtstäbe O und U liegen muss, sodann mit Hilfe der den einfachen Balken AC_1, AC_2, AB entsprechenden Nullpunkte N_1, N_2, N_3.*) Schliesslich könnte auch die Strecke HL_1 mit Hilfe von [D], vergl. Fig. 318 f u. g, ermittelt werden.

In Fig. 322[e] wurde noch mit Hilfe der A-Linie die Einflussfläche für das Moment M_{C1} (*Stützenmoment*), welches wir in der Folge kürzer mit M_I bezeichnen wollen, ermittelt; der Multiplikator ist $= l_1$; und in derselben Weise liesse sich mit Hilfe der B-Linie die Einflussfläche für das Stützenmoment $M_{C2} = M_{II}$ herleiten. In der Regel wird man es mit einem in Bezug auf die Mitte symmetrischen Träger zu thun haben; dann ist die M_{II}-Linie das Spiegelbild der M_I-Linie.

Zwischen den Momenten M_I und M_{II} besteht eine für die folgenden Untersuchungen wichtige Beziehung. Bringt man nämlich nur eine rechts von C_2 und im Abstande ξ von C_2 angreifende Last auf (Fig. 323), so entspricht dieser nach Fig. 321[c] der Werth $\delta_{ma} = \frac{\xi \delta_{ba}}{l_3}$ und die erste der Gleich. (1) geht (wegen $\delta_{ab} = \delta_{ba}$) mit $\delta_a = 0$, $\delta_{at} = 0$ über in:

$$0 = P\delta_{ba}\frac{\xi}{l_3} - A\delta_{aa} - B\delta_{ba};$$

sie lässt sich mit Hilfe der Gleichungen

$$Al_1 = M_I \text{ und } Bl_3 - P\xi = M_{II}$$

umformen in

$$\frac{M_{II}}{M_I} = -\frac{l_3}{l_1}\frac{\delta_{aa}}{\delta_{ba}}$$

und führt zu dem wichtigen Gesetze:

*Wird nur eine Aussenöffnung belastet, so nimmt das Verhältniss $M_{II} : M_I$ einen von der Grösse und Lage der Lasten unabhängigen Werth an.***)

---

*) Die Hilfslinien wurden in Fig. 322 fortgelassen. Vgl. dafür Fig. 318 *a* u. *f*.

**) Kennt man also den zur Oeffnung l_3 gehörigen Zweig der M_I-Linie, so kann man sofort den entsprechenden Zweig der M_{II}-Linie zeichnen, oder

Die Momentenlinie der Oeffnung l_2 besteht also, falls nur die Oeffnung l_3 belastet wird, aus einer durch einen festen Punkt L gehenden Geraden, und die Lage dieses Punktes kann auf die in Fig. 323 gezeigte Weise ermittelt werden. Man findet nämlich:

$$- M_{II} : M_I = e' : e = \operatorname{cotg} \beta : \operatorname{cotg} \alpha = \left(\frac{l_3}{\delta_{ba}}\right) : \left(\frac{l_1}{\delta_{aa}}\right)$$

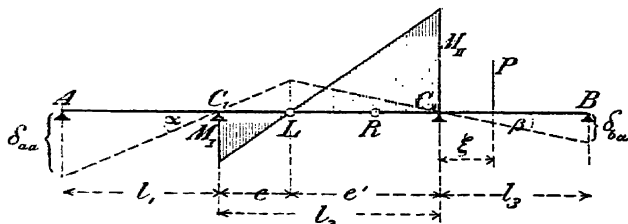



Fig. 323.

Ganz in derselben Weise lässt sich mit Hilfe von δ_{bb} und δ_{ab} der feste Punkt R bestimmen, durch welchen im Falle ausschliesslicher Belastung der Oeffnung l_1 die Momentengerade der Oeffnung l_2 geht. Man nennt die Punkte L und R *Festpunkte*, die ihre Lage bestimmenden Lothrechten sind in Fig. 321 *c* und *e* (strichpunktirt) eingetragen und mit (L), (R) bezeichnet worden.

In der Folge werden wir für die Verhältnisse zwischen den Strecken, in welche die Oeffnung l_2 durch die Festpunkte zerlegt wird, die Bezeichnungen einführen:

$$\frac{e'}{e} = \frac{\overline{L C_2}}{L C_1} = \varkappa; \quad \frac{\overline{R C_1}}{R C_2} = \varkappa'.$$

Wir erhalten dann, je nachdem nur die rechte oder nur die linke Aussenöffnung belastet wird,

$$M_{II} = -\varkappa M_I \text{ bezw. } M_I = -\varkappa' M_{II}.$$

127. Untersuchung der Mittelöffnung, Fig. 324. Wir setzen zunächst voraus, dass die Mittelöffnung durch die Knotenpunkte in gleiche Felder zerlegt wird, und zeigen, wie sich alle Einflusslinien aus einer Linie ableiten lassen, deren Ordinaten die den verschiedenen Lastlagen entsprechenden Werthe $\frac{1}{l_2} \cdot (M_{II} - M_I)$ angeben. Diese in Fig. 324 dargestellte, auf eine wagerechte Nulllinie $A'' B''$ bezogene, von A'' bis B'' sich erstreckende Hilfslinie ist durch die bereits in der vorigen

---

umgekehrt. Hat man also innerhalb Oeffnung l_3 einen Belastungszug so aufgestellt, dass M_I (absolut genommen) möglichst gross ist, so entspricht derselben Zugstellung auch ein Grösstwerth von M_{II}.

Untersuchung gefundenen Einflusslinien für M_I und M_{II} bestimmt; sie wird so aufgetragen, dass ihr Multiplikator $= 1$ ist.*)

Wir beginnen mit den *Querkräften* Q und finden für das m^{te} Feld (nach Band I, Seite 130, Gleich. 2):

$$(6) \qquad Q_m = Q_{om} + \frac{M_{II} - M_I}{l_2},$$

wo Q_{om} die Querkraft für das Feld $(m - 1) - m$ eines einfachen Balkens $I - II$ bedeutet. Die aus Gleich. 6 gefolgerte Darstellung der Q_m-Fläche zeigt Figur 324; sie ist ohne weitere Erklärung verständlich und beweist, dass sämmtliche Q-Flächen durch die beiden festen Geraden IJ'' und IIJ' und durch die $(M_{II} - M_I) : l_2$-Linie bestimmt sind. Man

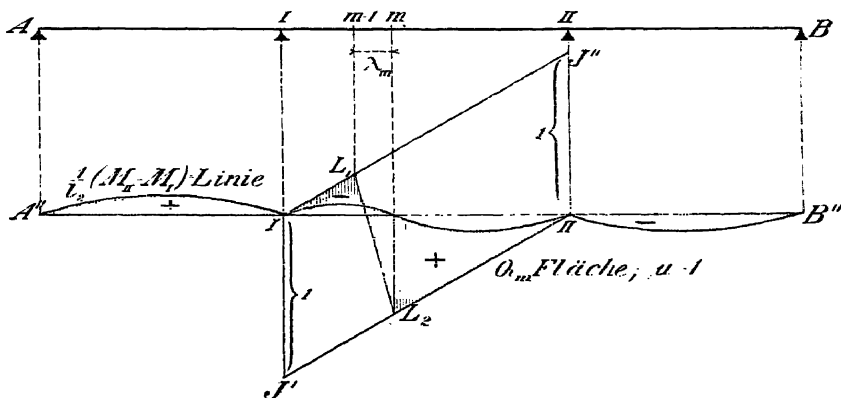



Fig. 324.

braucht nur die zu den verschiedenen Feldern gehörigen Geraden $L_1 L_2$ einzutragen. Ist dies geschehen, so lassen sich nach der Gleichung

$$(7) \qquad \frac{M_m}{\lambda} = \frac{M_{m-1}}{\lambda} + Q_m$$

die $M : \lambda$-*Flächen* schrittweise zeichnen, wobei von der bereits durch die $M_I : l_1$-Fläche bestimmten $M_I : \lambda$-Fläche ausgegangen wird. Sind aber die Grenzwerthe der $M : \lambda$ mit Hilfe der Einflusslinien ermittelt, so lassen sich die Grenzwerthe der Gurtkräfte in bekannter Weise angeben.

Auch die Einflusslinien für die *Füllungsstäbe* können mit Hilfe der $M : \lambda$-Linien und unter Verwerthung des *Zimmermann*'schen Verfahrens

*) Man betrachte die schraffirte Fläche in Figur 322e als $M_I : l_1$-Fläche ($\mu = 1$) und multiplicire ihre Ordinaten zeichnerisch mit $l_1 : l_2$. Ebenso ermittele man $M_{II} : l_2$.

(Band I, Seite 257 und Seite 332) schnell gezeichnet werden. In Fig. 325, welche einen Theil eines Ständerfachwerks mit obenliegender Fahrbahn vorstellt, ist z. B. gezeigt worden, wie man aus den Ordinaten η' und η'' der $M_m:\lambda$-Linie bezieh. $M_{m-1}:\lambda$-Linie die irgend einer Lastlage P entsprechenden Ordinaten η_D und η_V der D_m-Linie bezieh. V_m-Linie bestimmen kann.

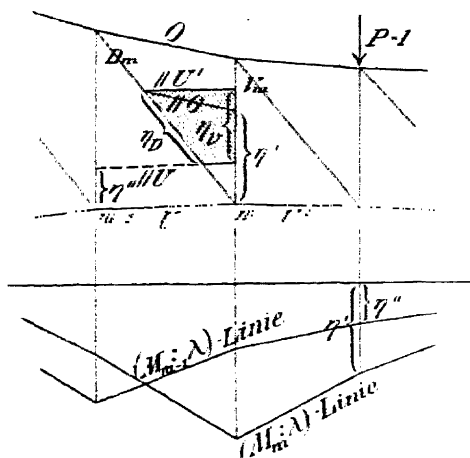



Fig. 325

Es empfiehlt sich nun, nur die zwischen den Stützen I und II liegenden Theile der Einflusslinien aufzutragen und zur Ermittelung des Einflusses der auf die Mittelöffnung aufgebrachten Lasten zu benutzen.*) Der Einfluss der Belastung der Seitenöffnungen auf die Stabkräfte der Mittelöffnung lässt sich weit schneller wie folgt finden.

Man nehme $M_{II}=0$ und $M_I=1$ an und bestimme für diesen in Figur 326 dargestellten Fall (links eingespannter und rechts mit $\frac{1}{l_2}$ belasteter Freiträger) die Spannkräfte S_I sämmtlicher Stäbe der Mittelöffnung — beispielsweise

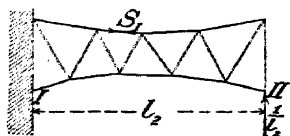



Fig. 326.

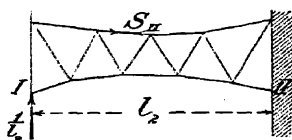



Fig. 327.

mit Hilfe eines Cremona'schen Kräfteplanes. Hierauf untersuche man in derselben Weise den die Spannkräfte S_{II} liefernden Belastungszustand $M_I=0$, $M_{II}=1$, Fig. 327. Man findet dann den Einfluss der Stützen-

*) Häufig wird allerdings bei Belastung der positiven und negativen Beitragsstrecken der Mittelöffnung ein Theil eines Fahrzeuges auf eine der Seitenöffnungen zu stehen kommen (Band I, Seite 135, Fig. 126); der Einfluss dieses Theiles wird dann einfach vernachlässigt — ein Verfahren, welches aus den in Band I, S. 135, No. 89 beigebrachten Gründen dringend zu empfehlen ist.

momente auf irgend eine Stabkraft S:

$$S' = S_I M_I + S_{II} M_{II} \tag{6}$$

und ist jetzt im Stande, die Wirkung der auf die Aussenöffnungen aufgebrachten Lasten schnell festzustellen. Wird zunächst *nur die rechte Aussenöffnung* belastet, so ist (nach No. 126, S. 342) $M_I = -\frac{1}{\varkappa} M_{II}$*) und es folgt:

$$S' = M_{II}\left(-\frac{S_I}{\varkappa} + S_{II}\right),$$

d. i. ein Ausdruck, dessen Grösstwerth mit Hilfe der M_{II}-Linie festgestellt werden kann. Ganz ebenso behandelt man den Fall *ausschliesslicher Belastung der linken Aussenöffnung.* Hier bringt man S' mit Hilfe von $M_{II} = -\frac{1}{\varkappa'} M_I$ auf die Form:

$$S' = M_I\left(S_I - \frac{S_{II}}{\varkappa'}\right) \tag{7}$$

und berechnet es mittels der M_I-Linie.

In der Regel werden die beiden so gefundenen Werthe S' verschiedene Vorzeichen haben. Der eine ist dann ein Beitrag zu S_{max}, der andere zu S_{min}.

Schliesslich sei noch darauf hingewiesen, dass die Spannkräfte S_I und S_{II} auch dazu benutzt werden können, auf eine recht einfache Weise die Einflusslinien für die Stabkraft S aus der M_I-Linie und der M_{II}-Linie abzuleiten. Man benutze dann die Beziehung

$$S = S_o + S_I M_I + S_{II} M_{II}, \tag{8}$$

in welcher S_o die Spannkraft für $M_I = 0$ und $M_{II} = 0$ bedeutet, d. h. für den Fall, dass die Mittelöffnung durch Beseitigung der den Stützpunkten C_1 und C_2 gegenüberliegenden Gurtstäbe in einen einfachen Balken verwandelt wird. *Dieses Verfahren besitzt den Vorzug, ganz allgemein zu sein; es ist nicht an die Voraussetzung gleicher Feldweiten gebunden.*

128. Die Widerstände der Mittelstützen. Es seien $r-1$, r, $r+1$ drei aufeinander folgende Stützpunkte eines über beliebig viele Stützen greifenden Balkens, M_{r-1}, M_r, M_{r+1} die Stützenmomente, C_{r-1},

---

*) Wir drücken M_I durch M_{II} aus, weil die M_{II}-Linie innerhalb der fraglichen Oeffnung grössere Ordinaten besitzt, als die M_I-Linie, und die Bestimmmung des Grösstwerthes von M_{II} daher schärfere Ergebnisse liefert.

C_r, C_{r+1} die Stützenwiderstände. C_{or} bedeute den Werth, welchen C_r annehmen würde, wenn sämmtliche Stützenmomente gleich Null wären, wenn also die Trägerstücke l_r und l_{r+1} in einfache Balken verwandelt würden. Ueben die einfachen Balken l_r und l_{r+1} auf die Stütze r beziehungsweise die Drücke B_r und A_{r+1} aus, so ist

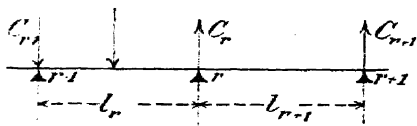



Fig 328.

$$C_{or} = B_r + A_{r+1}.$$

Nun ist die Querkraft für einen unmittelbar links bezieh. rechts von r gedachten Querschnitt des durchgehenden Balkens:

$$Q_1 = -B_r + \frac{M_{r-1} - M_r}{l_r} \text{ bezieh. } Q_2 = +A_{r+1} + \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}}$$

und man erhält daher, wegen $Q_2 = Q_1 - C_r$, den allgemeinen Ausdruck:

$$C_r = C_{or} + \frac{M_{r-1} - M_r}{l_r} + \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}}.$$

Hiernach ergiebt sich für den Stützenwiderstand C_1 des Trägers mit drei Oeffnungen (da das Moment M für die Endstütze gleich 0 ist) der Werth

$$C_1 = C_{o1} - \frac{M_I}{l_1} + \frac{M_{II} - M_I}{l_2},$$

und es ist deshalb die C_1-Linie bestimmt durch die in Fig. 329 dar-

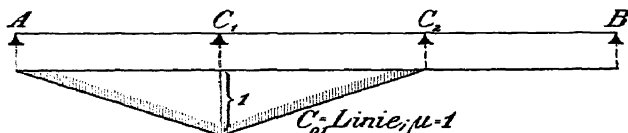



Fig. 329.

gestellte C_{o1}-Linie und die bereits früher benutzten Einflusslinien für $M_I : l_1$ und $(M_{II} - M_I) : l_2$. In gleicher Weise wird auch die C_2-Linie ermittelt.

129. Bei Befolgung der in diesem § vorgeführten Verfahren kommt es sehr darauf an, die A-Linie in nicht zu kleinem Maassstabe und möglichst scharf zu zeichnen, desgleichen die Einflusslinien für die Stützenmomente. Sehr zu empfehlen ist es, die Ordinaten dieser Linien durch Rechnung zu bestimmen, und hierzu beachte man, dass sich die Biegungsflächen in Fig. 321 als Momentenflächen eines an den Enden (A und B) eingespannten Balkens deuten lassen, welcher durch zwei in den Senkrechten durch C_1 und C_2 liegende Gelenke statisch bestimmt gemacht wird.

Ein *Zahlenbeispiel* möge das Verfahren erläutern. — Es liege ein symmetrischer Parallelträger mit den Stützenweiten 20,10^m, 26,80^m, 20,10^m vor, Fig. 330. Die überall gleiche Feldweite sei $\lambda = 3{,}35^m$, die Höhe: $h = 3{,}0^m$.

Die Gewichte w dürfen gleich den Ordinaten y der Momentendreiecke I und II, von denen in Fig. 330 nur das erstere gezeichnet ist, gesetzt werden (vergl. die Anmerkung auf Seite 334), und die Dreieckshöhe wird zweckmässig so gewählt, dass sich für sämmtliche w runde Zahlen ergeben. Wir wählen die Höhe $= 24$.

Fig. 330^c stellt den durch zwei Gelenke statisch gemachten eingespannten Balken $A'B'$ dar, dessen in Fig. 330^d gezeichnete Momentenfläche als die (in einem für unsere Zwecke gleichgiltigen Maassstabe gezeichnete) Biegungsfläche des Zustandes $A = -1$ aufgefasst werden darf; das zwischen den Gelenken

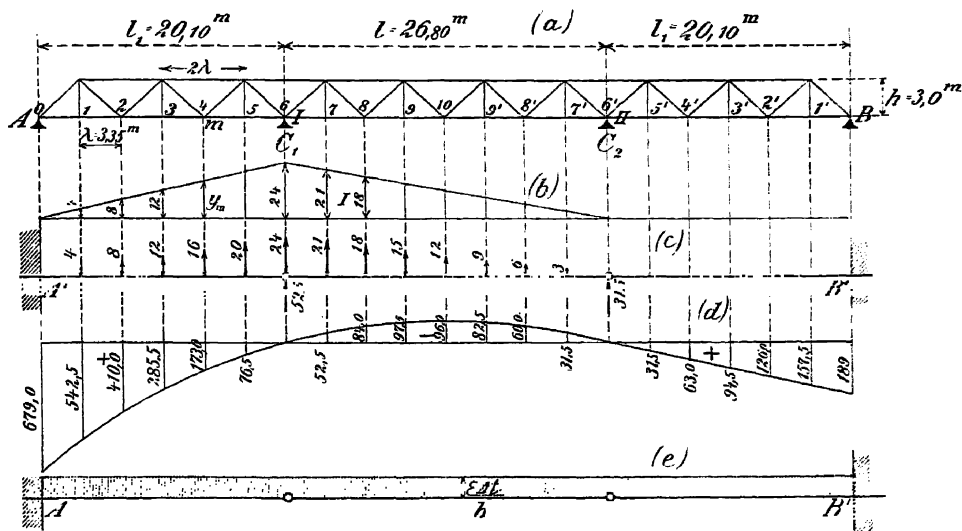



Fig. 330.

liegende, mit den Gewichten 21, 18, ..., 3 belastete Trägerstück wird als einfacher Balken behandelt, es übt auf die Gelenke die nach oben gerichteten Drücke 52,5 und 31,5 aus.

Bei Berechnung der Momente des Trägers $A'B'$ darf die Feldweite $= 1$ gesetzt werden; es ergeben sich dann die in Fig. 330^d eingeschriebenen Zahlen, und man erhält: $\delta_{aa} = 679{,}0$, $\delta_{ba} = 189{,}0$ und z. B. für den Knotenpunkt 4, $\delta_{ma} = 173{,}0$. Die Biegungsfläche des Zustandes $B = -1$ ist das Spiegelbild von Fig. 330^d; sie liefert: $\delta_{ab} = 189{,}0$, $\delta_{bb} = 679{,}0$, $\delta_{mb} = 63{,}0$.*)

Nun lassen sich die Ordinaten der A-Linie mit Hilfe der Gleichungen berechnen:

$$0 = P\delta_{ma} - A\delta_{aa} - B\delta_{ab}, \quad \text{d. i.} \quad 0 = P\delta_{ma} - 679\,A - 189\,B$$
$$0 = P\delta_{mb} - A\delta_{ba} - B\delta_{bb} \quad \text{„} \quad 0 = P\delta_{mb} - 189\,A - 679\,B.$$

*) Man vergl. auch Fig. 321^e.

Man erhält (mit $P = 1$):

$$A = \frac{679\,\delta_{ma} - 189\,\delta_{mb}}{425320}$$

und beispielsweise für den Knotenpunkt 4:

$$A = \frac{679 \cdot 173{,}0 - 189 \cdot 63}{425320} = 0{,}2482.$$

Die auf diese Weise berechneten Ordinaten der A-Linie sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt worden.

Knoten	A	Knoten	A	Knoten	A
0	+ 1,0000	7	— 0,0698	6′	0
1	+ 0,7961	8	— 0,1074	5′	+ 0,0163
2	+ 0,5985	9	— 0,1190	4′	+ 0,0237
3	+ 0,4138	10	— 0,1106	3′	+ 0,0240
4	+ 0,2482	9′	— 0,0884	2′	+ 0,0190
5	+ 0,1081	8′	— 0,0585	1′	+ 9,0104
6	0	7′	— 0,0270	0′	0

Aus der A-Linie wird man nun nach Fig. 322e die $(M_I : l_1)$-Linie ableiten, und aus dieser die $M_I : \lambda$-Linie. Die B-Linie ist das Spiegelbild der A-Linie, die $(M_{II} : l_1)$-Linie diejenige der $(M_I : l_1)$-Linie, und es ist somit alles zur Berechnung der $(M_{II} - M_I) : l$-Linie erforderliche gegeben. Die Ermittelung der Q-Linien und $M : \lambda$-Linien erfolgt nun nach No. 127.

Es möge noch der Einfluss (A_t, B_t) einer Sonnenbestrahlung der oberen Gurtung auf die Stützenwiderstände A und B untersucht werden. Die den Obergurtstäben entsprechenden Einzelgewichte $w_t = \frac{\varepsilon \Delta t s}{r} = \varepsilon \Delta t \frac{2\lambda}{h}$ ersetzen wir durch eine stetige Belastung $\frac{\varepsilon \Delta t}{h}$ f. d. Längeneinheit und finden dann bei A' und B' die gleich grossen Momente:

$$\delta_{at} = \delta_{bt} = \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon \Delta t}{h}\, l \cdot l_1 + \frac{\varepsilon \Delta t}{h}\, l_1 \cdot \frac{l_1}{2} = \frac{\varepsilon \Delta t\, l_1 (l_1 + l)}{2h},$$

welche in die Gleichungen einzusetzen sind:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} 0 = \delta_{at} - A_t \delta_{aa} - B_t \delta_{ab} \\ 0 = \delta_{bt} - A_t \delta_{ba} - B_t \delta_{bb}. \end{cases}$$

Für $\delta_{aa} = \delta_{bb}$ und $\delta_{ab} = \delta_{ba}$ darf man aber nicht die oben gefundenen Werthe 679 und 189 nehmen; man muss vielmehr beachten, dass die Gewichte $w = \frac{ys}{r^2 EF} = \frac{y \cdot 2\lambda}{h^2 EF}$ durch die Gewichte $w = y$ ersetzt worden sind, dass ferner die Höhe des Momentendreiecks I nicht $l_1 = 20{,}10$, sondern $= 24{,}0$ gewählt wurde, und dass schliesslich die Momente in Fig. 330 eine Feldweite $= 1$ voraussetzen. Aus diesem Grunde sind in die Gleichungen I die Werthe einzuführen:

$$\delta_{aa} = \delta_{bb} = 679\,\frac{2\lambda}{h^2 EF}\,\frac{l_1}{24} \cdot \lambda; \quad \delta_{ab} = \delta_{ba} = 189\,\frac{2\lambda}{h^2 EF}\,\frac{l_1}{24}\,\lambda,$$

und es entsteht dann (wegen $A_t = B_t$):

$$\frac{\varepsilon \Delta t\, l_1 (l_1 + l)}{2h} = A_t\,\frac{2\lambda}{h^2 EF}\,\frac{l_1}{24{,}0}\,\lambda\,(679 + 189).$$

Ist $l_1 = 20{,}10$, $l = 26{,}60$, $\lambda = 3{,}35 = \frac{1}{14}(l_1 + l)$, $h = 3{,}0$, $\Delta t = 20°$ Cels., $\varepsilon E = 240^t$ f. d. qm, so ergiebt sich:

$$A_t = 416\,F,$$

wo F den mittleren Gurtquerschnitt bedeutet. Wäre z. B. $F = 130\,qcm = 0{,}013\,qm$, so würde $A_t = 416 \cdot 0{,}013 = 5{,}4^t$ werden.

§ 14.

Durchgehender Balken mit beliebig vielen Stützen.

130. Die Elasticitätsgleichungen. Ein über $(n+1)$ Stützpunkte greifender, nirgends durch ein Gelenk unterbrochener Balken ist $(n-1)$-fach statisch unbestimmt, weil es der Beseitigung von $(n-1)$ Stützen bedarf, um diesen Träger in einen statisch bestimmten zu verwandeln. Die Untersuchung dieses Balkens soll zunächst ganz allgemein durchgeführt werden, ohne Rücksicht darauf, ob ein Fachwerk oder ein vollwandiger Träger vorliegt.

Drei beliebige aufeinander folgende Stützpunkte mögen die Ordnungsziffern $r-1$, r, $r+1$ tragen, ihre wagerechten Abstände seien l_r, l_{r+1}, Fig. 331. Die Geraden $r-(r-1)$ und $r-(r+1)$, welche den Punkt r mit den benachbarten Stützpunkten verbinden, nennen wir das r^{te} *Geradenpaar*, und den Winkel, um welchen sie sich in Folge des

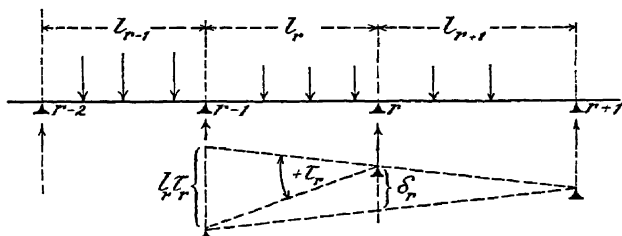



Fig. 331.

Nachgebens der Widerlager gegen einander drehen, bezeichnen wir mit τ_r. Bedeutet δ_r die nach oben positiv genommene lothrechte Verschiebung des Stützpunktes r gegen die Punkte $(r-1)$ und $(r+1)$, so besteht die Gleichung

$$(1)\qquad l_r\tau_r = \delta_r \frac{l_{r+1} + l_r}{l_{r+1}}, \text{ d. h. } \tau_r = \delta_r \frac{l_{r+1} + l_r}{l_r l_{r+1}},$$

welche gestattet, aus einem beobachteten δ_r auf die Drehung τ_r zu schliessen. Drückt man nun andrerseits τ_r durch die auf den Balken wirkenden Kräfte und die Temperaturänderungen aus, so erhält man eine Elasticitätsbedingung, und es leuchtet ein, dass sich durch Wieder-

holung dieses Verfahrens ebenso viele Gleichungen aufstellen lassen, als Mittelstützen vorhanden sind — im ganzen also $(n-1)$ Bedingungen.

Als statisch nicht bestimmbare Grössen sollen die Stützenmomente $M_1, M_2, \ldots M_{r-1}, M_r, M_{r+1}, \ldots M_{n-1}$ eingeführt werden, und es kommt daher zunächst darauf an, die Biegungslinien für die Zustände

$$M_1 = -1,\ M_2 = -1,\ \ldots\ldots,\ M_r = -1,\ M_{n-1} = -1$$

aufzutragen, sowie die gegenseitigen Drehungen der den Mittelstützen $1, 2, \ldots r-1, r, r+1, \ldots n-1$ entsprechenden Geradenpaare zu ermitteln. Hierbei bezeichnen wir allgemein mit τ_{pq} die gegenseitige Drehung des p^{ten} Geradenpaares in Folge $M_q = -1$ und erinnern an die aus dem Maxwell'schen Satze folgende Beziehung

$$(2) \qquad \tau_{pq} = \tau_{qp}.$$

Fig. 332[b] zeigt die Momentenfläche für den Zustand $M_r = -1$, erzeugt durch die aus vier Kräften $\left(\frac{1}{l_r}, \frac{1}{l_{r+1}}\right)$ bestehende Belastungseinheit des r^{ten} Geradenpaares.*) Fig. 332[c] sei die zugehörige Biegungslinie, d. i. das Seilpolygon der in bekannter Weise aus dem Momentendreiecke Δ_r berechneten Gewichte w**); die äussersten Seilseiten sind als Biegungslinien der links von $r-1$ und rechts von $r+1$ gelegenen, bei Eintritt des Zustandes $M_r = -1$ spannungslosen Balkenstücke aufzufassen, und

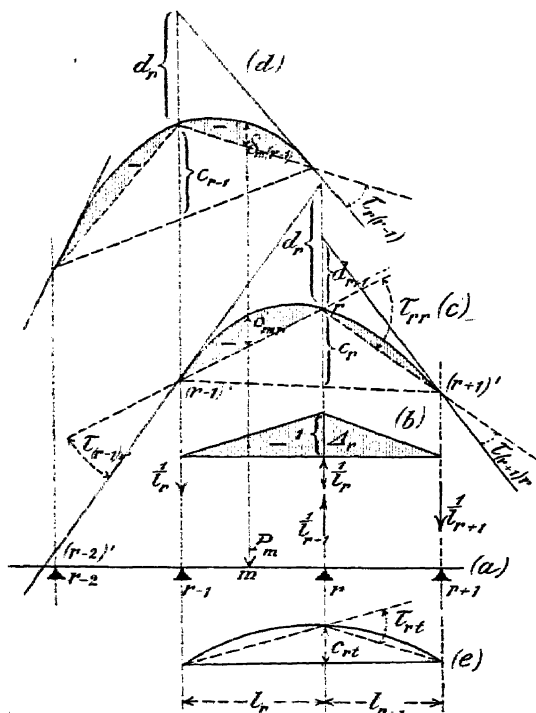



Fig. 332.

*) Vergl. Seite 31—33.

**) Für das Fachwerk erfolgt die Berechnung der w nach § 12, No. 117. Es ist stets zulässig, den Einfluss der Füllungsstäbe zu vernachlässigen, will man ihn berücksichtigen, so ist die Bestimmung der Biegungslinien mit Hilfe von Williot'schen Plänen in der Regel vorzuziehen. Für den vollwandigen Balken, für den obige Gleichungen ebenfalls gelten, wird die Ermittelung der Gewichte w in der zweiten Abtheilung dieses Bandes gezeigt werden.

es leuchtet zunächst ein, dass der fragliche Belastungsfall nur auf die gegenseitige Drehung des $(r-1)^{\text{ten}}$, r^{ten} und $(r+1)^{\text{ten}}$ Geradenpaares von Einfluss ist, dass sich also

$$(3) \qquad \begin{cases} \tau_{(r-2)r} = 0, & \tau_{(r-3)r} = 0, \ldots \\ \tau_{(r+2)r} = 0, & \tau_{(r+3)r} = 0, \ldots \end{cases}$$

ergiebt. Drückt man demnach die Drehung δ_r durch die Lasten P, die statisch nicht bestimmbaren Grössen M und die Temperaturänderungen aus, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (3) die der Stütze r entsprechende Elasticitätsbedingung:

$$(4) \qquad \tau_r = \Sigma P_m \delta_{mr} - \tau_{r(r-1)} M_{r-1} - \tau_{rr} M_r - \tau_{r(r+1)} M_{r+1} + \tau_{rt},$$

wo τ_{rt} den Einfluss der Temperaturänderung bedeutet.

Die Werthe δ_{mr}, $\tau_{r(r-1)} = \tau_{(r-1)r}$, τ_{rr}, $\tau_{r(r+1)} = \tau_{(r+1)r}$ sind durch die Biegungslinie in Figur 332^c gegeben; während sich τ_{rt} mit Hilfe eines die Gewichte w_t verbindenden Seilpolygons in der Form

$$(5) \qquad \tau_{rt} = c_{rt} \frac{l_{r+1} + l_r}{l_{r+1} l_r}$$

darstellen lässt, Fig. 332^c. Werden noch die für den Fall sehr kleiner Formänderungen — der hier ausschliesslich ins Auge gefasst wird — giltigen Beziehungen

$$(6) \qquad \tau_{r(r-1)} = \frac{d_r}{l_r}; \quad \tau_{rr} = c_r \frac{l_{r+1} + l_r}{l_{r+1} l_r}; \quad \tau_{r(r+1)} = \frac{d_{r+1}}{l_{r+1}}$$

eingeführt, so geht (4) über in:

$$(7) \qquad M_{r-1} \frac{d_r}{l_r} + M_r \left(\frac{c_r}{l_r} + \frac{c_r}{l_{r+1}} \right) + M_{r+1} \frac{d_{r+1}}{l_{r+1}} = N_r, \text{ wo}$$

$$(8) \qquad N_r = - \left\{ \Sigma P_m \delta_{mr} + \frac{l_r + l_{r+1}}{l_r l_{r+1}} (\delta_r + c_{rt}) \right\}.$$

Dabei ist das Vorzeichen des Gliedes $\Sigma P_m \delta_{mr}$ umgekehrt worden, *weil von jetzt an unter δ_{mr} stets der absolute Werth der fraglichen Ordinate der Biegungslinie verstanden werden soll.*

Die $(n-1)$-Gleichungen, welche sich nach Art der Gleichung 7 aufstellen lassen, nennen wir die *Grundgleichungen;* wir werden sie später meistens in der bequemeren Form schreiben:

$$(9) \qquad \alpha_r M_{r-1} + \beta_r M_r + \alpha_{r+1} M_{r+1} = N_r,$$

wobei also:

$$(10) \qquad \alpha_r = \tau_{(r-1)r} = \tau_{r(r-1)}; \quad \beta_r = \tau_{rr}; \quad \alpha_{r+1} = \tau_{(r+1)r} = \tau_{r(r+1)}.$$

Ehe wir uns mit der Auflösung dieser Gleichungen beschäftigen, machen wir darauf aufmerksam, dass bis jetzt stillschweigend voraus-

gesetzt worden ist, es seien die Biegungslinien mit der Polweite 1 gezeichnet und die Gewichte w aus den Längenänderungen der Fachwerkstäbe berechnet. Wählt man nun die Polweite $= w_P$, giebt dem Dreieck Δ_r die beliebig gewählte, aber für alle Stützpunkte feste Höhe y_c, und setzt man schliesslich $w = \frac{ys}{r^2}\frac{F_c}{F}$ statt $w = \frac{ys}{r^2 EF}$ (Seite 332), so muss man die Werthe d, c und δ_{mr} noch mit $w_P : EFy_c$ multipliciren, oder — was auf dasselbe hinauskommt — das Glied $\delta_r + c_{rt}$ durch jenen Ausdruck dividiren. Sind ausserdem die Gewichte w_t für $\varepsilon = 1$ berechnet (Seite 337) worden, so muss c_t in (8) noch mit ε multiplicirt werden und man erhält, wenn die Polweite des die Gewichte w_t verbindenden Seilzuges $= w_{tP}$ angenommen wird:

$$(11) \qquad N_r = -\left\{ \Sigma P_m \delta_{mr} + \frac{EF_c(l_r + l_{r+1})\, y_c}{w_P l_r l_{r+1}} \left(\delta_r + \varepsilon c_{rt} \frac{w_{tP}}{w_P}\right)\right\}.$$

Die Strecken δ_{mr}, y_n, δ_r, c_{rt}, l_r, l_{r+1} werden mit ein und demselben Längenmaassstabe gemessen, w_P und w_{tP} sind (ebenso wie die w) Zahlen. EF_c ist eine Kraft, N_r ein Moment.

Verschiebungen der Stützpunkte bleiben meistens unberücksichtigt ($\delta_r = 0$), und auch der Einfluss von Temperaturänderungen wird in der Regel ausser Acht gelassen ($c_{rt} = 0$), obgleich Sonnenbestrahlung der oberen Gurtung auf die Inanspruchnahme von Brückenträgern von wesentlichem Einfluss sein kann. Wird aber nur der Einfluss von Lasten P untersucht, so hat man lediglich darauf zu achten, dass sämmtliche Momentendreiecke Δ dieselbe Höhe y_c erhalten und sämmtliche Seilzüge mit der gleichen Polweite w_P gezeichnet werden; wie gross y_c und w_P gewählt werden, ist dann gleichgültig.

131. Die Festpunkte L und R. Erstes Verfahren zur Auflösung der Elasticitätsgleichungen. Wir verfolgen jetzt nur den Einfluss der Lasten P, nehmen also $\delta_r = 0$ und $c_{rt} = 0$ an; auch setzen wir zunächst voraus, dass nur ausserhalb der Oeffnungen l_r, l_{r+1} Kräfte P auftreten. Die Momentenlinien der Balkentheile l_r, l_{r+1} bestehen dann aus zwei durch die Stützenmomente M_{r-1}, M_r, M_{r+1} bestimmten Geraden mit den Nullpunkten L_r, L_{r+1}, und zwischen jenen drei Momenten gelten die Gleichungen:

$$(12) \qquad \alpha_r M_{r-1} + \beta_r M_r + \alpha_{r+1} M_{r+1} = 0,$$

$$(13) \qquad M_{r-1} = -M_r \frac{a}{b}; \quad M_{r+1} = -M_r \frac{b'}{a'} \text{ (s. Fig. 333)},$$

aus denen sich die einfache Beziehung

$$\beta_r = \alpha_r \frac{a}{b} + \alpha_{r+1} \frac{b'}{a'}$$

ergiebt. Mit Hilfe derselben lässt sich die Lage des einen Nullpunktes leicht bestimmen, sobald die des anderen gegeben ist. Bringt man nämlich die Senkrechten durch L_r und L_{r+1} mit den äussersten Seiten der für den Belastungsfall $M_r = -1$ gezeichneten Biegungslinie in L_r' und L_{r+1}' zum Schnitt, so findet man:

$$\angle\, L_r' r' (r-1)' = \alpha' = \alpha_r \frac{a}{b} \text{*)}; \quad \angle\, L_{r+1}' r' (r+1)' = \alpha'' = \alpha_{r+1} \frac{b'}{a'}$$

also: $\beta_r = \alpha' + \alpha''$ und hieraus folgt, *dass die drei Punkte L_r', r', L_{r+1}' in einer Geraden liegen.***)

Fig. 333.

Wir setzen voraus, dass nur die r^{te} Oeffnung belastet wird und dass die Stützenmomente M_{r-1} M_r auf irgend eine Weise gefunden sind. Innerhalb einer unbelasteten Oeffnung besteht die Momentenlinie aus einer Geraden, Fig. 334. Die Nullpunkte dieser Geraden seien links von der belasteten Oeffnung: L_1, L_2, L_3, ... rechts davon: R_n, R_{n-1}, R_{n-2}, ... Der Punkt L_1 fällt mit dem Stützpunkte 0 zusammen; seine Lage ist

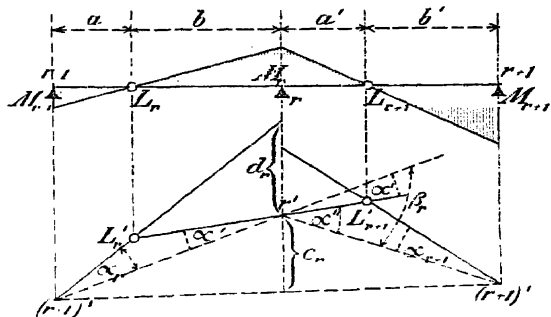
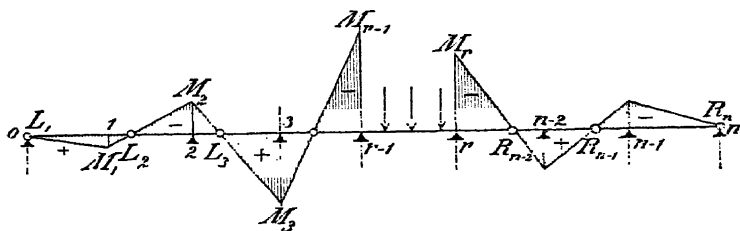



Fig. 334.

also bestimmt, und damit sind auch schrittweise mittels des soeben bewiesenen Gesetzes die Punkte L_2, L_3, ... gegeben. Und ganz auf

*) Man denke daran, dass es sich hier um sehr kleine Formänderungen handelt. In Fig. 333 wurden nur die Punkte $(r-1)'$, r', $(r+1)'$ und die äussersten Seiten der fraglichen Biegungslinie gezeichnet. Vgl. auch Fig. 332c.

**) Ein Sonderfall dieser Beziehung wurde bereits im § 13 gefunden.

dieselbe Weise kann man, von R_n ausgehend, der Reihe nach R_{n-1}, R_{n-2}, . . . finden.

Die Lage der Punkte L und R ist ganz unabhängig von der Belastung des Balkens; sie ist vollständig bestimmt durch die den Zuständen $M_1 = -1$, $M_2 = -1$, . . . entsprechenden Biegungslinien. Es führen deshalb diese Punkte den Namen *Festpunkte;* ihre Ermittelung ist die erste Arbeit, welche bei Untersuchung eines über mehrere Stützen greifenden Balkens auszuführen ist. Kennt man die Punkte L und R, so ist man nach Figur 334 im Stande, den Einfluss der Belastung irgend einer Oeffnung auf die Momente aller übrigen Oeffnungen schnell anzugeben, sobald die Momente für die jene belastete Oeffnung begrenzenden Stützpunkte gefunden sind.

Wir bezeichnen nun mit a_r und b_r bezieh. a_r' und b_r' die Strecken, in welche die Oeffnung l_r durch den Festpunkt L_r bezieh. den Festpunkt R_r zerlegt wird, Fig. 335, setzen

$$(14) \qquad \frac{b_r}{a_r} = \varkappa_r, \quad \frac{b_r'}{a_r'} = \varkappa',$$

und erhalten für den Fall, dass nur rechts von r Lasten auftreten, dass also die Momentenlinie der Oeffnung l_r eine durch den Punkt L_r gehende Gerade ist, die Beziehung:

$$M_r = -\varkappa_r M_{r-1},$$

welche in Verbindung mit der Elasticitätsbedingung:

$$\alpha_{r-1} M_{r-2} + \beta_{r-1} M_{r-1} + \alpha_r M_r = 0$$

zu der Gleichung

$$(15) \qquad \alpha_{r-1} M_{r-2} + \beta_{r-1} M_{r-1} = \varkappa_r \alpha_r M_{r-1}$$

führt, und diese letztere bleibt auch bestehen, wenn zwischen $r-1$ und r Lasten hinzutreten, weil hierdurch das Verhältniss zwischen den Momenten M_{r-2} und M_{r-1} nicht beeinflusst wird. Die Gültigkeit der Gleichung (15) ist nur an die Bedingung gebunden, dass der Träger zwischen 0 und $r-1$ unbelastet bleibt; und ganz ebenso lässt sich zeigen, dass zwischen M_r und M_{r+1} die Beziehung besteht:

$$(16) \qquad \alpha_{r+1} M_{r+1} + \beta_r M_r = \varkappa_r' \alpha_r M_r,$$

sobald rechts von r keine Lasten auf den Balken wirken. Ist also nur die Oeffnung l_r belastet, so gilt sowohl (15) als (16), und die beiden Elasticitätsbedingungen:

$$\alpha_{r-1} M_{r-2} + \beta_{r-1} M_{r-1} + \alpha_r M_r = -\Sigma P_m \delta_{m(r-1)}$$
$$\alpha_r M_{r-1} + \beta_r M_r + \alpha_{r+1} M_{r+1} = -\Sigma P_m \delta_{mr}$$

gehen über in

$$(17)\quad\begin{cases} \varkappa_r M_{r-1} + M_r = -\Sigma P_m \dfrac{\delta_{m(r-1)}}{\alpha_r} = -\Sigma P_m \dfrac{\delta_{m(r-1)}}{d_r} l_r \\ M_{r-1} + \varkappa_r' M_r = -P_m \dfrac{\delta_{mr}}{\alpha_r} = -\Sigma P_m \dfrac{\delta_{mr}}{d_r} l_r; \end{cases}$$

sie führen zu einer sehr einfachen Darstellung der Momente M_{r-1} und M_r.

Trägt man nämlich M_{r-1} und M_r bei $(r-1)$ und r als Ordinaten auf, Figur 335, und verbindet die Endpunkte derselben durch eine

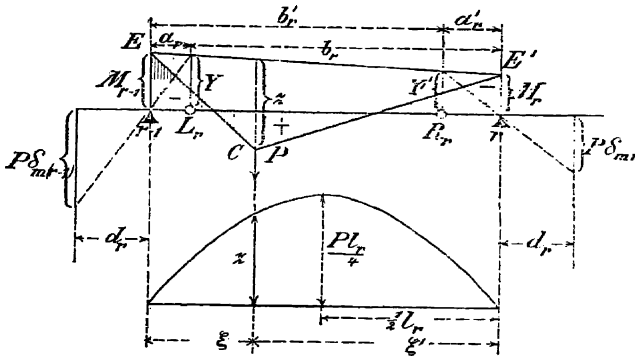



Fig. 335.

Gerade, so sind die Ordinaten dieser Geraden an den Stellen L_r und R_r:

$$Y = M_{r-1}\frac{b_r}{l_r} + M_r\frac{a_r}{l_r} = \frac{a_r}{l_r}(M_{r-1}\varkappa_r + M_r)$$

$$Y' = \frac{a_r'}{l_r} M_r\varkappa_r' + M_{r-1}),$$

woraus mit Beachtung der Gleichungen 17:

$$(18)\qquad Y = -\frac{a_r}{d_r}\Sigma P_m\delta_{m(r-1)};\quad Y' = -\frac{a_r'}{d_r}\Sigma P_m\delta_{mr},$$

und diese Werthe lassen sich leicht zeichnerisch bestimmen. In Fig. 335 ist beispielsweise die Ermittelung von Y und Y' für den Fall eingetragen, dass nur eine Einzellast P wirkt, und damit ist die Aufgabe gelöst, die Zweige $(r-1)-r$ der Einflusslinien für M_{r-1} und M_r zu zeichnen.

Will man den Einfluss der Last $P=1$ nicht nur auf M_{r-1} und M_r, sondern auf sämmtliche Momente der Oeffnung l_r haben, so muss man die in Fig. 335 dargestellte durch Schraffirung hervorgehobene

Momentenfläche auftragen; dieselbe ist bestimmt durch $z = P\frac{\xi\xi'}{l_r}$, denn das Dreieck ECE' ist die Momentenfläche eines einfachen Balkens l_r. Die Strecke z aber wird als Ordinate einer Parabel erhalten, deren Pfeil $= 0{,}25\ Pl_r$ ist.

Jetzt lassen sich alle bei der Untersuchung des Balkens auftretenden Fragen auf dieselbe Weise erledigen, wie bei dem im § 13 behandelten, auf 4 Stützen ruhenden Balken. Zu diesem Zwecke ist es nur erforderlich, für jedes Stützenmoment diejenigen beiden Zweige der Einflusslinien zu zeichnen, welche den durch den fraglichen Stützpunkt getrennten zwei Oeffnungen angehören. Man braucht also die M_1-Linie nur von Stütze 0 bis Stütze 2 zu zeichnen, die M_2-Linie nur von 1 bis 3 u. s. w.

Soll nun beispielsweise die Oeffnung l_r untersucht werden, und besitzt diese Oeffnung gleiche Feldweiten λ, so trage man zwischen $(r-1)$ und r die $(M_r - M_{r-1}) : l_r$-Linie auf, leite aus dieser sämmtliche Q-Linien ab, hierauf, von der $M_r : \lambda$-Linie ausgehend, sämmtliche $M : \lambda$-Linien und schliesslich (nach Seite 344, Fig. 325) die Einflusslinie für die Spannkräfte in den Füllungsstäben. Den Einfluss der Belastung der übrigen Oeffnungen auf die Stabkräfte der Oeffnung l_r findet man mit Hilfe der Gleichung

$$(19) \qquad S = S_{r-1} M_{r-1} + S_r M_r,$$

welche der auf Seite 345 benutzten Gleichung (6) entspricht. Wird z. B. der Einfluss der Belastung einer rechts von l_r gelegenen Oeffnung l_v gesucht, so bestimme man mittels des von Stütze $(v-1)$ bis Stütze v laufenden Zweiges der M_{v-1}-Linie das Moment M_{v-1}, hierauf mittels eines nach Fig. 334 durch die Festpunkte L_{v-2}, L_{v-3}, ... geführten Geradenzuges die Momente M_{v-2}, M_{v-3}, ..., M_r, M_{r-1} und setze die letzteren in die Gleichung (19) ein.

Auch leuchtet ein, dass man durch Anwendung der Gleichung

$S = S_o + S_{r-1} M_{r-1} + S_r M_r$ (entsprechend Formel 8, Seite 345)

die zwischen $(r-1)$ und r gelegenen Zweige der S-Linien gewinnen kann, ein Verfahren, welches nicht an die Bedingung gleich langer Felder gebunden ist.

Ganz besonders einfach gestaltet sich die Untersuchung eines Endfeldes. So kann man z. B. alle zur Behandlung der Oeffnung l_1 erforderlichen Einflusslinien auf die im § 13 No. 126 gezeigte Weise aus der Einflusslinie für den Widerstand A der Endstütze herleiten, nachdem man die A-Linie mit Hilfe der M_1-Linie bestimmt hat. Es liegt hier die Umkehrung der in No. 126 gelösten Aufgabe vor; dort wurde die M_1-Linie aus der A-Linie entwickelt.

132. Zweites Verfahren zur Auflösung der Grundgleichungen:

$$(19) \qquad \alpha_r M_{r-1} + \beta_r M_r + \alpha_{r+1} M_{r+1} = N_r.$$

Wir setzen einen beliebigen Belastungs- und Temperaturzustand voraus, denken die Stützenmomente nach Fig. 336 als Ordinaten aufgetragen, ihre Endpunkte durch die Geraden g_1, g_2, ... verbunden und nennen den auf diese Weise entstandenen Linienzug kurz das *M-Polygon*. Fig. 336 stellt das $(r-1)^{te}$ und r^{te} Feld dieses Polygons dar. Wird die Senkrechte I_r so gezogen, dass sich die Strecken, in welche sie l_r

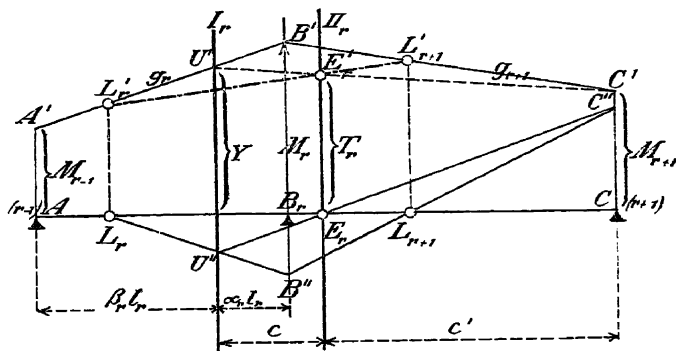



Fig. 336.

zerlegt, zu einander verhalten wie α_r zu β_r, so ist die von der Geraden g_r auf der Senkrechten I_r abgeschnittene Ordinate:

$$(20) \qquad Y = \frac{M_{r-1}\alpha_r + M_r\beta_r}{\alpha_r + \beta_r}$$

und die r^{te} Grundgleichung lässt sich mithin auch schreiben:

$$(21) \qquad (\alpha_r + \beta_r)\; Y + \alpha_{r+1}\, M_{r+1} = N_r.$$

Zieht man nun die Senkrechte II_r so, dass sie die Strecke $l_{r+1} + \alpha_r l_r$ im Verhältniss

$$(22) \qquad c' : c = (\alpha_r + \beta_r) : \alpha_{r+1}$$

theilt, so schneidet die Gerade $U'C'$, welche die Endpunkte von Y und M_{r+1} verbindet, auf II_r die Ordinate

$$(23) \quad T_r = \frac{Yc' + M_{r+1}c}{c' + c} = \frac{Y(\alpha_r + \beta_r) + M_{r+1}\,\alpha_{r+1}}{\alpha_r + \beta_r + \alpha_{r+1}}$$

ab, und es folgt aus der Vergleichung dieses Ausdruckes mit der Beziehung (21) das Gesetz:

Die mit Hilfe der Senkrechten I_r bestimmte Gerade $U'\,C'$ schneidet auf der Senkrechten II_r das gegebene Moment ab:

$$\overline{E_r E_r'} = T_r = \frac{N_r}{\alpha_r + \beta_r + \alpha_{r+1}}. \tag{24}$$

Jetzt werde angenommen, es sei ein Punkt L_r' der Geraden g_r gegeben. Denkt man durch L_r' verschiedene Geraden g_r gelegt, so kann man zu jeder derselben die zugehörige Gerade g_{r+1} finden, indem man von dem Punkte U', in welchem die g_r von der I_r geschnitten wird, durch den festen Punkt E_r' die Gerade $U'\,E_r'\,C'$ zieht und C' mit B' verbindet. Alle die Geraden g_{r+1}, welche in dieser Weise zu verschiedenen Geraden g_r gezeichnet werden können, schneiden sich in einem Punkte L'_{r+1}, welcher auf der durch die Punkte L_r' und E_r' bestimmten Geraden liegt und gefunden wird, indem zu einer beliebigen g_r die zugehörige g_{r+1} gezeichnet und mit der Geraden $L_r'\,E_r'$ zum Schnitt gebracht wird.*)

Uebersichtlicher aber verfährt man, wenn man, von dem senkrecht unter L_r' gelegenen Punkte L_r ausgehend, zunächst auf die Lage von L_{r+1} schliesst. Man legt durch L_r eine beliebige Gerade, welche die Senkrechten I_r und $B'B$ in U'' bezw. B'' schneidet, führt hierauf durch U'' und E_r eine Gerade bis zu ihrem Schnittpunkte C'' mit der Senkrechten durch C und zieht schliesslich die Gerade $C''\,B''$. Letztere bestimmt dann den Punkt L_{r+1}.

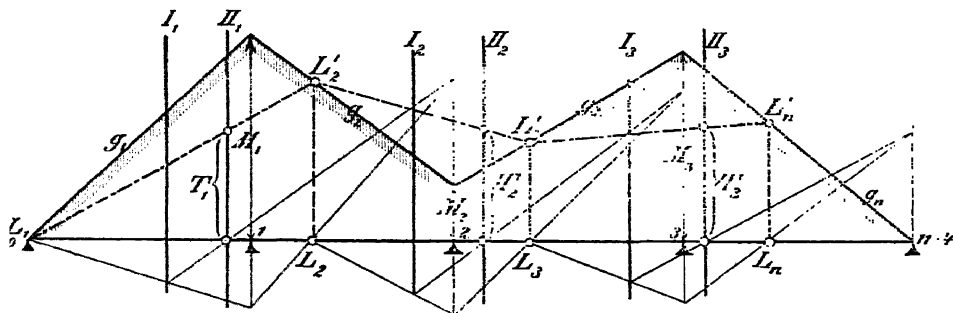



Fig. 337.

Mit Hilfe der vorstehenden Entwickelungen ist man im Stande, das M-Polygon zu zeichnen. Die Gerade g_1, Fig. 337, geht (wegen $M_0 = 0$)

*) Es folgt dies aus dem bekannten Satze der Geometrie der Lage: Bewegen sich die Ecken (U', B', C') eines Dreiecks auf drei Strahlen (I_r, $B'\,B$, $C'\,C$) eines Strahlenbüschels, und gehen hierbei zwei Seiten (g_r und $U'\,C'$) des Dreiecks durch feste Punkte (L_r' und E_r'), so geht auch die dritte Seite (g_{r+1}) durch einen festen Punkt (L_{r+1}'), welcher mit den beiden anderen festen Punkten in einer Geraden liegt.

durch den Stützpunkt 0; es fällt also L_1 mit 0 zusammen. Aus der Lage von L_1 schliesst man in der vorhin beschriebenen Weise auf die Lage von L_2, sodann auf die von L_3, L_4 ..., und zeichnet den Linienzug $L_1 L_2' L_3'$ ..., dessen Seiten auf den Senkrechten II_1, II_2, II_3 ... die gegebenen Momente T_1, T_2, T_3 ... abschneiden. Jetzt ist in jeder Oeffnung ein Punkt L' des M-Polygons bekannt, und da die Gerade g_n nicht nur durch L_n', sondern auch durch den Stützpunkt n gehen muss, so ist der Linienzug g_n, g_{n-1}, ... g_1 bestimmt.

Man kann natürlich auch in der Weise vorgehen, dass man nicht von L_1, sondern von dem in der letzten Oeffnung gegebenen, mit Stützpunkt n zusammenfallenden Punkte R_n ausgeht, in den vorhergehenden Oeffnungen Punkte R_{n-1}, R_{n-2}, ... R_1 auf ähnliche Art bestimmt, wie vorhin die Punkte L_2, L_3, ..., hierauf mit Hilfe der T_{n-1}, T_{n-2}, ... einen Linienzug R'_{n-1} R'_{n-2} ... zeichnet und schliesslich g_1 durch L_1 und R_1' legt. Zur Ermittelung der Punkte R sind (an Stelle der I_r) Senkrechte I_r' zu bestimmen, welche l_{r+1} im Verhältniss $\alpha_{r+1} : \beta_r$ theilen, Fig. 338.

Es ist leicht einzusehen, dass die Punkte L und R mit den früher benutzten Festpunkten übereinstimmen. Zu diesem Zwecke nehme man nur eine einzige Oeffnung belastet an und streiche die von den Temperaturänderungen und Stützensenkungen abhängigen Glieder der Werthe T. Dann gehen die Geraden g der links von der belasteten Oeffnung gelegenen Oeffnungen durch die Punkte L und die Geraden g der rechtsseitigen Oeffnungen durch die Punkte R. Hieraus folgt, dass man die beiden hier mitgetheilten Verfahren zur Ermittelung der Stützenmomente auch miteinander vereinigen kann, so zwar dass man die Punkte L und R auf die früher gezeigte Weise mit Hilfe der Biegungslinien bestimmt und nun das M-Polygon aus den Momenten T ableitet. Dieser Weg ist sehr zu empfehlen bei Aufsuchung des Einflusses von Temperaturänderungen auf einen im übrigen nach No. 131 mittels Einflusslinien zu behandelnden Träger. Die Momente T sind hier durch die Gleichung bestimmt:

$$T_r = \frac{-1}{\alpha_r + \beta_r + \alpha_{r+1}} \frac{\varepsilon E F_c (l_r + l_{r+1})}{l_r l_{r+1}} \frac{y_c}{w_{tP}} c_{rt}.$$

Werden negative T in Fig. 337 oberhalb der Achse $0 - n$ aufgetragen, so sind auch die Stützenmomente negativ, sobald sie durch oberhalb der $0 - n$ liegende Ordinaten dargestellt werden.

In Figur 338 ist noch gezeigt worden, wie die Senkrechten I_r, II_r, I_r' mit Hilfe der Biegungslinie für den Zustand $M_r = -1$ gefunden werden können. II_r geht durch den Schnittpunkt der äussersten Seilseiten, I_r und I_r' gehen durch die Punkte, in denen die Endseiten von

den Schlusslinien $(r + 1)' - r'$ bezieh. $(r - 1)' - r'$ getroffen werden. Der Beweis ist leicht zu führen.

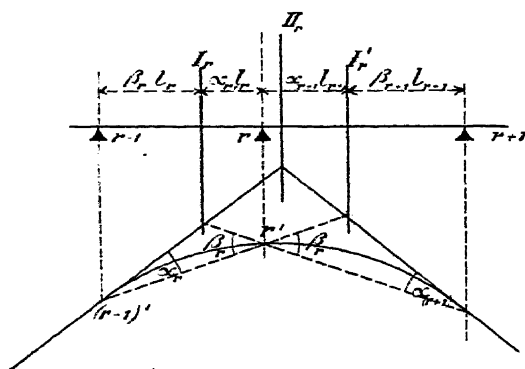



Fig. 338.

Es sei schliesslich noch hervorgehoben, dass das zweite Verfahren, die Elasticitätsbedingungen aufzulösen, insofern von grosser allgemeiner Bedeutung ist, als es die zeichnerische Behandlung von Gleichungen gestattet, welche dieselbe Form haben, wie die Beziehungen

$$\alpha_r M_{r-1} + \beta_r M_r + \alpha_{r+1} M_{r+1} = N_r;$$

und Gleichungen dieser Art begegnet man in der That bei statischen Untersuchungen sehr häufig. Eine besonders wichtige Anwendung wird der den Nebenspannungen gewidmete Theil unseres Buches bringen.

§ 15.

Statisch unbestimmte mehrtheilige Fachwerkbalken mit zwei Stützpunkten.

133. Fachwerke mit im Verhältniss zur Trägerhöhe kleiner Feldweite werden behufs Vermeidung allzusteiler Schrägstäbe häufig in der Weise angeordnet, dass die Verbindung der beiden Gurtungen durch zwei oder mehrere einander durchkreuzende Züge von Füllungsstäben erfolgt. Ist die Anzahl dieser Stabzüge $= n$, so nennt man das Fachwerk ein n-theiliges.

Im Allgemeinen sind derartige Stabgebilde statisch unbestimmt;*) ihre Berechnung erfolgt jedoch in der Regel in der Weise, dass das n-theilige Fachwerk in n eintheilige statisch bestimmte Fachwerke (Fig. 339, 340) zerlegt und jedes dieser letzteren für den n^{ten} Theil der Belastung berechnet wird; sodann werden die Theilfachwerke wieder vereinigt und die Spannkräfte zusammenfallender Stäbe und Stababschnitte addirt. Bei gebrochenen Gurtungen führt jene Zerlegung zu

*) Aufgaben über mehrtheilige statisch bestimmte Fachwerke finden sich im Band I, Seite 221, sowie im § 6 des vorliegenden Bandes.

geknickten Gurtstäben, welche natürlich durch geradlinige zu ersetzen sind. So werden z. B. in Fig. 341 bei Betrachtung der Theilfachwerke behufs Berechnung der Füllungsstäbe an Stelle der Gurtungen *abc* und *bcd* die Stäbe *ac* bezieh. *bd* eingeführt. Die Spannkräfte O

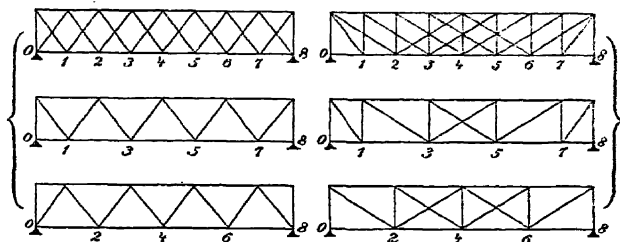



Fig. 339. Fig. 340.

und U drückt man hierbei zweckmässig wie folgt durch die für die *ungetheilte* Belastung berechneten grössten Angriffsmomente M aus. Man setze für den Stab bc als Glied des Theilfachwerks bd $(m+1)$:

$$O_m = -\frac{1}{2}\frac{M_{m+1}}{h_{m+1}}\sec\beta_m$$

und für denselben Stab als Glied des Theilfachwerks acm:

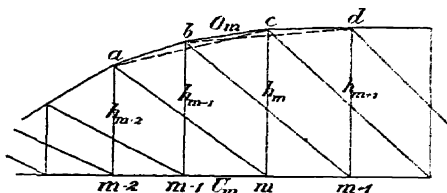
$$O_m = -\frac{1}{2}\frac{M_m}{h_m}\sec\beta_m,$$

Fig. 341.

im Ganzen also

$$O_m = -\frac{1}{2}\left(\frac{M_m}{h_m} + \frac{M_{m+1}}{h_{m+1}}\right)\sec\beta_m,$$

und hierin verstehe man unter β_m die Neigungswinkel des Stabes bc. Ganz ebenso findet man für den (wagerechten) Stab U_m:

$$U_m = +\frac{1}{2}\left(\frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} + \frac{M_{m-2}}{h_{m-2}}\right).$$

Zuweilen stimmen die auf diese Art gewonnenen Stabkräfte mit den Ergebnissen der auf der Grundlage des § 5 aufzustellenden genaueren Theorie ganz gut überein; sehr häufig aber ist diese Uebereinstimmung eine so wenig befriedigende, dass dem einer schärferen Untersuchung nicht gewachsenen Ingenieur nur gerathen werden kann, von mehrtheiligen Fachwerken ganz Abstand zu nehmen, umsomehr als zwingende Gründe für die Wahl dieser Trägerart kaum bestehen.

Wir wollen nun die Anwendung der im § 5 entwickelten Gesetze auf einen bestimmten Fall zeigen, das Ergebniss der schärferen Rechnung mit den durch Zerlegung in Theilfachwerke gewonnenen vergleichen und dabei noch ein zweites Näherungsverfahren entwickeln und prüfen.

134. Zahlenbeispiel (Figuren auf Taf. 6). Es soll der in Fig. 342 dargestellte Fachwerkträger untersucht werden. Stützweite 36^m, Höhe in der Mitte 6^m, an den Enden 2^m, Feldweite $3{,}6^m$. Die Knotenpunkte der Gurtungen liegen in Parabeln. Der Träger ist *einfach* statisch unbestimmt. Als statisch nicht bestimmbare Grösse möge die Spannkraft X des Stabes $l\,l'$ eingeführt werden.

Zuerst wurden in Fig. 345 die Spannkräfte (S_l) für den Zustand $X = -1$ ermittelt, und zu diesem Zwecke der Reihe nach die Kräftepolygone für die Knotenpunkte l, l', k, k', i, i', ... gezeichnet. Zugkräfte wurden blau, Drücke roth ausgezogen. Die Gurtkräfte wechseln von Fach zu Fach die Vorzeichen, ebenso die Spannkräfte in den Schrägstäben. Es genügte, die Stabkräfte der linken Trägerhälfte darzustellen; rechts von der Mitte ergeben sich dieselben Werthe, nur mit entgegengesetzten Vorzeichen. Die Ergebnisse wurden in die Figur 347 eingeschrieben (blaue Zahlen).

Die nächste Arbeit bestand in der Aufzeichnung der Biegungslinie für den Zustand $X = -1$. — Ist nämlich

δ_{ll} die gegenseitige Verschiebung des Punktpaares l, l' in Folge $X = -1$ und im Sinne $X = -1$,

δ_{ml} die Verschiebung des Angriffspunktes m einer Last P_m im Sinne von P_m und in Folge von $X = -1$,

so ist der Einfluss von P_m auf X:

$$X = P_m \frac{\delta_{ml}}{\delta_{ll}}. \tag{1}$$

Wird also die Lasteinheit durch eine Strecke von der Länge δ_{ll} dargestellt, so erzeugt eine in m angreifende Last *Eins* im überzähligen Stabe die Spannkraft $X = \delta_{ml}$. Die fragliche Biegungslinie ist dann gleichbedeutend mit der X-Linie; ihre Ermittelung muss durch eine Querschnittsabschätzung eingeleitet werden, und zwar kommt es hierbei nur auf das gegenseitige Verhältniss der Stabquerschnitte an, weil in Gleich. (1) nur das Verhältniss zwischen zwei Ordinaten der Biegungslinie vorkommt. Aus demselben Grunde darf, falls E für sämmtliche Stäbe den gleichen Werth besitzt, was hier vorausgesetzt wird, $E = 1$ angenommen werden. Die Zahlen in der linken Hälfte der Figur 346 geben nun die Stablängen in *dm* an, in der rechten Hälfte die abge-

schätzten Querschnittsverhältnisse, und die rothen Zahlen in Figur 347 schliesslich die hiernach berechneten Längenänderungen der Stäbe für den Zustand $X = -1$. Beispielsweise entspricht einem Schrägstabe des dritten Faches:

$$\Delta s_l = \frac{S_l s}{EF} = + \frac{0{,}50 \cdot 61}{1 \cdot 0{,}6} = + 5{,}1.$$

Die Einheiten sind gleichgültig, da es sich nur um das Verhältniss $\delta_{ml} : \delta_{ll}$ handelt. Die Bestimmung der Biegungslinie erfolgte mit Hilfe eines Williot'schen Verschiebungsplanes. Zuerst wurde Punkt a, und die Richtung des Stabes aa' festliegend angenommen und aa' gleich der Längenänderung $\Delta 0$ des Stabes 0 gemacht. An a und a' wurde b mit Hilfe von $\Delta 1$ und $\Delta 2$ angeschlossen, hierauf der in Bezug auf die Wagerechte durch die Mitte von aa' symmetrisch zu b liegende Punkt b' bestimmt, sodann c fest gelegt mittels $\Delta 3$ und $\Delta 4$, nunmehr c' symmetrisch zu c liegend gefunden u. s. w.*) Man vergleiche die ausführliche Beschreibung des Williot'schen Verfahrens im § 1 und namentlich die Untersuchung in No. 34 (Fig. 39), in welcher die Herleitung der Biegungslinie aus dem Verschiebungsplane eingehend erörtert worden ist. In Figur 343 stellt die ausgezogene Zickzacklinie die Biegungslinie für den Fall *Fahrbahn unten* vor, die strichpunktirte für den Fall *Fahrbahn oben*, beide bezogen auf die Gerade al als Nullachse. Da im Verschiebungsplan der Punkt l' oberhalb l liegt (also ebenso wie im Fachwerke), so ist die gegenseitige Verschiebung δ_{ll} des Punktpaares l, l' positiv, und es entsprechen daher nach Gleichung (1) den positiven δ_{ml}, d. h. den abwärts gerichteten Verschiebungen, auch positive Werthe X. In Figur 343 sind die positiven und negativen Zweige der als X-Linien aufzufassenden Biegungslinien durch blaue bezieh. rothe Schraffirung besonders kenntlich gemacht. Da sich die Strecke $\delta_{ll} = 42{,}7^{mm}$ ergab, so ist der Maassstab für die X-Linien: $1^t = 42{,}7^{mm}$.

Nach Aufzeichnung der X-Linien lassen sich die Einflusslinien für die übrigen Stabkräfte leicht bestimmen. Wir begnügen uns damit, die Untersuchung eines Füllungsstabes und eines Gurtstabes durchzuführen.

1. *Ermittelung der Spannkraft D im Füllungsstabe $h'g$, Fig. 348.* Bezeichnet D_0 den Werth von D für den Fall, dass das Fachwerk durch Beseitigung des Stabes ll' statisch bestimmt gemacht wird, so

*) Die Hilfslinien sind mit Ausnahme der zur Bestimmung von a dienenden wieder weggelöscht worden. Der Maassstab ist so gewählt, dass eine Längenänderung $\Delta s = 10$ durch eine Strecke von 5^{mm} Länge dargestellt wird.

gilt für jeden Belastungszustand die Gleichung:

$$(2) \qquad D = D_0 - S_l X = D_0 + 0{,}43\ X.$$

Zur Bestimmung der D_0-Linie wurde das erste der im § 6 beschriebenen Verfahren benutzt und zu diesem Zwecke das statisch bestimmte Hauptsystem durch Beseitigung des Stabes $h'g$ in eine zwangläufige kinematische Kette verwandelt. Es wurde zunächst die starre gegliederte Scheibe $aa'g'hga$ ruhend angenommen, dem Punkte h' eine Geschwindigkeit von vorläufig willkürlicher Grösse ertheilt und nun der Reihe nach die Geschwindigkeit von i, von i' u. s. w. nach dem Williot'schen Verfahren bestimmt. Die Punkte g, g', h des Geschwindigkeitsplanes Fig. 349ª fallen mit dem Pole zusammen; $g'h'$ ist rechtwinklig zur Richtung des Stabes $g'h'$, ebenso $h'i \perp h'i$, $hi \perp hi$ u. s. w. Die ausgezogene Zickzacklinie in Fig. 349ª liefert — bezogen auf die Nullachse la — die senkrechten Seitengeschwindigkeiten der Punkte der unteren Fachwerksgurtung, die strichpunktirte diejenigen der Punkte der oberen Gurtung. Entspricht dem Punkte i beispielsweise die Ordinate δ_i, und bezeichnet δ die Projektion der Geschwindigkeit $g'h'$ auf die Richtung des Füllungsstabes D, so ist der Einfluss einer in i angreifenden senkrechten Last 1^t auf die Spannkraft D_0 (nach dem Gesetz der virtuellen Verschiebungen) durch die Gleichung bestimmt:

$$D_0 \delta + 1 \cdot \delta_i = 0$$

und man erhält — für den Kräftemaassstab $1^t = \delta$ —

$$D_0 = -\delta_i.$$

Die beiden Linienzüge in Fig. 349ᵇ sind also die Einflusslinien für D_0, der ausgezogene für *Fahrbahn unten*, der strichpunktirte für *Fahrbahn oben*. Rechts von g, g' fallen beide Einflusslinien zusammen. Die positiven und negativen Zweige dieser Linien wurden wieder durch blaue bezieh. rothe Schraffirung kenntlich gemacht. Der Maassstab lautet: $25^{mm} = 1^t$.

In den Figuren 350ª und 351ª sind nun die aus den D_0-Linien mittels der Gleichung (2) abgeleiteten D-Linien dargestellt worden. Dabei geschah die Ermittelung der Werthe $0{,}43\ X$ mit Hilfe einer Geraden, welche in Fig. 343ᵇ auf die Weise bestimmt wurde, dass durch den oberen Endpunkt von δ_{ll} parallel zur Nullachse eine Gerade gezogen und auf dieser von der Senkrechten durch a aus die dem Stabe $h'g$ entsprechende Spannkraft $S_l = 0{,}43$ abgesetzt wurde. Diese Spannkraft ist dem ebenfalls im Maassstabe $25^{mm} = 1^t$ gezeichneten Kräfteplane des Zustandes $X = -1$, Figur 345, entnommen worden. Der Verschiedenheit der Maasstäbe der X-Linien in Figur 343 und der D-Linien ist hierdurch Rechnung getragen, und es konnten daher

die Ordinaten der D_0-Linien mit denjenigen der 0,43 X-Linie ohne Weiteres (mit Berücksichtigung der Vorzeichen!) addirt werden. Beispielsweise ist, absolut genommen,

$$\eta_i = \delta_i - \delta_i' \text{ (Fig. } 350^a,\ 349^a \text{ und } 343^a\text{)}$$

und η_i negativ, weil $\delta_i > \delta_i'$.*)

Dem hiermit erledigten genaueren Verfahren ist nun folgendes Nährungsverfahren gegenübergestellt worden. Es wurde vorausgesetzt, dass Diagonale hg' spannungslos sei, dass also der durch $h'g$ geführte senkrechte Schnitt im ganzen nur drei beanspruchte Stäbe treffe. Die Einflusslinie besteht dann sowohl für *Fahrbahn unten* als auch für *Fahrbahn oben* aus drei Geraden AL_1, L_1L_2, L_2B (Fig. 350[b] und 351[b]) und wird erhalten, indem man Strecke AJ gleich der Spannkraft D_A macht, welche im fraglichen Füllungsstabe durch einen Auflagerwiderstand $A = 1$ hervorgerufen wird, und indem man ferner die Strecke L_2H gleich der Seitenkraft $[D]$ macht, die in Fig. 352 durch Zerlegung der Lasteinheit nach den Richtungen U und D gewonnen wurde. Die Bestimmung von D_A erfolgte in Fig. 352 nach dem Cullmann'schen Schnittverfahren; die Schnittpunkte (U, A) und (O, D) in Figur 348 wurden durch die Gerade (L) verbunden, hierauf wurde $A = 1^t$ nach den Richtungen U und L zerlegt, schliesslich L nach den Richtungen O und D. Nachdem auf diese Weise der Linienzug AL_1L_2B festgelegt war, wurde angenommen, dass Lasten, welche in den Knotenpunkten k, i', h, g', f, e', d, c, b' des die fragliche Diagonale D nicht enthaltenden Strebenzuges angreifen, auch keinen Einfluss auf die Spannkraft D haben — sie wirken gewissermaassen auf das andere Theilfachwerk — und aus dieser Annahme ergeben sich schliesslich die in den Figuren 350[b] und 351[b] schraffirten angenäherten D-Flächen.**)

Wir wollen nun die Ergebnisse der genaueren und genäherten Rechnungsweise prüfen und setzen hierbei einen Zug von Lokomotiven mit den aus den Figuren ersichtlichen Radständen und Achsenbelastungen voraus. Die Mittelachse des Tenders ist von der Mittelachse der Lokomotive um die doppelte Feldweite entfernt — eine sehr ungünstige Annahme. Den eingezeichneten Zugstellungen entsprechen die folgenden Werthe:

---

*) Für den Fall obenliegender Fahrbahn werden die Ordinaten der D-Linie bei l' und a' nicht genau gleich Null; sie ergaben sich aber — selbst in der vom Verfasser im doppelten Maassstabe hergestellten Zeichnung — so klein, dass sie $= 0$ gesetzt werden durften.

**) Auf diesem Wege wurden zuerst von *Fränkel* mehrtheilige Fachwerke mit parallelen Gurtungen untersucht.

	Fahrbahn unten.	*Fahrbahn oben.*
genau	$_{max}D_p = \Sigma P\eta = +31^t$	$_{max}D_p = +24^t$
	$_{min}D_p = \overset{+}{\underset{-}{-}} \Sigma P\eta = +11^t$	$_{min}D_p = -19^t$
angenähert	$_{max}D_p = +25{,}5^t$ (Fehler 21%)	$_{max}D_p = +19^t$ (Fehler 21%)
	$_{min}D_p = -11^t$	$_{min}D_p = -20^t$

Die ständige Belastung sei $g = 1{,}74^t$ f. d. Mtr., also $= 1{,}74 \cdot 3{,}6 = 6{,}3^t$ für jeden Knotenpunkt. Es stellt sich heraus, dass die genaueren und genäherten Einflusslinien dieselben Ergebnisse liefern, nämlich:

für *Fahrbahn unten* $D_g = 6{,}3 \cdot 0{,}62 = 4^t$,

für *Fahrbahn oben* $D_g = 0$.

2. Spannkraft in einem Gurtstabe. Der einzuschlagende Weg ist derselbe wie bei Untersuchung der Füllungsstäbe. Durch Beseitigung des Stabes $i'h'$, nach dessen Spannkraft O (Fig. 353) gefragt sei, wurde das statisch bestimmte Hauptnetz in eine zwangläufige kinematische Kette verwandelt und nun wurden mit Hilfe eines Williot'schen Planes die O_0-Linien für die beiden Fälle *Fahrbahn unten* und *Fahrbahn oben* gezeichnet. Die Geschwindigkeit hi' des Punktes i' wurde so gewählt, dass die Projektion von hi' auf die Richtung von O gleich 25^{mm} ist. Der Kräftemaassstab für die O_0-Linien lautet dann: $1^t = 25^{mm}$.

Dem Stabe $i'h'$ entspricht $S_l = -0{,}30$, weshalb

$$O = O_0 - S_l X = O_0 + 0{,}30\, X,$$

und hierdurch ist die O-Linie gegeben; sie wurde in kleinerem Maassstabe ($1^t = 12{,}5^{mm}$) gezeichnet — für *Fahrbahn unten* in Fig. 355[a], für *Fahrbahn oben* in Fig. 356[a].*)

Die Figuren 355[b] und 356[b] enthalten die Ergebnisse der Näherungstheorie; es wird genügen, die Entwickelung von 355[a] zu geben. Der fragliche Gurtstab liegt in dem einen der beiden Theilfachwerke dem Knotenpunkte k gegenüber, in dem anderen dem Knoten i. Bedeuten M_k, M_i die Angriffsmomente, bezogen auf h bezieh. i, und r_h, r_i die Lothe von h und i auf O, so ergiebt sich — jenachdem die Spannkraft im Stabe ih' oder im Stabe $i'h$ gleich Null angenommen wird —

$$-O = \frac{M_k}{r_k} \text{ oder } -O = \frac{M_i}{r_i}.$$

---

*) Zur Umsetzung der Strecken aus dem Maassstab $1^t = 25^{mm}$ in den Maassstab $1^t = 12{,}5^{mm}$ diente der Winkel oberhalb Fig. 345.

Die Einflusslinie für $M_h : r_h$ besteht aus den Geraden $A'H$ und HB'; sie ist bestimmt durch

$$\overline{HH'} = \frac{x_h x_h'}{l r_i} = \frac{(3 \cdot 3{,}6)\,(7 \cdot 3{,}6)}{(10 \cdot 3{,}6) \cdot 5{,}34} = 1{,}42,$$

während die aus den Geraden $A'J$ und JB' hestehende $(M_i : r_i)$-Linie durch die Strecke

$$\overline{J'J} = \frac{x_i x_i'}{l r_i} = \frac{(2 \cdot 3{,}6)\,(8 \cdot 3{,}6)}{(10 \cdot 3{,}6) \cdot 4{,}51} = 1{,}28$$

gegeben ist. Mit Hilfe der $(M_h : r_h)$-Linie wird der Einfluss der in den Knotenpunkten k, h, f, d, b angreifenden Lasten gefunden, mittels der $(M_i : r_i)$-Linie der Einfluss der übrigen Knotenlasten; schliesslich werden die Endpunkte der auf diese Weise bestimmten Ordinaten durch gerade Linien verbunden. Ganz ebenso wird die Fig. 356^b erhalten. Den in die Figuren eingezeichneten Zugstellungen, sowie der ständigen Last $g = 1{,}74^t$ entsprechen die Werthe:

	Fahrbahn unten.	*Fahrbahn oben.*
genau	$O_p = -\Sigma P\eta = -125^t$	$O_p = -\Sigma P\eta = -114^t$
	$O_g = -g\lambda\Sigma\eta = -43^t$	$O_g = -g\lambda\Sigma\eta = -41^t$
angenähert	$O_p = -119^t$ (Fehler 5 %)	$O_p = -112^t$
	$O_g = -43^t$	$O_g = -42^t$.

Die Uebereinstimmung zwischen der angenäherten und genaueren Rechnung ist also hier eine befriedigende.

Die gewöhnliche Zerlegung in zwei Theilfachwerke, von denen jedes für die Hälfte der Belastung zu berechnen ist, würde, wenn in jedem Theilfachwerke die wirkliche Richtung des Gurtstabes $i'h'$ beibehalten wird, zu der Formel

$$O = -\frac{1}{2}\left(\frac{M_i}{r_i} + \frac{M_h}{r_h}\right) \tag{3}$$

führen und hierin wird man zweckmässig, um allen überflüssigen Feinheiten aus dem Wege zu gehen, für M_i und M_k gleichzeitig die Grösstwerthe einführen, trotzdem diese bei verschiedenen Zugstellungen entstehen. Wir würden dann nach Band I, Seite 119*) erhalten

$$M_i = 702^{tm} \quad M_k = 918^{tm}, \text{ also}$$

$$O = -\frac{1}{2}\left(\frac{702}{4{,}51} + \frac{918}{5{,}34}\right) = -164^t = +U,$$

*) An der angezogenen Stelle sind die Maximalmomente eines Balkens von 36^m Stützweite und $3{,}6^m$ Feldweite berechnet worden. g ist $= 1{,}74^t$ f. d. Meter. Der Eisenbahnzug stimmt mit dem im vorliegenden Beispiele eingeführten nicht ganz überein; man wird aber auch, falls man Gleichung 3 anwendet, mit den sonst üblichen Radständen rechnen, nicht mit den besonderen auf Tafel VI angenommenen.

während sich vorhin ergab

für *Fahrbahn unten* $O = -125 - 43 = -168^t$,

für *Fahrbahn oben* $O = -114 - 41 = -155^t$.

Es leuchtet ein, dass Formel 3 jedenfalls der Abschätzung der Querschnittsabmessungen zu Grunde gelegt werden darf, falls eine schärfere Untersuchung verlangt werden sollte. Nach Ansicht des Verfassers ist die Gleich. 3 aber auch für die endgiltige Berechnung genügend genau.

Wesentlich anders verhält es sich mit den Füllungsstäben. Hier befriedigte schon das Ergebniss der genäherten Einflusslinien nicht sonderlich, und noch ungenauer wird die Rechnung auf Grund der Zerlegung in Theilfachwerke mit den halben Lasten.

Betrachten wir beispielsweise behufs Bestimmung von ${}_{max}D_p$ im Stabe $h'g$ das Theilfachwerk $lk'ih'g$ . . ., Fig. 357. Der Eisenbahnzug sei bis h' vorgeschoben und die den Schrägstab D auf Druck beanspruchende Belastung des Knotens i sei vernachlässigt — eine jedenfalls sehr ungünstige Voraussetzung. Es entsteht am linken Auflager $A = 26^t$*) und die Anwendung des in Band I, No. 162 (Seite 254) gegebenen kinematischen Verfahrens liefert:

$${}_{max}D_p = +22^t,$$

während sich vorhin ${}_{max}D_p = +31^t$ ergab. Der Fehler beträgt also 41%.

Hinzugefügt werde noch, dass sich nach Aufzeichnung der X-Linie die übrigen Einflusslinien ausser auf die vorhin beschriebene Art noch nach verschiedenen anderen Verfahren zeichnen lassen. So könnte man nach Ermittelung der O-Linien und U-Linien die D-Linien auf die in Band I, No. 170 (Seite 273 u. 274) angegebene Weise bestimmen, desgl. nach Seite 176 des vorliegenden Bandes. Drittens ist es möglich, mit Hilfe der für die Knotenpunkte l', l, k', k, . . . aufzustellenden Gleichgewichtsbedingungen schrittweise die Einflusslinien für die Spannkräfte in den Stäben 19′, 20′, 19, 20, u. s. w. herzuleiten.

Ein viertes Verfahren besteht darin, die Lasteinheit der Reihe nach in den sämmtlichen Knoten anzunehmen und für jeden dieser Belastungsfälle einen das ganze Fachwerk umfassenden Kräfteplan zu zeichnen. Die so gewonnenen Pläne enthalten dann sämmtliche Ordinaten aller Einflusslinien. In Figur 344 auf Tafel 6 ist ein Theil eines solchen Planes gezeichnet worden; er entspricht einer in h angreifenden Last 1.

---

*) Nach der im I. Bande Seite 313 berechneten Tabelle ist für die fragliche Zugstellung: $A\lambda = 185{,}82$, mithin $A = \frac{185{,}82}{3{,}6} = 52^t$, wovon auf das Theilfachwerk der Betrag 26^t zu rechnen ist. Selbstverständlich könnte man A auch dem A-Polygon entnehmen.

§ 16.

Herleitung der Biegungslinien aus den Momentenlinien.

135. Wir schliessen unsere Untersuchung des ebenen Fachwerks mit der Angabe eines Verfahrens: die Biegungslinien in der Weise aus den Momentenlinien herzuleiten, dass die Ermittelung der Durchbiegungen für eine Reihe von Belastungsfällen immer nur die Neubestimmung der Momentenlinie erfordert, während alle von den Querschnittsabmessungen und Stablängen abhängigen Grössen nur einmal berechnet werden müssen.

Zu diesem Zweck setzen wir voraus, es seien die Stabkräfte durch die auf die Knotenpunkte ... $(m-1)$, m, $(m+1)$ ... bezogenen Angriffsmomente ... M_{m-1}, M_m, M_{m+1}, ... ausgedrückt und auf die Form

$$(1) \quad S = \ldots\ldots + \psi_{m-1} M_{m-1} + \psi_m M_m + \psi_{m+1} M_{m+1} + \ldots\ldots$$

gebracht, unter ψ Werthe verstanden, welche von dem jeweiligen Belastungszustande unabhängig sind. Es ist dann nach Seite 115 der Einfluss der Aenderung Δs einer Stablänge s auf die Gewichte w:

$$(2) \quad \ldots\ldots, \; w_{m-1} = \psi_{m-1} \Delta s, \; w_m = \psi_m \Delta s, \; w_{m+1} = \psi_{m+1} \Delta s, \ldots\ldots$$

oder, wenn $\Delta s = \dfrac{Ss}{EF}$ gesetzt und S mittels Gleich. (1) bestimmt wird:

$$w_{m-1} = \frac{\psi_{m-1} s}{EF} (\ldots \psi_{m-1} M_m + \psi_m M_m + \psi_{m+1} M_{m+1} \ldots)$$

$$w_m = \frac{\psi_m s}{EF} (\ldots \psi_{m-1} M_m + \psi_m M_m + \psi_{m+1} M_{m+1} \ldots)$$

Bildet man auf diese Weise die Beiträge, welche die einzelnen Stäbe zu den Gewichten w liefern, so gelangt man schliesslich zu Ausdrücken von der Form:

$$w_m = \ldots\ldots + \frac{M_{m-1}}{a_{(m-1)m}} + \frac{M_m}{a_{m.m}} + \frac{M_{m+1}}{a_{(m+1)m}} + \ldots\ldots$$

worin die Werthe a von der Gestalt des Fachwerks und den Querschnittsabmessungen abhängig sind, nicht aber von dem Belastungszustande.

Anstatt nun die Durchbiegungen mit Hilfe eines Seilpolygons zu bestimmen, welches mit der Polweite *Eins* zu den Gewichten w gezeichnet wird, kann man auch in der Weise verfahren, dass man das Gewicht w_m (und ebenso alle übrigen w) durch die Gewichte

$$\ldots\ldots M_{m-1}, \; M_m, \; M_{m+1}, \ldots\ldots$$

in den Abständen

$$\ldots\ldots a_{(m-1)m},\ a_{mm},\ a_{(m+1)m}\ \ldots\ldots$$

vom Pole O ersetzt. Denn die nach den Endpunkten der Gewichte $\ldots\ldots M_{m-1},\ M_m,\ M_{m+1},\ldots\ldots$ gezogenen Strahlen zerlegen w_m in die Abschnitte:

$$\ldots\ldots,\ M_{m-1}\frac{1}{a_{(m-1)m}},\ M_m\frac{1}{a_{mm}},\ M_{m+1}\frac{1}{a_{(m+1)m}},\ldots\ldots$$

Vergl. Fig. 358^b, in welcher ein von drei Momenten abhängiges Gewicht w vorausgesetzt wurde. Treten negative Werthe a auf, so werden die entsprechenden M als negative Gewichte aufgefasst, wie dies die in der Regel vorliegende Figur 358^c angiebt.

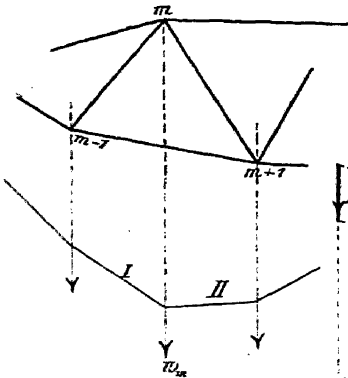
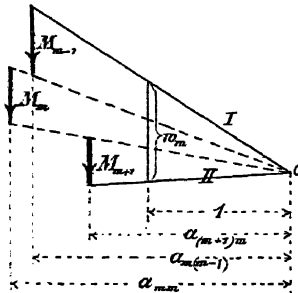
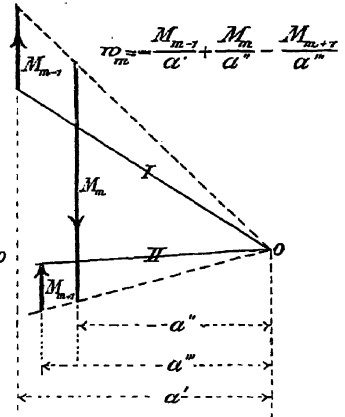



Fig. 358 a. Fig. 358 b. Fig. 358 c.

Durch die im Vorstehenden beschriebene Aenderung des Kräftezuges ist das gesteckte Ziel erreicht. Die von den Lasten unabhängigen Werthe a werden ein für allemal berechnet, und die Untersuchung eines neuen Belastungszustandes erfordert nur die Aufzeichnung der neuen Momentenlinie. Ein Beispiel möge das Verfahren erläutern.

136. Zahlenbeispiel. Es liege der in Fig. 360 dargestellte Hauptträger einer Eisenbahnbrücke von 36^m Spannweite mit 10 Feldern vor.

Die Spannkraft in einem Stabe der oberen Gurtung ist (Fig. 359):

$$O_m = -\frac{M_m}{r_m}$$

und die Aenderung der Stablänge o_m hat nur Einfluss auf w_m; sie erzeugt:

$$w_m = -\frac{\Delta o_m}{r_m} = -\frac{O_m\, o_m}{E F_m r_m} = +\frac{M_m\, o_m}{E F_m r_m^2}$$

und man erhält, mit den in der folgenden Zusammenstellung angegebenen Querschnittsabmessungen, zunächst für $E=1$ die nachstehenden Beiträge zu den Gewichten w_1, w_3, w_5.

Stab	o_m	r_m	F_m	
o_1	7,31	3,58	0,0160	$w_1 = 35{,}64\, M_1$
o_2	7,23	4,58	0,0320	$w_3 = 10{,}77\, M_3$
o_3	7,20	4,92	0,0320	$w_5 = 9{,}30\, M_5$
	Meter		qm	

Dem Untergurtstabe u_r entspricht (wegen $r_k = h_k$)

$$w_k = \frac{M_k u_k}{E F_k h_k^2}, \text{ d. i.}$$

Stab	u_k	r_k	F_k	
u_2	7,20	4,28	0,0240	$w_2 = 16{,}38\, M_2$
u_4	7,20	4,92	0,0320	$w_4 = 9{,}30\, M_4$

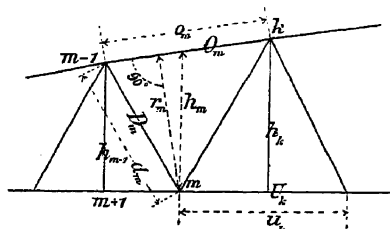



Fig. 359.

Für die Diagonale des m^{ten} Feldes ergiebt sich:

$$D_m = \left(\pm \frac{M_m}{h_m} \mp \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}\right) \frac{d_m}{\lambda_m},$$

wobei die oberen Vorzeichen für eine linkssteigende, die unteren für eine rechtssteigende Diagonale gelten. Aus der Gleichung für D_m folgt

$$w_m = \pm \frac{\Delta d_m}{h_m} \cdot \frac{d_m}{\lambda_m} = \pm \frac{D_m d_m}{E F_m h_m} \cdot \frac{d_m}{\lambda_m} = \frac{d_m^3}{E F_m \lambda_m^2 h_m^2} M_m - \frac{d_m^3}{E F_m \lambda_m^2 h_{m-1} h_m} M_{m-1}$$

$$w_{m-1} = \mp \frac{\Delta d_m}{h_{m-1}} \frac{d_m}{\lambda_m} = \mp \frac{D_m d_m}{E F_m h_{m-1}} \frac{d_m}{\lambda_m} = - \frac{d_m^3}{E F_m \lambda_m^2 h_{m-1} h_m} M_m + \frac{d_m^3}{E F_m \lambda_m^2 h^2_{m-1}} M_{m-1}$$

Stab	d_m	F_m		
d_1	4,69	0,0210	$w_1 = 28{,}61\, M_1$	
d_2	5,59	0,0150	$w_2 = 49{,}05\, M_2 - 57{,}68\, M_1$;	$w_1 = -57{,}68\, M_2 + 67{,}82\, M_1$
d_3	5,59	0,0070	$w_3 = 90{,}99\, M_3 - 97{,}80\, M_2$;	$w_2 = -97{,}80\, M_3 + 105{,}11\, M_2$
d_4	6,10	0,0060	$w_4 = 120{,}59\, M_4 - 128{,}98\, M_3$;	$w_3 = -128{,}98\, M_4 + 137{,}95\, M_3$
d_5	6,10	0,0060	$w_5 = 120{,}59\, M_5 - 120{,}59\, M_4$;	$w_4 = -120{,}59\, M_5 + 120{,}59\, M_4$

Dem linken Endständer entspricht

$$V_0 = -\frac{M_1}{\lambda}, \text{ also } w_1 = -\frac{\Delta h_0}{\lambda} = -\frac{V_0 h_0}{EF_0\lambda} = +\frac{M_1 h_0}{EF_0 \lambda^2}$$

und mit $F_0 = 0{,}0160\ qm$:

$$w_1 = 14{,}47\ M_1.$$

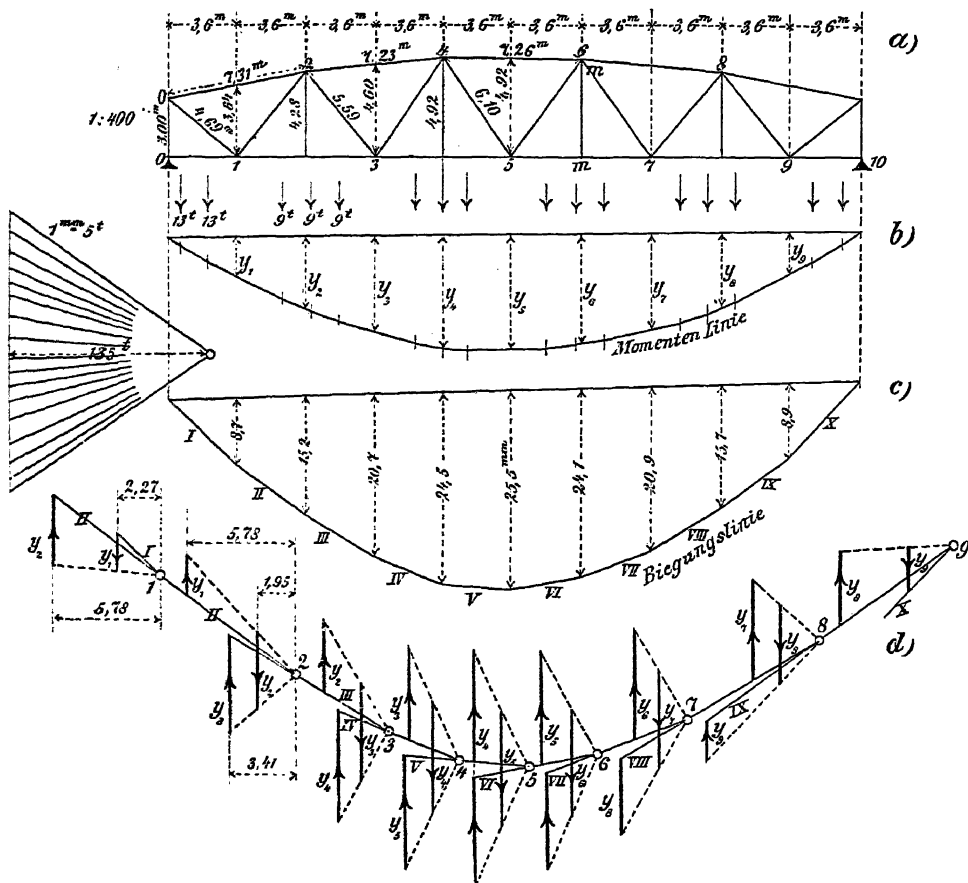



Fig. 360.

Für den Pfosten mm in Fig. 360a würde man, wenn K_m die Belastung des Knotens m bedeutet, erhalten:

$$V_m = +K_m = Q_{m+1} - Q_m = \frac{M_{m+1} - M_m}{\lambda} - \frac{M_m - M_{m-1}}{\lambda}$$

mit
$$w_{m+1} = \frac{\Delta h_m}{\lambda}, \quad w_m = -\frac{2}{\lambda}\Delta h_m, \quad w_{m-1} = +\frac{\Delta h_m}{\lambda},$$

worein zu setzen:

$$\Delta h_m = \frac{V_m h_m}{EF} = \frac{h_m}{EF\lambda}(M_{m+1} - 2M_m - M_{m-1}).$$

Eine derartige umständliche Berücksichtigung der Längenänderungen Δh der Zwischenpfosten ist jedoch im vorliegenden Falle entbehrlich. Man denke sich diese Stäbe vielmehr beseitigt, zeichne eine Biegungslinie, welche die lothrechten Verschiebungen der Knoten 1, 3, 5, 7, 9 der unteren Gurtung und der Knoten 2, 4, 6, 8, 10 der oberen Gurtung angiebt, und beachte schliesslich, dass sich die Verschiebungen von zwei durch einen lothrechten Stab verbundenen Knoten um die Längenänderungen dieses Stabes unterscheiden (vgl. S. 103).

Die Zusammenzählung der an denselben Knotenpunkten angreifenden Gewichte w ergiebt nun:

$$w_1 = 35{,}64\,M_1 + 28{,}61\,M_1 - 57{,}68\,M_2 + 67{,}82\,M_1 + 14{,}47\,M_1, \text{ d. i.}$$
$$w_1 = 146{,}55\,M_1 - 57{,}68\,M_2 \text{ und ebenso:}$$
$$w_2 = -57{,}68\,M_1 + 170{,}54\,M_2 - 97{,}80\,M_3$$
$$w_3 = -97{,}80\,M_2 + 239{,}71\,M_3 - 128{,}98\,M_4$$
$$w_4 = -128{,}98\,M_3 + 250{,}48\,M_4 - 120{,}59\,M_5$$
$$w_5 = -120{,}59\,M_4 + 250{,}48\,M_5 - 120{,}59\,M_6, \text{*)}$$

und zwar gelten diese Werthe für $E = 1$. Wird beispielsweise $E = 1800^t/qcm$ $= 18000000^t/qm$ gesetzt, so sind sämmtliche w durch 18000000 zu dividiren.

Die Momente M werden zweckmässig mit Hilfe eines Seilpolygons auf die Form

$$M_m = H y_m$$

gebracht, wo H die Polweite bedeutet. Wird H in Tonnen ausgedrückt, so müssen die y im Längenmaassstabe der Trägerzeichnung gemessen und in Metern ausgedrückt werden. Die Gewichte w sind Zahlen.

In unserem Beispiele wählten wir für den Träger den Maassstab 1 : 400 und für die Durchbiegungen den Maassstab 1 : 1; ferner $H = 135^t$. Wir müssen dann in die für die Gewichte w gefundenen Ausdrücke setzen:

$$M_m = \frac{135 \cdot y_m}{18000000} \cdot \frac{400}{1} = \frac{3\,y_m}{1000}$$

und erhalten:

$$w_1 = 146{,}55\,\frac{3 \cdot y_1}{1000} - 57{,}68\,\frac{3\,y_2}{1000} = \frac{y_1}{2{,}27} - \frac{y_2}{5{,}78}$$

und auf dieselbe Weise:

$$w_2 = -\frac{y_1}{5{,}78} + \frac{y_2}{1{,}95} - \frac{y_3}{3{,}41}$$
$$w_3 = -\frac{y_2}{3{,}41} + \frac{y_3}{1{,}39} - \frac{y_4}{2{,}58}$$
$$w_4 = -\frac{y_3}{2{,}58} + \frac{y_4}{1{,}33} - \frac{y_5}{2{,}76}$$
$$w_5 = -\frac{y_4}{2{,}76} + \frac{y_5}{1{,}33} - \frac{y_6}{2{,}76}$$
$$w_6 = -\frac{y_5}{2{,}76} + \frac{y_6}{1{,}33} - \frac{y_7}{2{,}76}$$
$$w_7 = -\frac{y_6}{2{,}58} + \frac{y_7}{1{,}39} - \frac{y_8}{2{,}58}$$
$$w_8 = -\frac{y_7}{3{,}41} + \frac{y_8}{1{,}95} - \frac{y_9}{3{,}41}$$
$$w_9 = -\frac{y_8}{5{,}78} + \frac{y_9}{2{,}27}.$$

Die in den Nennern stehenden Zahlen geben die Polweiten a der Gewichte y in Metern an, sie werden im Maassstabe 1 : 400 aufgetragen.

Nach Erledigung dieser vorbereitenden Rechnungen, welche für jedes Fachwerk nur einmal auszuführen sind, ist man im Stande, die Biegungslinien

---

*) Bei Berechnung von w_6 denke man an den Einfluss von D_8.

I, *II*, *III* .... für irgend einen Belastungszustand schnell aus dem die Momentenlinie vorstellenden Seilpolygone abzuleiten.

Die Richtung der Seite *I* wird willkürlich angenommen. Mit Hilfe von y_1 und y_2 wird die Richtung der Seite *II* festgestellt, hierauf mittels y_1, y_2, y_3 die Richtung von *II* u. s. w. Man vergleiche Fig. 360[d], welche durch wiederholte Anwendung des in Fig. 358[c] dargestellten Verfahrens entstanden ist und einer weiteren Erläuterung kaum bedarf. Die Punkte 1, 2, 3, ... dieser Figur sind in so grossen Abständen von einander angenommen worden, dass die den einzelnen Knoten entsprechenden Kräftezüge y_{m-1}, y_m, y_{m+1} gut überschaut werden können.

137. Das beschriebene Verfahren zur Ermittelung der Biegungslinien lässt sich auch leicht auf den Fall beliebig gerichteter äusserer Kräfte anwenden, denn seine Anwendung erheischt nur die Bestimmung der Stabkräfte mit Hilfe der Angriffsmomente. Liegt z. B. das in Figur 361 dargestellte Ständerfachwerk vor, so findet man aus den auf die oberen bezieh. unteren Knotenpunkte bezogenen Angriffsmomenten M^o und M^u ganz allgemein:*)

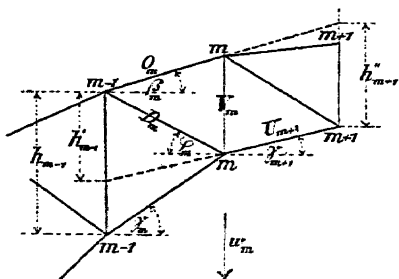



Fig. 361.

*) Die nachstehenden Gleichungen 1 bis 3 sind auf Seite 226 abgeleitet worden. In der gegebenen Entwickelung verstehe man unter *H* die Mittelkraft der links von dem durch das Fachwerk geführten Schnitte angreifenden wagerechten äusseren Kräfte. Man erkennt dann, dass die fraglichen Gleichungen allgemeine Giltigkeit besitzen. Gleichung (4) wird ebenso entwickelt wie Gleich. (3). Wir geben hier noch eine andere Herleitung dieser Gleich. (4); wir denken uns nämlich in Fig. 362 den Schnitt *tt* geführt und setzen die Summe der Momente der links von *tt* angreifenden Kräfte in Bezug auf den unteren Knotenpunkt $(m+1)$ gleich Null. Die Hebelarme von O_m und V_m sind $h''_{m+1} \cos \beta_m$ und λ_{m+1}; es folgt daher:

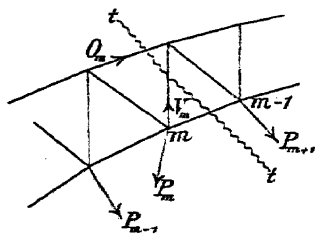



Fig. 362.

$$M^u_{m+1} + O_m h''_{m+1} \cos \beta_m + V_m \lambda_{m+1},$$

und hieraus ergiebt sich (wegen $O_m \cos \beta_m = -M^u_m : h_m$) für V_m der oben in Gleich. (4) angegebene Werth. Ganz ebenso lassen sich natürlich auch die Gleichungen 2 und 3 ableiten. — Die oben benutzten Bezeichnungen: „Fahrbahn oben", „Fahrbahn unten" sind Abkürzungen für: „Die Lasten *P* greifen nur in den Knotenpunkten der oberen bezieh. unteren Gurtung an".

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & O_m = -\dfrac{M^u{}_m}{h_m \cos\beta_m};\quad U_m = +\dfrac{M^o{}_{m-1}}{h_{m-1}\cos\gamma_m} \\ (2) & D_m \cos\varphi_m = \dfrac{M^o{}_m}{h_m} - \dfrac{M^o{}_{m-1}}{h_{m-1}} = \dfrac{M^u{}_m}{h_m} - \dfrac{M^u{}_{m-1}}{h_{m-1}}\end{array}\right\}\text{gültig für Fahrbahn oben und Fahrbahn unten.}$$

$$(3)\qquad V_m = \frac{M^o{}_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{M^o{}_m h'{}_{m-1}}{\lambda_m h_m}\ \text{(Fahrbahn oben.)}$$

$$(4)\qquad V_m = \frac{M^u{}_m h''{}_{m-1}}{\lambda_{m+1} h_m} - \frac{M^u{}_{m+1}}{\lambda_{m+1}}\ \text{(Fahrbahn unten.)}$$

Die Strecken h'_{m-1} und h''_{m+1} sind durch die Verlängerungen von O_m und U_{m+1} bestimmt. Aus den Gleichungen 1—4 ergeben sich die folgenden Einflüsse der Längenänderungen auf die Δo_m, Δu_m, Δd_m, Δh_m.

$$\left.\begin{array}{l} w_m = -\dfrac{\Delta o_m}{h_m \cos\beta_m};\quad w_{m-1} = +\dfrac{\Delta u_m}{h_{m-1}\cos\gamma_m} \\ w = \dfrac{\Delta d_m}{h_m};\quad w_{m-1} = -\dfrac{\Delta d_m}{h_{m-1}}\end{array}\right\}\text{gültig für die Biegungslinien der oberen und unt. Gurtung.}$$

$$\left.\begin{array}{l} w_{m-1} = +\dfrac{\Delta h_m}{\lambda_m} \\ w_m = -\dfrac{\Delta h_m}{\lambda_m}\dfrac{h'{}_{m-1}}{h_m}\end{array}\right\}\text{nur für die Biegungslinie der oberen Gurtung gültig.}$$

$$\left.\begin{array}{l} w_m = +\dfrac{\Delta h_m h''{}_{m+1}}{\lambda_{m+1} h_m} \\ w_{m+1} = -\dfrac{\Delta h_m}{\lambda_{m+1}}\end{array}\right\}\text{nur für die Biegungslinie der unteren Gurtung gültig.}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen ist es möglich, die Gewichte w_m durch die Momente M^o und M^u auszudrücken.

Literatur zum II. Abschnitt.

Mohr, *Beitrag zur Theorie des Fachwerks.* Zeitschr. des Archit. u. Ing.-Ver. zu Hannover 1874 S. 509 u. 1875 S. 17. Grundlegende Arbeit, welche bereits am Schluss unserer Einleitung erwähnt worden ist.

Fränkel, *Anwendung der Theorie des augenblicklichen Drehpunktes auf die Bestimmung der Formänderung von Fachwerken u. s. w.* Civilingenieur 1875, S. 121.

Winkler, *Beitrag zur Theorie der Bogenträger.* Zeitschr. des Archit. u. Ing.-Ver. zu Hannover, 1879, S. 199.

Mohr, *Beitrag zur Theorie der Bogenfachwerkträger.* Zeitschr. des Archit. u. Ing.-Ver. zu Hannover, 1881, S. 243.

Müller-Breslau, *Theorie der durch einen Balken versteiften Kette.* Zeitschr. des Archit. u. Ing.-Ver. zu Hannover, 1881 S. 57 u. 1883 S. 347. Enthält die erste genauere Theorie dieser Trägerart.

Müller-Breslau, *Theorie des durch einen Balken verstärkten steifen Bogens.* Civilingenieur 1883, S. 13. Sonderdruck im Verlag von Arthur Felix in Leipzig.

Müller-Breslau, *Influenzlinien für continuirliche Träger mit drei Stützpunkten.* Wochenblatt f. Archit. u. Ing. 1883, S. 353.

Müller-Breslau, *Zur Theorie der Versteifung labiler und flexibler Bogenträger.* Zeitschr. f. Bauwesen, 1883, S. 312.

Swain, *On the application of the principle of virtual velocities to the determination of the deflection and otresses of frames.* Journal of the Franklin Institute 1883, Febr. bis April, S. 102, 194, 250.

Stelzel, *Berechnung der Ferdinandsbrücke in Graz.* Enthalten in der Schrift: v. Gabriely u. Winter, Ferdinandsbrücke in Graz, Mittheilungen des Polytechnischen Klubs in Graz, 1883.

Müller-Breslau, *Beitrag zur Theorie des durch einen Balken versteiften Bogens.* Zeitschr. f. Bauwesen, 1884, S. 323.

Krohn, *Der Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen und Anwendung desselben zur Berechnung statisch unbestimmter Fachwerkträger.* Zeitschr. des Archit. u. Ing.-Ver. zu Hannover, 1884, S. 269. Verwerthet den Maxwell'schen Satz in Verbindung mit dem Williot'schen Verschiebungsplan.

Müller-Breslau, *Vereinfachung der Theorie der statiseh unbestimmten Bogenträger.* Zeitschr. des Archit. u. Ing.-Ver. zu Hannover 1884, S. 575. Ein Sonderdruck erschien bei Schmorl u. von Seefeld in Hannover.

Melan, *Beitrag zur Berechnung statisch unbestimmter Stabsysteme.* Zeitschr. des österr. Archit. u. Ing.-Ver., 1884, S. 100.

Melan, *Theorie der eisernen Bogenbrücken* im Handbuch der Ingenieurwissenschaften, II. Band, IV. Abtheilung, 1888.

Land, *Ueber die Ermittelung und die gegenseitigen Beziehungen der Einflusslinien für Träger.* Zeigt u. A. die Bestimmung der Festpunkte durchgehender Balken mit Hilfe von Biegungslinien (Seite 353, Fig. 333 unseres Buches). Das von uns in Fig. 182 gegebene allgemeine Gesetz wird von Land für einige Sonderfälle entwickelt. Zeitschr. f. Bauwesen, 1890, S. 165.

Müller-Breslau, *Ueber einige Aufgaben der Statik, welche auf Gleichungen der Clapeyronschen Art führen.* Enthält die auf Seite 357 dieses Buches gegebene Lösung der Gleichungen $\alpha_r M_{r-1} + \beta_r M_r + \alpha_{r+1} M_{r+1} = N_r$ nebst verschiedenen Anwendungen. Centralblatt d. Bauverwaltg. 1891. Sonderdruck bei Ernst u. Sohn, Berlin.

Verschiebungsplan eines Dachbinders.

Fig. 46.
1:100.

Fig. 47.
Plan I.
20:1.

Fig. 48.
Plan II.
20:1.

Lith. Anst. v. F. Wirtz, Darmstadt.

Baumgärtner's Buchhandlung, Leipz.

E. Müller-Breslau, Graphische Statik. I.

Lith. Anst. v. F. Wirtz, Darmstadt.

Baumgärtner's Buchhandlung, Leipzig.

H. Müller-Breslau. Graphische Statik. II.

Lith. Anst. v. F. Wirtz, Darmstadt.

Baumgärtner's Buchhandlung, Leipzig.

Fig. 244.
D_1-Fläche
D_2-Fläche
D_3-Fläche
D_4-Fläche
D_5-Fläche
V_0-Fläche
V_1-Fläche
V_2-Fläche
V_3-Fläche
V_4-Fläche
Fig. 245.
Verschiebungsplan für den Zustand H = -1
Biegungslinie für den Zustand H = -1
Fig. 246.
Spannkräfte in Tonnen infolge H = -1
Fig. 247.
Längenänderungen in dm für E = 1 und infolge H = -1
Kräftemaafsstäbe für die Einflußlinien.
Maafsstab für die Verschiebungen

Lith. Anst. v. F. Wirtz, Darmstadt.
Baumgärtner's Buchhandlung, Leipzig.

Fig. 342.
Fig. 348.
Fig. 353.
Fig. 343a
Fig. 343b
X-Linien
Fahrbahn oben
Fahrbahn unten
Fig. 349a
Fig. 349b
D-Fläche, Fahrbahn unten (genau) $1^t = 25^{mm}$
Fig. 350a
D-Fläche, Fahrbahn unten (angenähert) $1^t = 25^{mm}$
Fig. 350b
D-Fläche, Fahrbahn oben (genau) $1^t = 25^{mm}$
Fig. 351a
D-Fläche, Fahrbahn oben (angenähert) $1^t = 25^{mm}$
Fig. 351b
Fig. 352.
Fig. 344.
Fig. 345.
Kräfteplan für $X = 1^t$
Stablängen in dm
Fig. 346.
Querschnittsverhältnisse
Spannkräfte S
Fig. 347.
Fig. 357.
Fig. 354.
O-Flächen. $1^t = 25^{mm}$
O-Fläche, Fahrbahn unten (genau) $2^t = 25^{mm}$
Fig. 355a
O-Fläche Fahrbahn unten (angenähert) $2^t = 25^{mm}$
Fig. 355b
O-Fläche, Fahrbahn oben (genau) $2^t = 25^{mm}$
Fig. 356a
O-Fläche, Fahrbahn oben (angenähert) $2^t = 25^{mm}$
Fig. 356b